Zum Kriechproblem der in zwei Richtungen vorgespannten Platten und Scheiben

Autor(en): **Swida, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **16 (1956)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15078

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zum Kriechproblem der in zwei Richtungen vorgespannten Platten und Scheiben[1])

The problem of creep in slabs and discs subjected to prestressing in two directions[2])

Le problème de l'écoulement des dalles et des disques soumis à une précontrainte suivant deux directions[3])

Dr.-Ing. habil. W. Swida,
Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Mitteilung I)

1. Einleitung

Die Untersuchung der Kriecheinflüsse für zweiachsige Spannungszustände wurde m. W. in der Fachliteratur noch nicht erörtert.

Im folgenden werden daher die Kriecheinflüsse für einige Platten und Scheiben untersucht, die mit Hilfe von geradlinigen Spanngliedern in zwei Richtungen vorgespannt sind.

Es wird angenommen, daß die Platte vollkommen frei ist und die gleichen Kriechzahlen für die beiden Hauptrichtungen besitzt („Kriechisotropie").

Um den Einfluß des Eigengewichtes für das erste Stadium des Kriechvorganges ausschalten zu können, wird folgendes Herstellungsverfahren vorausgesetzt: Die Platte wird zunächst in vertikaler Lage vorgespannt und dann nach einiger Zeit (und erst nach dem Auspressen von Röhrchen bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund) in die waagrechte Lage als tragende

[1]) Der Aufsatz enthält Teilergebnisse einer größeren Untersuchung, die mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie der Karlsruher Hochschulvereinigung ausgeführt wurde.

[3]) This paper contains part of the results of an extended investigation which has been carried out with the support of the German Society for Research and the Association of Technical Schools in Karlsruhe.

[2]) Ce mémoire contient les résultats partiels d'une importante investigation qui a été effectuée avec l'appui de la Société Allemande de Recherche et de l'Association des Ecoles Supérieures de Carlsruhe.

Konstruktion gebracht. (Ein solches Verfahren wird oftmals bei serienmäßiger Herstellung von Spannbetonplatten verwendet.)

Nun beginnt das zweite Stadium des Kriechvorganges, bei dem nicht nur das Restkriechen aus Vorspannkräften, sondern auch das neu entstandene Kriechen aus Eigengewicht zu berücksichtigen sind.

Die Verteilung der Kriechspannungen für dieses zweite Stadium ist von den Randbedingungen der Platte abhängig. Wir kommen in einer späteren Arbeit ausführlich auf sie zurück.

Unter diesen Bedingungen gilt die weiter unten entwickelte Theorie in der Hauptsache für die Vorspannung ohne Verbund und mit nachträglichem Verbund. Sie kann aber auch für die Näherungsuntersuchung der Kriecheinflüsse in mittleren Bereichen von Platten, die mit Verbund vorgespannt sind, verwendet werden.

2. Zentrische Vorspannung in zwei Richtungen

Es soll zunächst die zentrische Vorspannung einer rechteckigen Scheibe oder Platte in zwei Richtungen untersucht werden (Fig. 1). Der Einfluß der kleinen Außermittigkeit, die durch die gegenseitige Kreuzung der Spannstäbe bedingt ist, wird vernachlässigt. Man kann auch annehmen, daß die Spannstähle so angeordnet sind, wie es in Fig. 2 gezeigt wird.

Wir bezeichnen die ursprünglichen, im Zeitpunkt $t = 0$ wirkenden Vorspannkräfte pro Längeneinheit der Plattenbreite mit V_x bzw. V_y und die Platten-

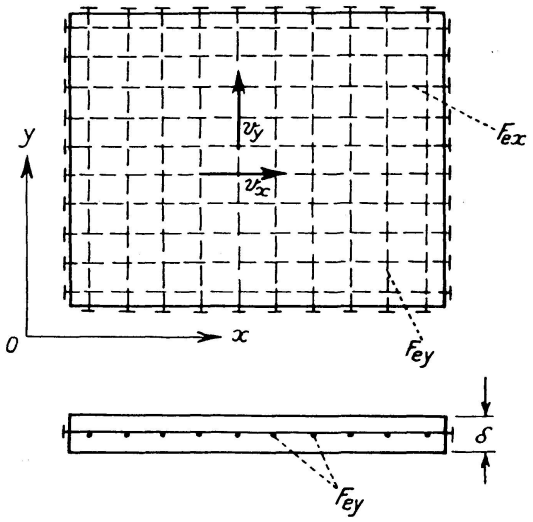

Fig. 1

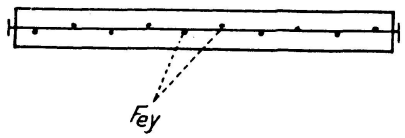

Fig. 2

stärke mit δ. Die Vorspannkraftverluste infolge des Kriechens bis zum Zeitpunkt $t=t$ seien V_{xt} und V_{yt}. Die auf den Beton im Zeitpunkt $t=t$ noch wirkenden Spannkräfte sind daher

$$V_x - V_{xt} \quad \text{und} \quad V_y - V_{yt}.$$

Wir ermitteln die Vorspannkraftverluste aus der Bedingung, daß die Dehnungen des Betons und der Spannglieder in der Zeit dt gleich sind.

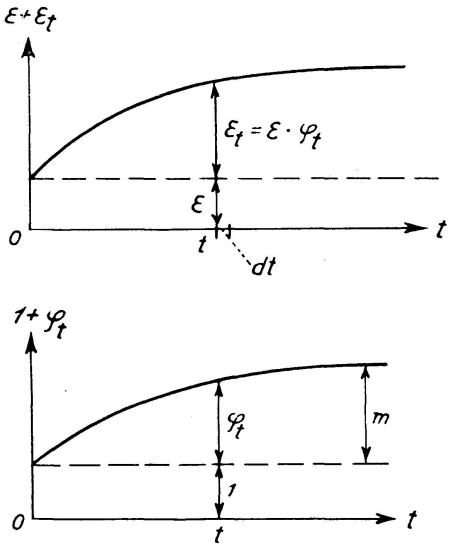

Fig. 3

Man bezeichnet mit ϵ die dem Zeitpunkt $t=0$ entsprechende relative elastische Formänderung oder Dehnung. Aus Fig. 3, in der die Kriechkurve dargestellt ist, kann man ersehen, daß die gesamte relative Kriechformänderung bis zum Zeitpunkt $t=t$ gleich

$$\epsilon_t = \epsilon \cdot \varphi_t$$

ist, wobei φ_t die Kriechzahl für den Zeitpunkt $t=t$ bedeutet. Die Kriechformänderung in der Zeit dt ist daher

$$\frac{d\epsilon_t}{dt} = \epsilon \frac{d\varphi_t}{dt}.$$

Man erhält den folgenden Satz, der erstmals von F. DISCHINGER[4]) aufgestellt wurde:

Die plastische Formänderung (Kriechformänderung) in der Zeit dt ergibt sich aus der dem Zeitpunkt $t=0$ entsprechenden elastischen Formänderung durch Multiplikation mit $\frac{d\varphi_t}{dt}$.

---

[4]) F. DISCHINGER, Untersuchungen über die Knicksicherheit, die plastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Bauingenieur 18 (1937), S. 487.

F. DISCHINGER, Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Bauingenieur 20 (1939), S. 53.

Den Vorspannkräften $V_x - V_{xt}$ und $V_y - V_{yt}$, die im Zeitpunkt $t = t$ auf den Beton noch wirken, würde im Zeitpunkt $t = 0$ eine elastische Verkürzung der Längeneinheit ϵ_x in der x-Richtung entsprechen. Sie ist

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_{b0}} - \mu \frac{\sigma_y}{E_{b0}} = \frac{V_x - V_{xt}}{\delta E_{b0}} - \mu \frac{V_y - V_{yt}}{\delta E_{b0}}$$

wobei E_{b0} der Betonmodul für den Zeitpunkt $t = 0$ ist (Fig. 4). Hieraus ergibt sich die plastische *Verkürzung* in der Zeit dt durch Multiplikation mit $\frac{d\varphi_t}{dt}$. Sie ist

$$\left(\frac{V_x - V_{xt}}{\delta E_{b0}} - \mu \frac{V_y - V_{yt}}{\delta E_{b0}}\right) \frac{d\varphi_t}{dt}.$$

In der Zeit dt vermindern sich die Vorspannkräfte $V_x - V_{xt}$ und $V_y - V_{yt}$ um dV_{xt} und dV_{yt}.

Die durch die Kräfte dV_{xt} und dV_{yt} hervorgerufene elastische *Verlängerung* der Längeneinheit für die x-Richtung in der Zeit dt ist

$$\frac{dV_{xt}}{dt} \cdot \frac{1}{\delta E_{bt}} - \mu \frac{dV_{yt}}{dt} \cdot \frac{1}{\delta E_{bt}}.$$

Dabei ist E_{bt} der dem Zeitpunkt $t = t$ entsprechende Modul des Betons. Die Kurve der Fig. 4 zeigt die Steigerung des Moduls E_{bt} infolge der fortschreitenden Erhärtung des Betons.

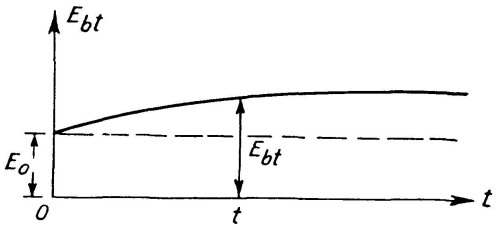

Fig. 4

Die relative elastische Längenänderung für die Spannstähle in der Zeit dt beträgt

$$\frac{dV_{xt}}{dt} \cdot \frac{1}{F_{ex} E_e},$$

wobei F_{ex} die Querschnittsfläche der Spannstähle je Breiteneinheit der Platte ist (Fig. 1).

Setzt man die Dehnungen des Betons und der Spannstäbe in dem Zeitdifferential dt gleich, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{1}{\delta E_{b0}} [(V_x - V_{xt}) - \mu (V_y - V_{yt})] \cdot \frac{d\varphi_t}{dt} - \frac{1}{\delta E_{bt}} \left(\frac{dV_{xt}}{dt} - \mu \frac{dV_{yt}}{dt}\right) = \frac{dV_{xt}}{dt} \cdot \frac{1}{F_{ex} E_e}. \quad (1)$$

Bei der Vorspannung *mit Verbund* befinden sich in diesem Falle auch die Stähle in einem zweiachsigen Spannungszustand. Die rechte Seite der Gl. (1)

nimmt dabei für den von den Rändern genügend weit entfernten Plattenbereich die Form an:

$$\frac{d V_{xt}}{d t} \cdot \frac{1}{F_{ex} E_e} + \mu_e \frac{d V_{yt}}{d t} \cdot \frac{1}{\delta E_e}.$$

Im folgenden wird zur Vereinfachung die übliche Annahme getroffen, daß $E_{bt} = E_{b0} = E_b$ ist.

Multipliziert man die Gl. (1) mit $\delta E_b \cdot \frac{d t}{d \varphi_t}$, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$(1 + k_x) \frac{d V_{xt}}{d \varphi_t} + V_{xt} - V_x - \mu \left(\frac{d V_{yt}}{d \varphi_t} + V_{yt} - V_y \right) = 0 \tag{2}$$

mit

$$k_x = \frac{\delta E_b}{F_{ex} E_e}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die y-Richtung:

$$(1 + k_y) \frac{d V_{yt}}{d \varphi_t} + V_{yt} - V_y - \mu \left(\frac{d V_{xt}}{d \varphi_t} + V_{xt} - V_x \right) = 0 \tag{3}$$

mit

$$k_y = \frac{\delta E_b}{F_{ey} E_e}.$$

Eliminiert man $\frac{d V_{yt}}{d \varphi_t}$ aus (2) mit Hilfe von (3) und $\frac{d V_{xt}}{d \varphi_t}$ aus (3) mittels (2), so erhält man nach einigen Umformungen folgendes simultanes System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d V_{xt}}{d \varphi_t} &= a_1 V_{xt} + b_1 V_{yt} + c_1 && (4) \\ \frac{d V_{yt}}{d \varphi_t} &= a_2 V_{yt} + b_2 V_{xt} + c_2 && (5) \end{aligned}}$$

mit

$$a_1 = -\frac{1 + k_y - \mu^2}{\psi}; \qquad b_1 = \frac{\mu k_y}{\psi}; \qquad c_1 = \frac{V_x (1 + k_y - \mu^2) - \mu V_y k_y}{\psi};$$

$$a_2 = -\frac{1 + k_x - \mu^2}{\psi}; \qquad b_2 = \frac{\mu k_x}{\psi}; \qquad c_2 = \frac{V_y (1 + k_x - \mu^2) - \mu V_x k_x}{\psi};$$

$$\psi = (1 + k_x)(1 + k_y) - \mu^2.$$

Wir differenzieren nun die Gl. (4) nach φ_t. Dann erhalten wir unter Benutzung von (5) folgende inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\boxed{\frac{d^2 V_{xt}}{d \varphi_t^2} - (a_1 + a_2) \frac{d V_{xt}}{d \varphi_t} + (a_1 a_2 - b_1 b_2) V_{xt} + c_1 a_2 - b_1 c_2 = 0} \tag{6}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die zugehörige homogene Gleichung

$$\frac{d^2 V_{xt}}{d\varphi_t^2} - (a_1 + a_2)\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} + (a_1 a_2 - b_1 b_2) V_{xt} = 0 \tag{7}$$

durch den Ansatz

$$V_{xt} = e^{\lambda \varphi_t} \tag{8}$$

befriedigt wird, wobei λ eine Konstante ist. Setzt man (8) in (7) ein, so erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{12} = \tfrac{1}{2}\left(a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4 b_1 b_2}\right). \tag{9}$$

Man kann leicht sehen, daß

$$\boxed{J_1 = \frac{b_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}} \tag{10}$$

ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung (6) ist. Setzt man an Stelle von a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 und c_2 die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich

$$J_1 = V_x \tag{11}$$

Das vollständige Integral der inhomogenen Gleichung (6) ist daher

$$\boxed{V_{xt} = A\, e^{\lambda_1 \varphi_t} + B\, e^{\lambda_2 \varphi_t} + V_x} \tag{12}$$

Substituiert man diesen Wert in die Gl. (4), so erhält man

$$\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} = A \lambda_1 e^{\lambda_1 \varphi_t} + B \lambda_2 e^{\lambda_2 \varphi_t} = A a_1 e^{\lambda_1 \varphi_t} + B a_1 e^{\lambda_2 \varphi_t} + \frac{a_1 (b_1 c_2 - c_1 a_2)}{a_1 a_2 - b_1 b_2} + b_1 V_{yt} + c_1 .$$

Daraus folgt

$$V_{yt} = A \frac{\lambda_1 - a_1}{b_1} e^{\lambda_1 \varphi_t} + B \frac{\lambda_2 - a_t}{b_1} e^{\lambda_2 \varphi_t} + J_2 \tag{13}$$

mit

$$\boxed{J_2 = \frac{b_2 c_1 - c_2 a_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}} \tag{14}$$

In diesem Falle ist $J_2 = V_y$ und

$$\boxed{V_{yt} = A \frac{\lambda_1 - a_1}{b_1} e^{\lambda_1 \varphi_t} + B \frac{\lambda_2 - a_1}{b_1} e^{\lambda_2 \varphi_t} + V_y} \tag{15}$$

Die Integrationskonstanten A und B ergeben sich aus der Bedingung:

Für $t = 0$ ist $\varphi_t = 0$ und $V_{xt} = V_{yt} = 0$. Es ist daher

$$A + B + V_x = 0, \qquad \frac{A}{b_1}(\lambda_1 - a_1) + \frac{B}{b_1}(\lambda_2 - a_1) + V_y = 0.$$

Daraus folgt:

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[V_x(\lambda_2 - a_1) - V_y b_1], \tag{16}$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}[V_x(\lambda_1 - a_1) - V_y b_1]. \tag{17}$$

Beispiel 1

Für eine in der Mittelebene in zwei Richtungen vorgespannte Platte ist der Vorspannkraftverlust infolge des Kriechens zu ermitteln (Fig. 1).

Die durch die Vorspannung im Zeitpunkt $t=0$ erzeugten Spannungen sind

$$\sigma_{bx} = 100\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \qquad \sigma_{by} = 75\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \qquad \sigma_e = 5000\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die Plattenstärke δ beträgt 20 cm.

$$E_b = 3{,}0 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \qquad \varphi_\infty = m = 2{,}0; \qquad \mu = 1/6;$$

$$F_{ex} = 0{,}4 \text{ cm}^2 \text{ (je cm der Plattenbreite)}$$

$$F_{ey} = 0{,}3\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}.$$

Die ursprünglichen Vorspannkräfte sind

$$V_x = F_{ex} \cdot \sigma_e = \delta \cdot \sigma_{bx} = 2000\frac{\text{kg}}{\text{cm}} = 2{,}0\frac{\text{t}}{\text{cm}};$$

$$V_y = F_{ey} \cdot \sigma_e = \delta \cdot \sigma_{by} = 1500\frac{\text{kg}}{\text{cm}} = 1{,}5\frac{\text{t}}{\text{cm}}.$$

Man erhält:

$$k_x = 7{,}15 \qquad k_y = 9{,}52$$

$$a_1 = -0{,}1223 \qquad b_1 = 0{,}0185$$

$$a_2 = -0{,}0948 \qquad b_2 = 0{,}0139$$

$$\lambda_1 = -0{,}0871 \qquad \lambda_2 = -0{,}1297$$

$$A = B = -1{,}0 \text{ t},$$

$$V_{xt} = 2{,}0 - e^{-0{,}0871\,\varphi_t} - e^{-0{,}1297\,\varphi_t};$$

$$V_{xt(t=\infty)} = 2{,}0 - e^{-0{,}0871 \cdot 2{,}0} - e^{-0{,}1297 \cdot 2{,}0} = 0{,}39\frac{\text{t}}{\text{cm}};$$

$$V_{yt} = 1{,}5 - 1{,}9\,e^{-0{,}0871\,\varphi_t} + 0{,}4\,e^{-0{,}1297\,\varphi_t};$$

$$V_{yt(t=\infty)} = 0{,}22\frac{\text{t}}{\text{cm}}.$$

Die in der x-Richtung nach dem Abschluß des Kriechens noch wirkende Vorspannkraft ist

$$V_x - V_{xt(t=\infty)} = 2{,}0 - 0{,}39 = 1{,}61\frac{\text{t}}{\text{cm}}.$$

Für die y-Richtung ergibt sich

$$V_y - V_{yt(t=\infty)} = 1{,}5 - 0{,}22 = 1{,}28 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}.$$

Der Spannungsverlust beträgt also für die x-Richtung etwa 19% und für die y-Richtung etwa 15%.

3. Exzentrische Vorspannung in zwei Richtungen

Wir bezeichnen die Vorspannkräfte je Längeneinheit für den Zeitpunkt $t=0$ mit V_x und V_y und deren Hebelarme bezüglich der Plattenmittelfläche mit e_x und e_y.

Die Vorspannverluste bis zum Zeitpunkt $t=t$ seien V_{xt} und V_{yt}.

Um diese zu ermitteln, setzen wir die Längenänderungen der Spannglieder und entsprechenden (in demselben Abstand von der Mittelfläche liegenden) Betonfasern gleich.

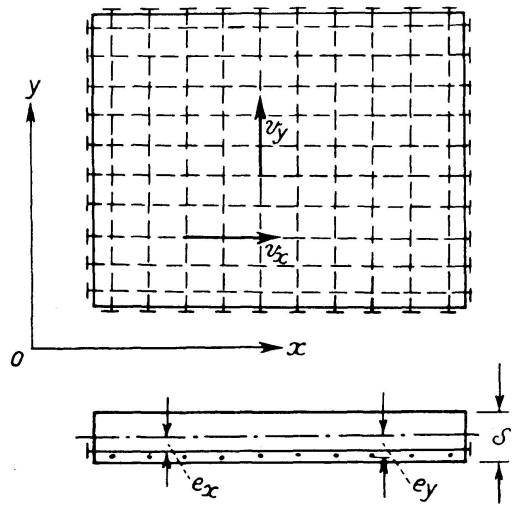

Fig. 5

Es ergeben sich für die Betonspannungen im Abstand e_x von der Plattenmittelfläche (Fig. 5) im Zeitpunkt $t=t$ folgende Ausdrücke:

$$\sigma_x = \frac{V_x - V_{xt}}{\delta}\left(1 + \frac{12\, e_x^2}{\delta^2}\right);$$

$$\sigma_y = \frac{V_y - V_{yt}}{\delta} + [(V_y - V_{yt})\, e_y]\, \frac{12\, e_x}{\delta^3} = \frac{V_y - V_{yt}}{\delta}\left(1 + \frac{12\, e_x e_y}{\delta^2}\right).$$

Diesen Spannungen würde im Zeitpunkt $t=0$ eine elastische Verkürzung ϵ_x der Längeneinheit in der x-Richtung entsprechen. Sie ist

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_{b0}} - \mu \frac{\sigma_y}{E_{b0}} = \frac{1}{\delta\, E_{b0}}\left[(V_x - V_{xt}) \cdot \left(1 + \frac{12\, e_x^2}{\delta^2}\right) - \mu\,(V_y - V_{yt}) \cdot \left(1 + \frac{12\, e_x e_y}{\delta^2}\right)\right].$$

Man erhält die *Kriechverkürzung* im Zeitdifferential dt durch Multiplikation des obigen Ausdruckes mit $\frac{d\varphi_t}{dt}$.

In der Zeit dt vermindern sich die Vorspannkräfte um dV_{xt} und dV_{yt}. Die entsprechende elastische *Verlängerung* der Betonfaser im Abstand e_x von der Mittelfläche beträgt für die x-Richtung

$$\frac{1}{\delta E_{bt}}\left[\frac{dV_{xt}}{dt}\left(1+\frac{12\,e_x^2}{\delta^2}\right)-\mu\frac{dV_{yt}}{dt}\left(1+\frac{12\,e_x e_y}{\delta^2}\right)\right],$$

wobei E_{bt} der Modul für den Zeitpunkt $t=t$ ist.

Wir wollen in diesem Falle auch den *Einfluß des Schwindens* berücksichtigen. Dabei wird die übliche Annahme getroffen, daß die Ordinaten der Schwindkurve proportional den Ordinaten der Kriechkurve sind. Ist dann ϵ_s

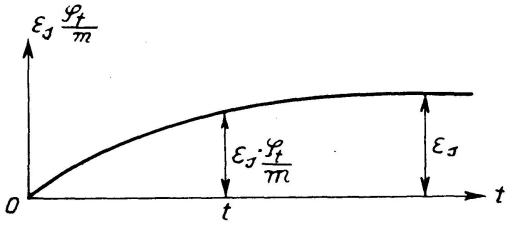

Fig. 6

die Verkürzung der Längeneinheit für die ganze Zeit des Schwindens, so erhält man für die gesamte Schwindverkürzung ϵ_{st} bis zum Zeitpunkt $t=t$ (Fig. 6)

$$\epsilon_{st}=\frac{\epsilon_s}{m}\varphi_t.$$

Daraus ergibt sich die Schwindverkürzung im Zeitdifferential dt durch Differentiation

$$\frac{d\epsilon_{st}}{dt}=\frac{\epsilon_s}{m}\cdot\frac{d\varphi_t}{dt}.$$

Die Verkürzung der Spannglieder in der Zeit dt, die der Verminderung dV_{xt} der Vorspannkraft entspricht, ist

$$\frac{dV_{xt}}{dt}\,\frac{1}{F_{ex}E_e}.$$

Setzt man die Längenänderungen (Dehnungen) der Spannstähle und der entsprechenden Betonfasern gleich, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta E_{b0}}\left[(V_x-V_{xt})\left(1+\frac{12\,e_x^2}{\delta^2}\right)-\mu(V_y-V_{yt})\left(1+\frac{12\,e_x e_y}{\delta^2}\right)\right]\frac{d\varphi_t}{dt}-\\&-\frac{1}{\delta E_{bt}}\left[\frac{dV_{xt}}{dt}\left(1+\frac{12\,e_x^2}{\delta^2}\right)-\mu\frac{dV_{yt}}{dt}\left(1+\frac{12\,e_x e_y}{\delta^2}\right)\right]+\frac{\epsilon_s}{m}\cdot\frac{d\varphi_t}{dt}=\\&=\frac{dV_{xt}}{dt}\cdot\frac{1}{F_{ex}E_e}.\end{aligned}\tag{18}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\delta E_b \cdot \frac{dt}{d\varphi_t}$, so erhält man unter der Annahme, daß $E_{b0} = E_{bt} = E_b$ ist, folgende Gleichung:

$$\left(1 + \frac{12 e_x^2}{\delta^2} + \frac{\delta E_b}{F_{ex} E_e}\right) \frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} + \left(1 + \frac{12 e_x^2}{\delta^2}\right) \cdot (V_{xt} - V_x) -$$
$$- \mu \left(1 + \frac{12 e_x e_y}{\delta^2}\right) \left(\frac{d V_{yt}}{d\varphi_t} + V_{yt} - V_y\right) - \frac{\epsilon_s}{m} \delta E_b = 0,$$

oder

$$\boxed{\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} + k_x (V_{xt} - V_x) - k_{xy} \left(\frac{d V_{yt}}{d\varphi_t} + V_{yt} - V_y\right) - k_{xs} = 0} \tag{19}$$

Dabei ist

$$k_x = \frac{1 + \frac{12 e_x^2}{\delta^2}}{\psi_x}; \qquad k_{xy} = \frac{\mu \left(1 + \frac{12 e_x e_y}{\delta^2}\right)}{\psi_x}; \qquad k_{xs} = \frac{\epsilon_s \delta E_b}{m \cdot \psi_x};$$
$$\psi_x = 1 + \frac{12 e_x^2}{\delta^2} + \frac{\delta E_b}{F_{ex} E_e}.$$

Die Kriechgleichung für die y-Richtung ergibt sich aus (19) durch Vertauschen von x mit y. Sie lautet:

$$\boxed{\frac{d V_{yt}}{d\varphi_t} + k_y (V_{yt} - V_y) - k_{yx} \left(\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} + V_{xt} - V_x\right) - k_{ys} = 0} \tag{20}$$

mit

$$k_y = \frac{1 + \frac{12 e_y^2}{\delta^2}}{\psi_y}; \qquad k_{yx} = \frac{\mu \left(1 + \frac{12 e_x e_y}{\delta^2}\right)}{\psi_y}; \qquad k_{ys} = \frac{\epsilon_s \delta E_b}{m \cdot \psi_y};$$
$$\psi_y = 1 + \frac{12 e_y^2}{\delta^2} + \frac{\delta E_b}{F_{ey} E_e}.$$

Eliminiert man $\frac{d V_{yt}}{d\varphi_t}$ aus (19) mittels (20) und $\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t}$ aus (20) mit Hilfe von (19), so erhält man nach einigen Umformungen folgendes simultanes System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d V_{xt}}{d\varphi_t} = a_1 V_{xt} + b_1 V_{yt} + c_1 \tag{21}$$

$$\frac{d V_{yt}}{d\varphi_t} = a_2 V_{yt} + b_2 V_{xt} + c_2. \tag{22}$$

Hierin ist

$$a_1 = \frac{k_{xy} k_{yx} - k_x}{\kappa}; \qquad b_1 = \frac{k_{xy} (1 - k_y)}{\kappa};$$
$$c_1 = \frac{1}{\kappa} [V_x (k_x - k_{xy} \cdot k_{yx}) + V_y k_{xy} (k_y - 1) + k_{xs} + k_{ys} k_{xy}];$$

$$a_2 = \frac{k_{xy}\,k_{yx} - k_y}{\kappa}; \qquad b_2 = \frac{k_{yx}\,(1-k_x)}{\kappa};$$

$$c_2 = \frac{1}{\kappa}\left[V_y\,(k_y - k_{xy}\,k_{yx}) + V_x\,k_{yx}\,(k_x - 1) + k_{ys} + k_{xs}\,k_{yx}\right];$$

$$\kappa = 1 - k_{xy}\,k_{yx}.$$

Die Gleichungen (21) und (22) sind identisch mit den Gleichungen (4) und (5) für eine zentrisch vorgespannte Platte. Die für diese im Abschnitt 2 angegebenen Lösungen können daher auch im untersuchten Falle verwendet werden.

Es ist also

$$\boxed{V_{xt} = A\,e^{\lambda_1 \varphi_t} + B\,e^{\lambda_2 \varphi_t} + J_1} \tag{23}$$

$$\boxed{V_{yt} = \frac{A}{b_1}(\lambda_1 - a_1)\,e^{\lambda_1 \varphi_t} + \frac{B}{b_1}(\lambda_2 - a_1)\,e^{\lambda_2 \varphi_t} + J_2} \tag{24}$$

mit

$$J_1 = \frac{b_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}, \qquad J_2 = \frac{b_2 c_1 - c_2 a_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2},$$

$$A = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[J_1\,(\lambda_2 - a_1) - J_2\,b_1\right], \tag{25}$$

$$B = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[J_1\,(\lambda_1 - a_1) - J_2\,b_1\right]. \tag{26}$$

Die λ_1- und λ_2-Werte können dabei aus (9) ermittelt werden.

Nun wollen wir die *Gleichung der Biegefläche* aufstellen.

Es wird angenommen, daß die Platte vollkommen frei ist. Den Einfluß des Eigengewichtes lassen wir außer acht und betrachten nur die Wirkung der Vorspannkräfte. Die Platte wird dann (bei Vorspannung ohne Verbund und mit nachträglichem Verbund) durch die entlang den Rändern gleichmäßig verteilten Momente $M_x = -V_x e_x$ und $M_y = -V_y e_y$ beansprucht (Fig. 7).

Aus den bekannten Beziehungen

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

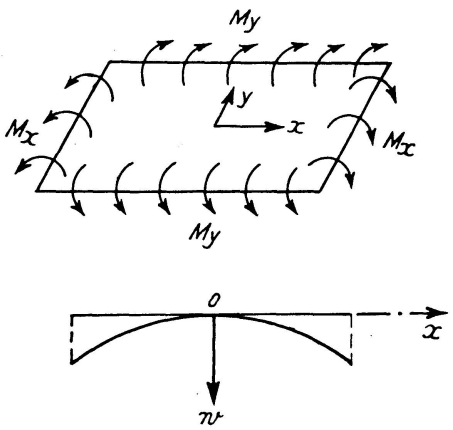

Fig. 7

wobei $w = w(x, y)$ die Durchbiegung der Platte (positiv nach unten) und

$$D = \frac{E\,\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$$

die Plattensteifigkeit sind, ergibt sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{r_x} = \frac{V_x e_x - \mu V_y e_y}{D\,(1-\mu^2)}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r_y} = \frac{V_y e_y - \mu V_x e_x}{D\,(1-\mu^2)}.$$

Dabei sind r_x und r_y die Krümmungsradien.

Die Integration dieser Gleichungen liefert:

$$w = \frac{1}{2\,D\,(1-\mu^2)}\left[(V_x e_x - \mu V_y e_y)\,x^2 + (V_y e_y - \mu V_x e_x)\,y^2\right] + C_1 x + C_2 y + C_3.$$

Wählt man den Koordinatenursprung in der Plattenmitte und benutzt man die Bedingungen:

für $x = 0$ und $y = 0$ sind $w = 0$[5]), $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$,

so erhält man: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$.

Die Gleichung der ursprünglichen Plattenmittelfläche ist daher

$$w = w(x, y) = \frac{1}{2\,D\,(1-\mu^2)}\left[V_x e_x (x^2 - \mu y^2) + V_y e_y (y^2 - \mu x^2)\right]. \tag{27}$$

Nun wollen wir den *Einfluß des Kriechens und Schwindens* auf die Verschiebungen der Plattenmittelfläche untersuchen.

Die Durchbiegung der Platte in einem beliebigen Punkt (x, y) zur Zeit $t = t$ wäre einfach

$$w\,(1 + \varphi_t),$$

wenn die Vorspannkräfte V_x und V_y unverändert blieben. Infolge der Wirkung der mit der Zeit veränderlichen Spannkraftverluste V_{xt} und V_{yt} kann jedoch die Durchbiegung den obigen Wert niemals erreichen.

Um den Einfluß der Spannkraftverluste zu untersuchen, betrachten wir zunächst die Wirkung der Kräfte

$$\frac{d\,V_{xt_1}}{d\,t_1}\,d\,t_1 \quad \text{und} \quad \frac{d\,V_{yt_1}}{d\,t_1}\,d\,t_1,$$

die im Zeitpunkt $t_1\,(t \geqq t_1 \geqq 0)$ entstehen. Dabei sind V_{xt_1} und V_{yt_1} die Spannkraftverluste bis zum Zeitpunkt t_1.

Für den Zeitpunkt t ist dann die Kriechzahl für die Wirkung der obigen Kräftedifferentiale nicht φ_t, sondern $\varphi_t - \varphi_{t1}$ (Fig. 8).

Die Durchbiegung infolge der in der Zeit $d\,t_1$ entstandenen Kräfteänderungen erreicht daher zur Zeit $t_1 = t$ unter dem Kriecheinfluß den Wert

---

[5]) Wir nehmen an, daß der Plattenmittelpunkt festgehalten wird.

$$dw_{t1} = \frac{1}{2D(1-\mu^2)}\left[\frac{dV_{xt_1}}{dt_1}dt_1 \cdot e_x(x^2-\mu y^2) + \frac{dV_{yt_1}}{dt_1}dt_1 \cdot e_y(y^2-\mu x^2)\right] \cdot (1+\varphi_t-\varphi_{t1}).$$

Die Gesamtdurchbiegung der Platte für den Zeitpunkt $t_1 = t$ ist

$$w(x,y,t) = w(x,y,\varphi_t) = w(1+\varphi_t) - \int_0^t dw_{t1} = w(1+\varphi_t) - \tag{28}$$

$$-\int_0^t \frac{1}{2D(1-\mu^2)}\left[\frac{dV_{xt_1}}{dt_1}dt_1 \cdot e_x(x^2-\mu y^2) + \frac{dV_{yt_1}}{dt_1}dt_1 \cdot e_y(y^2-\mu x^2)\right](1+\varphi_t-\varphi_{t1}).$$

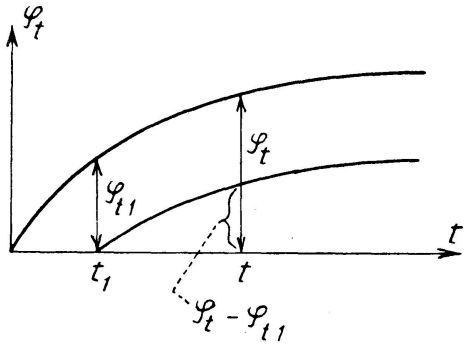

Fig. 8

Aus (23) und (24) folgt:

$$\frac{dV_{xt_1}}{dt_1} = (A\lambda_1 e^{\lambda_1\varphi_{t1}} + B\lambda_2 e^{\lambda_2\varphi_{t1}})\frac{d\varphi_{t1}}{dt_1};$$

$$\frac{dV_{yt_1}}{dt_1} = \left[\frac{A}{b_1}\lambda_1(\lambda_1-a_1)e^{\lambda_1\varphi_{t1}} + \frac{B}{b_1}\lambda_2(\lambda_2-a_1)e^{\lambda_2\varphi_{t1}}\right]\cdot\frac{d\varphi_{t1}}{dt_1}.$$

Setzt man diese Werte in die Gl. (28) ein, so erhält man die Gleichung der Biegefläche für den Zeitpunkt t:

$$w(x,y,t) = w(x,y,\varphi_t) = w(1+\varphi_t) - \frac{1}{2D(1-\mu^2)}\Big\{e_x(x^2-\mu y^2)\int_0^{\varphi}(A\lambda_1 e^{\lambda_1\varphi_{t1}} +$$

$$+ B\lambda_2 e^{\lambda_2\varphi_{t1}})(1+\varphi_t-\varphi_{t1})d\varphi_{t1} + e_y(y^2-\mu x^2)\int_0^{\varphi}\left[\frac{A\lambda_1}{b_1}(\lambda_1-a_1)e^{\lambda_1\varphi_{t1}} +\right.$$

$$\left.+\frac{B\lambda_2}{b_1}(\lambda_2-a_1)e^{\lambda_2\varphi_{t1}}\right](1+\varphi_t-\varphi_{t1})d\varphi_{t1}\Big\} =$$

$$= \frac{1+\varphi_t}{2D(1-\mu^2)}[V_x e_x(x^2-\mu y^2) + V_y e_y(y^2-\mu x^2)] - \frac{1}{2D(1-\mu^2)}\cdot \tag{29}$$

$$\cdot\Big(e_x(x^2-\mu y^2)\Big\{A\left[(e^{\lambda_1\varphi_t}-1)\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)-\varphi_t\right] + B\left[(e^{\lambda_2\varphi_t}-1)\left(1+\frac{1}{\lambda_2}\right)-\varphi_t\right]\Big\} +$$

$$+ e_y(y^2-\mu x^2)\Big\{\frac{A}{b_1}(\lambda_1-a_1)\left[(e^{\lambda_1\varphi_t}-1)\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)-\varphi_t\right] +$$

$$+\frac{B}{b_1}(\lambda_2-a_1)\left[(e^{\lambda_2\varphi_t}-1)\left(1+\frac{1}{\lambda_2}\right)-\varphi_t\right]\Big\}\Big).$$

Diese Formel liefert die Durchbiegung $w(x, y, \varphi_t)$ der Platte als Funktion der Koordinaten x, y (Fig. 7) und der Kriechzahl φ_t.

Beispiel 2

Für eine in zwei Richtungen exzentrisch vorgespannte Platte (Fig. 5) ist der Vorspannkraftverlust infolge des Kriechens und Schwindens zu berechnen.

$$F_{ex} = 0{,}2\,\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}; \qquad F_{ey} = 0{,}15\,\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}; \qquad \delta = 20\text{ cm};$$

$$e_x = 6{,}0\text{ cm}; \qquad e_y = 8{,}0\text{ cm}; \qquad \mu = 1/6;$$

$$E_e = 2{,}1\cdot 10^6\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; \qquad E_b = 3{,}0\cdot 10^5\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die Spannung in den Zuggliedern vor dem Beginn des Schwindens und Kriechens beträgt für beide Richtungen $\sigma_e = 5000\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Den Einfluß des Schwindens setzen wir gleich einem Temperaturabfall von 20°. Das Schwindmaß ist:

$$\epsilon_s = 0{,}00001\cdot 20 = 0{,}0002.$$

Das Endkriechmaß $\varphi_\infty = m$ wird zu 3,0 gewählt.

Die ursprünglichen Vorspannkräfte sind:

$$V_x = \sigma_e\cdot F_{ex} = 1{,}0\,\frac{\text{t}}{\text{cm}}, \qquad V_y = \sigma_e\cdot F_{ey} = 0{,}75\,\frac{\text{t}}{\text{cm}}.$$

Man erhält ferner

$$k_x = 0{,}127 \qquad k_{xy} = 0{,}0248 \qquad k_{xs} = 24{,}43\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}},$$

$$k_y = 0{,}133 \qquad k_{yx} = 0{,}0185 \qquad k_{ys} = 18{,}22\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Unter Vernachlässigung des Produktes $k_{xy}\cdot k_{yx}$, das gegenüber k_x, k_y und 1,0 sehr klein ist, ergeben sich die Beiwerte

$$a_1 = -k_x = -0{,}127; \qquad b_1 = k_{xy}(1-k_y) = 0{,}0215;$$

$$a_2 = -k_y = -0{,}133; \qquad b_2 = k_{yx}(1-k_x) = 0{,}0161;$$

$$c_1 = V_x k_x + V_y k_{xy}(k_y - 1) + k_{xs} + k_{ys} k_{xy} = 135{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}};$$

$$c_2 = V_y k_y + V_x k_{yx}(k_x - 1) + k_{ys} + k_{xs} k_{yx} = 102{,}22\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}};$$

$$\lambda_1 = -0{,}1112 \qquad \lambda_2 = -0{,}1488,$$

sowie die partikulären Integrale

$$J_1 = 1{,}220\,\frac{\text{t}}{\text{cm}}, \qquad J_2 = 0{,}913\,\frac{\text{t}}{\text{cm}}.$$

Mit diesen Werten ergeben sich die Integrationskonstanten zu

$$A = -1{,}229 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}; \qquad B = 0{,}009 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}.$$

Die Vorspannkraftverluste bis zum Zeitpunkt $t = t$ (Gleichungen (23) und (24)) sind

$$V_{xt} = 1{,}220 - 1{,}229\, e^{-0{,}1112\,\varphi_t} + 0{,}009\, e^{-0{,}1488\,\varphi_t},$$
$$V_{yt} = 0{,}913 - 0{,}904\, e^{-0{,}1112\,\varphi_t} - 0{,}009\, e^{-0{,}1488\,\varphi_t}.$$

Nach dem Abschluß des Kriechens und Schwindens ist

$$V_{xt} = 0{,}34 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}; \qquad V_{yt} = 0{,}26 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}.$$

Die Restspannkräfte sind

$$V_x - V_{xt} = 0{,}66 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}; \qquad V_y - V_{yt} = 0{,}49 \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}}.$$

Zusammenfassung

In dem Aufsatz werden die Kriecheinflüsse für einige Platten und Scheiben untersucht, die mit Hilfe von geradlinigen Spanngliedern in zwei Richtungen vorgespannt sind.

Die Untersuchung des Problems führt zur Auflösung eines Systems zweier simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Spannkraftverluste liefern.

Die Betrachtung der plastischen Kriechverformungen liefert für einen Sonderfall den Ausdruck der Biegefläche der Platte, deren Ordinaten als Funktionen nicht nur von der Lage des entsprechenden Punktes und der Größe der Vorspannkräfte, sondern auch von der Zeit bzw. der Kriechzahl erscheinen.

Die beiliegenden Beispiele erläutern den Rechnungsgang.

Summary

The paper deals with the effects observed in certain plates and slabs which are subjected to prestressing in two directions by means of rectilinear tensioning members.

The investigation of this problem led to the solution of a system of two simultaneous, first-order differential equations which gives the loss in the tensioning force.

In one particular case, the consideration of the plastic creep-deformations provided an expression for the bending surface of the slab, the ordinates of

which appear in the form of functions, not only of the position of the corresponding point and the magnitude of the prestressing forces, but also of the time and the creep.

The method of calculation is illustrated by means of a few examples.

Résumé

L'auteur étudie les influences d'écoulement qui se manifestent dans certaines plaques et dalles qui sont soumises à une précontrainte suivant deux directions à l'aide d'éléments rectilignes.

L'étude de ce problème conduit à la résolution d'un problème de deux équations différentielles simultanées du premier ordre, qui donnent les pertes de tension.

Dans un cas particulier, la considération des déformations plastiques d'écoulement fournit l'expression de la surface de flexion de la plaque, dont les ordonnées apparaissent sous la forme de fonctions non seulement de la position du point correspondant et de la valeur des efforts de précontrainte, mais aussi du temps et du coefficient d'écoulement.

Le procédé de calcul est illustré par quelques exemples.