Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 17 (1957)

Artikel: Calcul des ponts à poutres consoles réunies par des articulations
Autor: Courbon, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15751

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Calcul des ponts à poutres consoles réunies par des articulations

Berechnung der durch Gelenke verbundenen Konsolenbalkenbrücken

Calculation of Bridges with Overhung Girders Connected by Joints

J. Courbon, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, Paris

Les ponts en béton précontraint construits en encorbellement à partir des piles ou des culées, sans utilisation de cintres, constituent un type d'ouvrage particulièrement interessant. Citons par exemple le pont de Worms sur le Rhin et le pont de Coblence sur la Moselle qui comportent les plus grandes travées en béton précontraint réalisées à l'heure actuelle.

Nous nous proposons d'indiquer dans cette étude une méthode générale de calcul de ces ouvrages.

1. Définition des systèmes étudiés

Les systèmes étudiés se composent de n éléments $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots, E_{n-1}$, E_n qui ne sont pas nécessairement tous identiques (fig. 1). L'élément E_i se compose d'une pile $C_i B_i$ encastrée à sa base C_i et de deux consoles $B_i A_{i-1}$ et $B_i A_i$ encastrées au sommet B_i de la pile. L'élément E_i est relié aux éléments

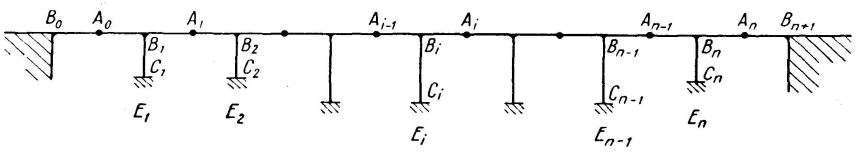

Fig. 1.

voisins E_{i-1} et E_i par des articulations A_{i-1} et A_i qui ne peuvent transmettre que des réactions verticales. L'élément E_1 est relié par une articulation A_0 du même type que les précédentes à une console $B_0 A_0$ encastrée en B_0 sur une culée equilibrée; de même l'élément E_n est relié par une articulation A_n à une console $A_n B_{n+1}$ encastrée en B_{n+1} sur une culée equilibrée.

Il peut arriver également (fig. 2) que les extrémités A_0 et A_n des éléments E_1 et E_n soient simplement appuyées sur les culées, ou même (fig. 3) que ces extrémités soient libres.

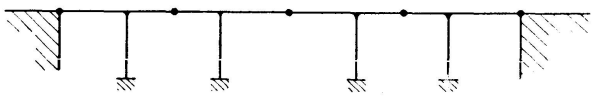

Fig. 2.

Fig. 3.

Les forces appliquées étant des charges verticales (comptées positivement vers le bas), les systèmes représentés sur les figs. 1 et 2 sont $n+1$ fois hyperstatiques, car il suffit de libérer les $n+1$ articulations $A_0, A_1, \ldots A_n$ pour rendre ces systèmes isostatiques. Nous prendrons pour inconnues hyperstatiques les valeurs des efforts tranchants T_i au droit des articulations A_i: ainsi l'élément E_i est soumis de la part de l'élément E_{i-1} à une réaction T_{i-1} (dirigée vers le haut) et de la part de l'élément E_{i+1} à une réaction $-T_i$ (dirigée vers le bas); T_0 est la réaction exercée sur l'élément E_1 en A_0, et T_n est la réaction qu'exerce l'élément E_n sur la console $A_n B_{n+1}$ ou sur la culée.

Le système représenté sur la fig. 3 est $n-1$ fois hyperstatique; en effet, les extrémités étant libres, T_0 et T_n sont nuls.

Les articulations ne transmettant que des réactions verticales, les forces horizontales appliquées à un élément sont directement reportées à la pile de cet élément, sans intervention des éléments voisins. De même, les systèmes étudiés sont pratiquement insensibles aux effets des dilatations, puisque seules les différences de dilatation des piles des éléments donnent naissance à des réactions mutuelles entre éléments.

2. Caractéristiques géométriques et mécaniques d'un élément

Nous désignerons par h_i et J_i la hauteur et le moment d'inertie de la pile de l'élément E_i, par l_i' la portée de la console $A_{i-1} B_i$, par l_i'' la portée de la console $B_i A_i$ et par I_i le moment d'inertie de ces consoles.

Nous repérerons une section quelconque d'une des deux consoles de l'élément E_i par sa distance x à l'extrémité de la console à laquelle appartient la section; x est donc essentiellement positif et varie de 0 à l_i' sur la console de gauche, de 0 à l_i'' sur la console de droite.

Nous compterons les rotations des sections positivement dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre), et les déplacements verticaux des consoles (flèches) positivement vers le haut.

Nous définirons les *coefficients de souplesse* a_i, b_i, c_i de l'élément E_i de la façon suivante (fig. 4):

L'élément E_i étant isolé, appliquons une force verticale unité à l'extrémité A_{i-1}, l'extrémité A_{i-1} subit un deplacement vers le haut égal à a_i et l'extremité A_i un déplacement vers le bas égal à b_i.

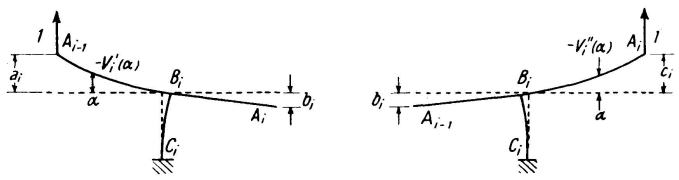

Fig. 4.

Dans les mêmes conditions, si l'on applique une force verticale unité à l'extrémité A_i, l'extrémité A_i subit un déplacement vers le haut égal à c_i et l'extrémité A_{i-1} un déplacement vers le bas égal à b_i, en vertu du théorème de Maxwell appliqué aux deux cas de charges représentés sur la fig. 4.

Les coefficients de souplesse a_i, b_i, c_i, essentiellement positifs ont pour valeurs:

$$
\begin{aligned}
a_i &= l_i'^2 \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ_i} + \int_0^{l_i'} \frac{x^2\,dx}{EI_i}, \\
b_i &= l_i'\,l_i'' \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ_i}, \qquad (1) \\
c_i &= l_i''^2 \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ_i} + \int_0^{l_i''} \frac{x^2\,dx}{EI_i}.
\end{aligned}
$$

Il résulte de ces expressions que $a_i c_i - b_i^2$ est toujours positif.

Enfin, dans le cas du système représenté sur la fig. 1, nous désignerons par c_0 le déplacement vertical de l'extrémité A_0 de la console $B_0 A_0$ sous l'effet d'une force verticale unité appliquée en A_0, et par a_{n+1} le déplacement vertical de l'extrémité A_n de la console $A_n B_{n+1}$ sous l'effet d'une force verticale unité appliquée en A_n.

3. Relation des trois efforts tranchants

La méthode générale de calcul est fondée sur l'emploi de la relation des trois efforts tranchants, relation tout à fait analogue à la relation des trois moments qui sert de base au calcul des poutres continues.

Supposons l'élément E_i isolé, et soient V_i' et V_i'' les flèches respectives des extrémités A_{i-1} et A_i sous l'effet des charges appliquées, et eventuellement des variations de température. Lorsque l'élément E_i est soumis en outre aux réactions T_{i-1} et $-T_i$ qu'exercent sur lui les éléments voisins E_{i-1} et E_i, les flèches des extrémités A_{i-1} et A_i ont respectivement pour valeur:

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= V_i' + a_i T_{i-1} + b_i T_i, \\ v_i &= V_i'' - b_i T_{i-1} - c_i T_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Mais la flèche v_i calculée sur l'élément E_i doit être égale à la flèche v_i calculée sur l'élément E_{i+1}:

$$v_i = V'_{i+1} + a_{i+1} T_i + b_i T_{i+1}.$$

Nous obtenons donc la *relation des trois efforts tranchants:*

$$b_i T_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) T_i + b_{i+1} T_{i+1} = V_i'' - V'_{i+1}. \tag{3}$$

En calculant de même les flèches v_0 et v_n, aux articulations A_0 et A_n de deux façons différentes, nous obtenons les deux relations suivantes, cas particuliers de la relation des trois efforts tranchants:

$$\begin{aligned} (c_0 + a_1) T_0 + b_1 T_1 &= V_0'' - V_1', \\ b_n T_{n-1} + (c_n + a_{n+1}) T_n &= V_n'' - V'_{n+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

V_0'' et V'_{n+1} designant les flèches des extrémités des consoles $B_0 A_0$ et $A_n B_{n+1}$ supposées isolées.

Les relations (4), valables dans le cas général de la fig. 1, sont encore applicables dans le cas de la fig. 2, en remarquant que dans ce cas

$$c_0 = 0, \quad a_{n+1} = 0, \quad V_0'' = 0, \quad V'_{n+1} = 0.$$

Dans le cas de la fig. 3, il n'est plus possible d'écrire les equations (4) puisque les extrémités sont libres; seules les equations (3) écrites pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ sont valables, compte tenu de ce que $T_0 = T_n = 0$. Ce cas ne diffère du reste pas du cas général, à condition de considérer les éléments E_1 et E_n comme des culées flexibles sur lesquelles sont encastrées les consoles $B_1 A_1$ et $A_{n-1} B_n$.

4. Méthode générale de calcul. Facteurs de transmission

Il est évidemment possible de calculer les réactions d'appui mutuelles à l'aide des relations (3) et (4). Mais la résolution des équations linéaires ainsi obtenues se complique dès que le nombre des éléments augmente. C'est pourquoi, dès que le nombre des inconnues dépasse 3, il vaut mieux employer la méthode générale que nous exposons ci-dessous.

En nous plaçant dans le *cas général de la fig. 1*, nous supposerons qu'un seul des éléments du système est chargé, ou qu'une seule des consoles encastrées sur les culées est chargée; nous déterminerons les valeurs correspondantes des inconnues hyperstatiques T_i. Le cas de charges le plus général s'obtiendra ensuite par superposition.

Supposons donc l'élément E_i seul chargé; les efforts tranchants T_i sont les solutions du système de $n+1$ equations linéaires:

$$
\begin{aligned}
&(c_0 + a_1)\ T_0 + b_1\ T_1 = 0,\\
&b_1\ T_0 + (c_1 + a_2)\ T_1 + b_2\ T_2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{i-2}\,T_{i-3} + (c_{i-2} + a_{i-1})\,T_{i-2} + b_{i-1}\,T_{i-1} = 0;
\end{aligned}
\tag{A}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{i-1}\,T_{i-2} + (c_{i-1} + a_i)\ T_{i-1} + b_i\ T_i = -V_i',\\
&b_i\ T_{i-1} + (c_i + a_{i+1})\,T_i + b_{i+1}\,T_{i+1} = V_i'';
\end{aligned}
\tag{B}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{i+1}\,T_i + (c_{i+1} + a_{i+2})\,T_{i+1} + b_{i+2}\,T_{i+2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_{n-1}\,T_{n-2} + (c_{n-1} + a_n)\ T_{n-1} + b_n\,T_n = 0,\\
&b_n\ T_{n-1} + (c_n + a_{n+1})\,T_n = 0.
\end{aligned}
\tag{C}
$$

Les équations (A) montrent que les rapports $\frac{T_0}{T_1}, \frac{T_1}{T_2}, \frac{T_2}{T_3}, \ldots$ sont constants quelles que soient les charges appliquées à l'élément E_i. Posons donc:

$$\frac{T_{j-1}}{T_j} = -r_j. \tag{5}$$

r_j est par définition le *facteur de transmission à gauche* de l'élément E_j. En portant (5) dans les équations (A), nous voyons que l'on calculera successivement les facteurs de transmission à gauche de tous les éléments au moyen des relations:

$$
\begin{aligned}
&\frac{b_1}{r_1} = a_1 + c_0,\\
&\frac{b_2}{r_2} = a_2 + c_1 - b_1 r_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{b_{j+1}}{r_{j+1}} = a_{j+1} + c_j - b_j r_j,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{b_n}{r_n} = a_n + c_{n-1} - b_{n-1} r_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

De même les équations (C) montrent que les rapports $\frac{T_n}{T_{n-1}}, \frac{T_{n-1}}{T_{n-2}}, \frac{T_{n-2}}{T_{n-3}}, \ldots$ sont constants quelles que soient les charges appliquées à l'élément E_i. Posons donc:

$$\frac{T_k}{T_{k-1}} = -r_k'. \tag{7}$$

r_k' est par définition le *facteur de transmission à droite* de l'élément E_k. En portant (7) dans les équations (C), nous voyons que l'on calculera successivement les facteurs de transmission à droite de tous les éléments au moyen des relations

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{r_n'} &= c_n + a_{n+1}, \\
\frac{b_{n-1}}{r'_{n-1}} &= c_{n-1} + a_n - b_n r_n', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{b_k}{r_k'} &= c_k + a_{k+1} - b_{k+1} r'_{k+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{b_1}{r_1'} &= c_1 + a_2 - b_2 r_2'.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Supposons connus les facteurs de transmission; les relations

$$T_{i-2} = -r_{i-1} T_{i-1}, \qquad T_{i+1} = -r'_{i+1} T_i$$

permettent d'écrire les équations (B) sous la forme

$$
\begin{aligned}
(a_i + c_{i-1} - b_{i-1} r_{i-1})\, T_{i-1} + b_i\, T_i &= -V_i', \\
b_i\, T_{i-1} + (c_i + a_{i+1} - b_{i+1} r'_{i+1})\, T_i &= \quad V_i''
\end{aligned}
$$

ou, compte tenu des relations (6) et (8)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r_i} T_{i-1} + T_i &= -\frac{V_i'}{b_i}, \\
T_{i-1} + \frac{1}{r_i'} T_i &= \quad \frac{V_i''}{b_i}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Ces équations donnent T_{i-1} et T_i:

$$
\begin{aligned}
T_{i-1} &= -\frac{1}{b_i} \frac{\frac{1}{r_i'} V_i' + V_i''}{\frac{1}{r_i r_i'} - 1}, \\
T_i &= +\frac{1}{b_i} \frac{V_i' + \frac{1}{r_i} V_i''}{\frac{1}{r_i r_i'} - 1}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Les autres efforts tranchants se calculent alors par les équations

$$
\begin{aligned}
T_{i-2} &= -r_{i-1} T_{i-1}; \quad T_{i-3} = -r_{i-2} T_{i-2}, \ldots \text{etc.} \ldots \\
T_{i+1} &= -r'_{i+1} T_i; \quad T_{i+2} = -r'_{i+2} T_{i+1}, \ldots \text{etc.} \ldots
\end{aligned} \tag{11}
$$

Les facteurs de transmission étant petits, les réactions mutuelles diminuent rapidement dès que l'on s'éloigne de l'élément chargé.

Si l'on suppose que seule la console $B_0 A_0$ est chargée, on trouvera, en employant la même méthode:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{V_0''}{c_0 + a_1 - b_1 r_1'}, \\
T_1 &= -r_1' T_0, \quad T_2 = -r_2' T_1, \quad \text{etc.}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Enfin, dans le cas où seule la console $A_n B_{n+1}$ est chargée, les valeurs des inconnues hyperstatiques sont:

$$T_n = -\frac{V'_{n+1}}{a_{n+1}+c_n-b_n r_n}, \qquad T_{n-1} = -r_n T_n, \quad T_{n-2} = -r_{n-1} T_{n-1}, \quad \text{etc.} \tag{13}$$

Dans le cas de la fig. 2, les facteurs de transmission sont données par les équations (6) et (8) dans lesquelles $c_0 = 0$, $a_{n+1} = 0$. Les valeurs des efforts tranchants aux articulations sont données par les équations (10) et (11).

Dans le cas de la fig. 3, les facteurs de transmission sont données par les équations (6) et (8) à condition de remplacer la première équation (6) par $r_1 = 0$ et la première équation (8) par $r_n' = 0$. Les équations (10) et (11) sont encore valables dans le cas où le seul élément chargé n'est pas un élément d'extrémité. Dans le cas où le seul élément chargé est l'élément E_1, on trouve

$$T_1 = r_1' \frac{V_1''}{b_1}, \quad T_2 = -r_2' T_1, \quad T_3 = -r_3' T_2, \quad \text{etc.} \tag{14}$$

De même dans le cas où le seul élément chargé est l'élément E_n:

$$T_{n-1} = -r_n \frac{V_n'}{b_n}, \quad T_{n-2} = -r_{n-2} T_{n-1}, \quad T_{n-3} = -r_{n-3} T_{n-2}, \quad \text{etc.} \tag{15}$$

Ainsi la détermination des réactions hyperstatiques dans les systèmes considérés est un problème très simple dès que l'on a calculé les coefficients de souplesse et les facteurs de transmission des éléments.

5. Etude des lignes d'influence

A. Lignes d'influence des efforts tranchants aux articulations

L'ordonnée $T_i(\alpha)$ de la ligne d'influence de l'effort tranchant T_i à l'articulation A_i, égale à la valeur de T_i lorsque la charge unité est appliquée dans la section d'abscisse α, est donnée par les expressions suivantes:

1. Lorsque la charge unité est appliquée à l'élément E_i

$$T_i(\alpha) = \frac{1}{b_i} \frac{V_i'(\alpha) + \frac{1}{r_i} V_i''(\alpha)}{\frac{1}{r_i r_i'} - 1}. \tag{16}$$

2. Lorsque la charge unité est appliquée à l'élément E_{i+1}

$$T_i(\alpha) = -\frac{1}{b_{i+1}} \frac{\frac{1}{r'_{i+1}} V'_{i+1}(\alpha) + V''_{i+1}(\alpha)}{\frac{1}{r_{i+1} r'_{i+1}} - 1}. \tag{17}$$

3. Lorsque la charge unité est appliquée à l'élément E_j $(j < i)$

$$T_i(\alpha) = (-1)^{i-j} r'_{j+1} r'_{j+2} \ldots r_i' \, T_j(\alpha). \tag{18}$$

4. Lorsque la charge unité est appliquée à l'élément E_k $(k > i+1)$

$$T_i(\alpha) = (-1)^{k-i-1} r_{i+1} r_{i+2} \dots r_{k-1} T_{k-1}(\alpha). \tag{19}$$

Les relations (18) et (19) montrent qu'il suffit d'étudier les lignes d'influence des efforts tranchants aux articulations dans les deux éléments reliés par l'articulation considérée pour connaître immédiatement, grâce aux facteurs de transmission, ces lignes d'influence sur toute l'étendue du système.

Les expressions précédentes permettent d'établir quelques propriétés des lignes d'influence des efforts tranchants aux articulations.

Dans l'équation (16), $V_i'(\alpha)$ et $V_i''(\alpha)$ sont les ordonnées des lignes d'influence de la flèche en A_{i-1} et A_i de l'élément E_i supposé isolé. D'après le théorème de réciprocité de Maxwell, ces lignes d'influence sont identiques aux déformées de l'élément E_i soumis à une charge unité appliquée soit à l'extrémité A_{i-1}, soit à l'extrémité A_i. Ce sont donc, au signe près les déformées représentées sur la fig. 4. Si la charge unité, sur l'élément E_i, vient à l'articulation A_i, $V_i'(\alpha)$ et $V_i''(\alpha)$ ont pour valeurs respectives b_i et $-c_i$, et la fonction $T_i(\alpha)$ prend la valeur T_i'':

$$T_i'' = \frac{1}{b_i} \frac{b_i - \frac{1}{r_i} c_i}{\frac{1}{r_i r_i'} - 1} = \frac{b_i r_i - c_i}{\frac{b_i}{r_i'} - b_i r_i} = \frac{b_i r_i - c_i}{a_{i+1} + c_i - b_i r_i - b_{i+1} r_{i+1}'},$$

comme on le voit en tenant compte des relations de récurrence (8) entre les facteurs de transmission r_i'.

De même, si la charge unité, sur l'élément E_{i+1}, vient à l'articulation A_i, $V_{i+1}'(\alpha)$ et $V_{i+1}''(\alpha)$ ont pour valeurs respectives $-a_{i+1}$ et b_{i+1}, et la fonction $T_i(\alpha)$ prend la valeur T_i':

$$T_i' = \frac{1}{b_{i+1}} \frac{\frac{1}{r_{i+1}'} a_{i+1} - b_{i+1}}{\frac{1}{r_{i+1} r_{i+1}'} - 1} = \frac{a_{i+1} - b_{i+1} r_{i+1}'}{\frac{b_{i+1}}{r_{i+1}} - b_{i+1} r_{i+1}'} = \frac{a_{i+1} - b_{i+1} r_{i+1}'}{a_{i+1} + c_i - b_i r_i - b_{i+1} r_{i+1}'}.$$

comme on le voit en tenant compte des relations de récurrence (6) entre les facteurs de transmission r_i.

Les deux relations précédentes montrent que

$$T_i' - T_i'' = 1 \tag{20}$$

autrement dit, *la ligne d'influence de T_i subit une discontinuité égale à $+1$ au droit de l'articulation A_i.*

On montrerait de la même façon que la ligne d'influence de T_i est continue au droit des articulations autres que l'articulation A_i.

La fig. 5 donne l'allure de la ligne d'influence de T_i.

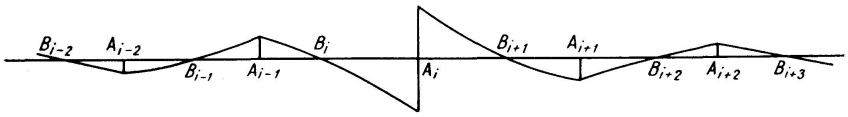

Fig. 5. Ligne d'influence de T_i.

La méthode de recherche des lignes d'influence basée sur le théorème de Maxwell (COURBON, Résistance des matériaux. Chapitre XIII) permet de retrouver facilement ces résultats. Pour trouver la ligne d'influence de T_i, libérons l'articulation A_i. Appliquons une force verticale $+1$ en A_i à la partie droite du système $E_{i+1} E_{i+2} E_{i+3} \ldots$: A_i vient en A_i', et une force verticale -1 à la partie gauche du système $E_i E_{i-1} E_{i-2} \ldots$: A_i vient en A_i'' (fig. 6). Si $v(\alpha)$ est la flèche dans la section d'abscisse α dans le système soumis à ces deux forces verticales, l'articulation A_i étant libérée, nous avons

$$T_i(\alpha) = \frac{v(\alpha)}{\overline{A_i'' A_i'}}. \tag{21}$$

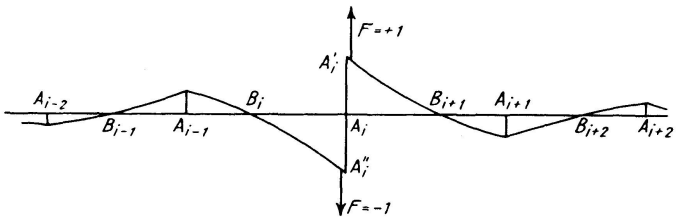

Fig. 6.

Les propriétés de $T_i(\alpha)$ indiquées ci-dessus sont alors évidentes.

Le calcul de $v(\alpha)$ est aisé si l'on remarque que les efforts tranchants aux articulations autres que A_i dans le système avec articulation A_i libérée ont pour valeur

$$T_{i+1} = -r'_{i+1}, \qquad T_{i+2} = +r'_{i+1} r'_{i+2}, \qquad T_{i+3} = -r'_{i+1} r'_{i+2} r'_{i+3}, \ldots \text{ etc. } \ldots$$
$$T_{i-1} = -r_i, \qquad T_{i-2} = +r_i \quad r_{i-1}, \qquad T_{i-3} = -r_i \quad r_{i-1} r_{i-2}, \ldots \text{ etc. } \ldots$$

B. Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section

Cherchons par exemple la ligne d'influence du moment fléchissant M dans la section X de la console $B_i A_i$ de l'élément E_i; la section X est repérée par la distance $X A_i = x$.

Si la charge unité est appliquée en un point P n'appartenant pas au segment $X A_i$ le moment fléchissant dans la section X a pour valeur

$$M(\alpha) = -T_i(\alpha) \cdot x. \tag{22}$$

Si la charge unité est appliquée sur le segment $X A_i$ en P tel que $P A_i = \alpha$, le moment fléchissant dans la section X a pour valeur

$$M(\alpha) = -T_i(\alpha) \cdot x + \alpha - x. \tag{23}$$

Nous pouvons écrire les relations (22) et (23) sous la forme

$$\frac{M(\alpha)}{x} = \begin{cases} -T_i(\alpha), & \text{si } P \text{ n'est pas sur } X A_i, \\ -T_i(\alpha) + \dfrac{\alpha}{x} - 1, & \text{si } P \text{ est sur } X A_i. \end{cases} \tag{24}$$

Cette expression permet de déduire aisément la ligne d'influence de $\frac{M}{x}$ de la ligne d'influence de T_i (fig. 7).

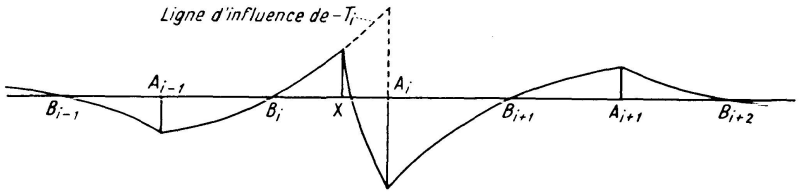

Fig. 7. Ligne d'influence de $\frac{M}{x}$.

On a donc intérêt à utiliser les lignes d'influence de $\frac{M}{x}$ plutôt que celles de M; il suffit de multiplier les résultats obtenus par x.

C. Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section

L'ordonnée $T(\alpha)$ de la ligne d'influence de l'effort tranchant dans la section X de la console $B_i A_i$ de l'élément E_i a pour expression, P désignant le point d'application d'abscisse α de la charge unité

$$T(\alpha) = \begin{cases} T_i(\alpha) & \text{si } P \text{ n'est pas sur } X A_i \\ 1 + T_i(\alpha) & \text{si } P \text{ est sur } X A_i. \end{cases} \tag{25}$$

Le tracé de la ligne d'influence de T à partir de la ligne d'influence de T_i en résulte (fig. 8). La discontinuité de la ligne d'influence de T au droit de la section X est égale à $+1$.

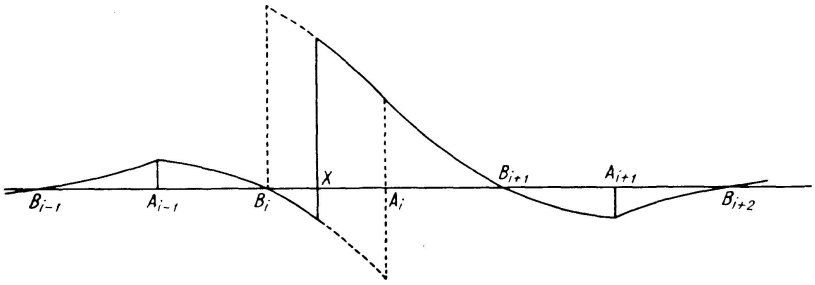

Fig. 8. Ligne d'influence de l'effort tranchant.

Remarque. Calcul de $V_i'(\alpha)$ et de $V_i''(\alpha)$

La position du point d'application P de la charge unité est définie par la distance $\alpha = A_{i-1} P$ si P est sur la console $A_{i-1} B_i$ et par la distance $\alpha = P A_i$ si P est sur la console $B_i A_i$. Avec les notations de la deuxième partie, les formules de Bresse donnent les expressions suivantes des fonctions $V_i'(\alpha)$ et $V_i''(\alpha)$

$$V_i'(\alpha) = \begin{cases} -(l_i' - \alpha) l_i' \displaystyle\int_0^{h_i} \frac{dy}{E J_i} - \int_\alpha^{l_i'} \frac{x(x-\alpha)\,dx}{E I_i} & \text{si } P \text{ est sur } A_{i-1} B_i, \\ (l_i'' - \alpha) l_i' \displaystyle\int_0^{h_i} \frac{dy}{E J_i} & \text{si } P \text{ est sur } B_i A_i, \end{cases} \tag{26}$$

$$V_i''(\alpha) = \begin{cases} (l_i' - \alpha)\, l_i'' \displaystyle\int_0^{h_i} \frac{dy}{E J_i} & \text{si } P \text{ est sur } A_{i-1} B_i, \\ -(l_i'' - \alpha)\, l_i'' \displaystyle\int_0^{h_i} \frac{dy}{E J_i} - \int_\alpha^{l_i''} \frac{x(x-\alpha)\,dx}{E I_i} & \text{si } P \text{ est sur } B_i A_i. \end{cases} \tag{27}$$

Mais en pratique il vaudra mieux, plutôt qu'utiliser ces formules, calculer d'abord les rotations dans l'élément E_i soumis à une charge unité appliquée soit en A_{i-1} soit en A_i, puis déduire les flèches $V_i'(\alpha)$ ou $V_i''(\alpha)$ par intégration numérique des rotations.

6. Lignes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant

Pour étudier les lignes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans la console $B_i A_i$ sous l'action d'une surcharge de densité constante p appliquée à une partie quelconque du système, nous ferons la somme des effets dus aux surcharges appliquées *en dehors de la console* $B_i A_i$ et aux surcharges appliquées *sur la console* $B_i A_i$.

Les surcharges appliquées en dehors de la console $B_i A_i$ correspondent aux valeurs extrêmes de l'effort tranchant T_i (aucune surcharge n'étant, bien entendu, disposée sur la console $B_i A_i$). Les lignes enveloppes correspondantes sont (fig. 9), pour le moment fléchissant deux droites passant par A_i, et pour l'effort tranchant deux droites parallèles à $B_i A_i$.

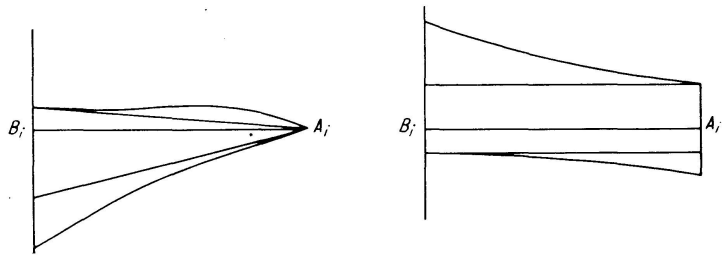

Fig. 9.

La considération des lignes d'influence de M et de T permet de calculer les valeurs extrêmes du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section quelconque X de la console $B_i A_i$ pour les surcharges appliquées sur cette console.

On obtient ainsi les lignes enveloppes représentées sur la fig. 9.

7. Système comportant une infinité d'éléments identiques

Considérons un système illimité à gauche et à droite comportant une infinité d'éléments identiques et symétriques, de sorte que

$$a_i = c_i = a, \quad b_i = b.$$

Les relations (6) et (8) montrent que les facteurs de transmission à gauche et à droite sont tous égaux à la plus petite racine de l'équation:

$$b r^2 - 2 a r + b = 0,$$

soit

$$r = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \tag{28}$$

Les équations (10) et (11) permettent alors le calcul du système lorsqu'un seul élément est chargé.

Dans le cas où le système comporte une infinité d'éléments identiques symétriques $E_1, E_2, E_3 \ldots E_n \ldots$ limité à gauche à un premier élément, les équations (6) (dans lesquelles on suppose $c_0 = a$) permettent de calculer les facteurs de transmission à gauche $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ Le tableau suivant montre que r_n tend très rapidement vers la valeur limite r donnée par l'équation (28):

	$a = 10\,b$	$a = 6\,b$	$a = 3\,b$
r_1	0,050000	0,083333	0,166667
r_2	0,050125	0,083916	0,171429
r_3	0,050126	0,083920	0,171569
r_4	0,050126	0,083920	0,171573
r	0,050126	0,083920	0,171573

Les trois données de ce tableau ($a = 10\,b$, $a = 6\,b$, $a = 3\,b$) correspondent sensiblement au cas de consoles de 30 mètres (travées de 60 m d'ouverture) encastrées sur des piles de hauteurs respectives 10 m, 20 m et 40 m.

Ce tableau montre que les valeurs des facteurs de transmission diffèrent peu de la valeur limite, et que, même dans le cas de piles très flexibles ($a = 3\,b$), ces valeurs sont inférieures aux valeurs des rapports focaux des poutres continues. A mesure que l'on s'éloigne de la zone chargée, les effets des charges s'attenuent plus rapidement que dans les poutres continues.

8. Conclusion

L'emploi de la méthode exposée ci-dessus permet de calculer rapidement les ponts à poutres consoles réunies par des articulations. La méthode de calcul est assez voisine de celle des poutres continues, mais en réalité le calcul est plus simple, car les ouvrages envisagés sont isostatiques sous l'effet de la charge permanente, les efforts tranchants au droit des articulations étant alors tous nuls par construction. Enfin ces ouvrages sont pratiquement insensibles aux variations linéaires dues à la température ou au retrait.

Les ponts à poutres consoles réunies par des articulations présentent des avantages considérables parce qu'ils sont économiques et particulièrement bien adaptés à l'emploi du béton précontraint.

En ce qui concerne l'économie, remarquons que le moment fléchissant moyen dans une travée indépendante de portée l, soumise à une charge uniforme de densité p est égal à $\frac{p\,l^2}{12}$, tandis que le moment fléchissant moyen dans une travée d'ouverture l constituée par deux consoles articulées au milieu de la portée est, dans les mêmes conditions, égal en valeur absolue à $\frac{p\,l^2}{24}$, soit la moitié de la valeur précédente. L'avantage réel est encore plus grand, car dans le cas des consoles, la charge permanente décroît lorsqu'on s'éloigne des appuis. Par contre, il est nécéssaire de prévoir des piles pouvant résister aux moments fléchissants qui prennent naissance dans les piles sous l'action des charges dissymétriques; les appuis trop grêles doivent être évités. Ces ouvrages permettent donc de franchir des portées très nettement plus grandes que les ponts à travées indépendantes, avec une épaisseur de tablier qui peut être très réduite au voisinage du milieu de la travée; c'est là un avantage lorsqu'il faut respecter un gabarit de navigation.

L'utilisation du béton précontraint est particulièrement indiquée pour la construction des ponts à poutres consoles réunies par des articulations. En effet, compte tenu de la charge permanente, les moments fléchissants ont toujours le même signe; les armatures disposées à la partie supérieure des consoles ont un tracé sensiblement rectiligne; la mise en tension des armatures est complètement libre, aucun appui ne s'opposant aux déformations du béton pendant la mise en précontrainte. Enfin ces ouvrages peuvent être construits en encorbellement, sans utilisation de cintres; c'est là un avantage considérable dans les cas où la construction d'un cintre est chère (rivières profondes, viaducs sur hautes piles) ou dangereuse (rivières à courant rapides et crues soudaines) ou encore gênerait la navigation.

Résumé

La méthode de calcul des ponts à poutres consoles réunies par des articulations est fondée sur l'existence d'une relation linéaire entre les efforts tranchants au droit de trois articulations successives. Cette relation permet de définir des facteurs de transmission dont la considération facilite le calcul, car il n'est plus nécessaire de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Les ponts à poutres consoles réunies par des articulations sont économiques et se prêtent bien à l'utilisation du béton précontraint. Dans ce cas ils peuvent être construits en encorbellement, sans cintres.

Zusammenfassung

Die Berechnungsmethode für durch Gelenke verbundene Konsolenbalkenbrücken beruht auf der Tatsache, daß die Schnittkräfte in drei aufeinanderfolgenden Gelenken in einem linearen Verhältnis zueinander stehen. Dieses

Verhältnis gestattet uns, Übertragungsfaktoren aufzustellen, deren Berücksichtigung die Rechnung erleichtert, da es dadurch nicht mehr nötig ist, lineare Gleichungssysteme aufzulösen.

Die durch Gelenke verbundenen Konsolenbalkenbrücken sind wirtschaftlich und eignen sich gut für vorgespannte Konstruktionen. In diesem Fall können sie ohne Lehrgerüste frei vorgebaut werden.

Summary

The method of calculating bridges with overhung girders connected by joints is based on the existence of a linear relationship between the shearing stresses at right angles to three successive joints. This relationship makes it possible to define transfer factors which facilitate the calculation, since it is no longer necessary to solve series of linear equations.

Bridges with overhung girders connected by joints are low-cost constructions which are particularly well-adapted to the application of pre-stressed concrete. In that case they may be built as cantilevers without employing centring.