Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 18 (1958)

Artikel: Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinqième supérieur: étude complémentaire

Autor: Stüssi, F. / Dubas, Charles / Dubas, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16514

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur. Etude complémentaire

Biegungsbeulung der im oberen Fünftel versteiften Stegbleche
Weitere Untersuchung

The Buckling of the Webs of Sagging Beams Having Stiffeners in the Top Fifth of the Web. Further Study

F. Stüssi, Ing. Dr sc. techn., Prof. à l'E. P. F., Zurich, Président de l'AIPC, et
Charles et Pierre Dubas, Ings Drs sc. techn., Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, Bulle et Vevey

Etat du problème, déjà traité en 1957, et but de la nouvelle étude

L'an passé, dans le dix-septième volume des «Mémoires», nous avions repris le problème du voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur au cinquième supérieur. Tout en continuant d'utiliser les méthodes de la statique appliquée, nous avions tenu compte d'une manière plus exacte de l'effort concentré du raidisseur et montré que la précision obtenue était excellente. Nous avions donné en outre une série de résultats.

Nous allons maintenant traiter un exemple numérique complet (fig. 1), en utilisant le procédé qui s'est avéré le plus avantageux et le plus rapide. Nous donnerons ensuite, sous forme de tableaux et de graphiques, tous les résultats obtenus.

Rappelons tout d'abord, pour la commodité du lecteur, l'équation différentielle du voilement *en pleine tôle*, qui s'écrit:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega k \frac{\pi^2}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Au droit du raidisseur, cette équation est à compléter. Elle devient:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\omega_r k \frac{\pi^2}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{b}{c}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega_r k \delta \frac{\pi^2}{b c}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Rappelons la signification des diverses lettres utilisées dans ces deux équations différentielles (1) et (2). La lettre w désigne la déviation latérale de la tôle lors

du voilement, en un point quelconque d'abscisse x et d'ordonnée y (fig. 1). La lettre ω exprime la variation des contraintes $\sigma_x = \omega\,\sigma_{x\,max}$ sur la hauteur b de l'âme (fig. 1), l'indice r du ω_r de (2) se rapportant à la contrainte longitudinale du raidisseur. A partir de la hauteur b de l'âme (fig. 1) et de son épaisseur h, les abréviations k, γ et δ sont définies comme suit[1]):

$$\boxed{k = \sigma_{x_{max}} \frac{h\,b^2}{\pi^2 D}} \quad (3) \qquad \boxed{\gamma = \frac{E\,J_r}{D\,b}} \quad (4) \qquad \boxed{\delta = \frac{F_r}{b\,h}} \quad (5)$$

où $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$, J_r et F_r désignant respectivement le moment d'inertie et la section du raidisseur. Comme d'habitude E est le module d'élasticité du matériau et ν, sa contraction latérale.

Si les efforts de bout sont répartis linéairement (fig. 1), la déformation, parallèlement à l'axe des x, est une sinusoïde; dès lors il suffit de considérer les w sur la verticale passant par le milieu de l'âme. En désignant ces w par η, l'équation différentielle du voilement *en pleine tôle* (1) devient:

$$\boxed{\eta'''' - \frac{2\pi^2}{a^2}\eta'' + \frac{\pi^4}{a^4}\eta = \omega\,k\frac{\pi^4}{a^2 b^2}\eta} \quad (6)$$

Au droit du raidisseur, il vient, pour une largeur d'appui c du raidisseur (fig. 1):

$$\boxed{\eta'''' - \frac{2\pi^2}{a^2}\eta'' + \frac{\pi^4}{a^4}\eta = \omega_r\,k\frac{\pi^4}{a^2 b^2}\eta - \frac{1}{c}\left(\gamma\,b\frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r\,k\,\delta\frac{\pi^4}{a^2 b}\right)\eta} \quad (7)$$

Grâce aux méthodes de statique appliquée, l'équation différentielle du voilement *en pleine tôle* (6) se transforme en une série de relations numériques que l'on écrira aux différents points considérés sur la verticale par le milieu de l'âme (fig. 1). Après avoir introduit les trois simplifications d'écriture suivantes:

$$\boxed{A = \frac{\pi^2}{a^2}\frac{\Delta y^2}{6}} \quad (8) \qquad \boxed{B = \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{a^4}\frac{\Delta y^4}{144}} \quad (9)$$

$$\boxed{C = B\frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2}\frac{\Delta y^4}{144}} \quad (10)$$

---

[1]) En réalité on ne définit pas k selon (3), mais on écrit que $\sigma_{x_{max}} = k\,\sigma_e$, où σ_e est une contrainte fictive, dite «eulérienne», qui vaut $\frac{\pi^2 D}{h\,b^2}$.

on aboutit finalement, après divers calculs et considérations, à la relation:

$$\boxed{\begin{aligned}&(1-A+B)\,\eta_{m-2}-(4+8A-20B)\,\eta_{m-1}+(6+18A+102B)\,\eta_m\\&\quad-(4+8A-20B)\,\eta_{m+1}+(1-A+B)\,\eta_{m+2}=kC\,(\omega_{m-2}\,\eta_{m-2}\\&\quad+20\,\omega_{m-1}\,\eta_{m-1}+102\,\omega_m\,\eta_m+20\,\omega_{m+1}\,\eta_{m+1}+\omega_{m+2}\,\eta_{m+2})\end{aligned}} \tag{11}$$

Cette relation numérique se transforme sur le bord, où $\eta_{bord}=0$ et où $\eta_{-1}=-\eta_1$, pour devenir:

$$\boxed{\begin{aligned}&(5+19A+101B)\,\eta_1-(4+8A-20B)\,\eta_2+(1-A+B)\,\eta_3=\\&\qquad=kC\,(101\,\omega_1\,\eta_1+20\,\omega_2\,\eta_2+\omega_3\,\eta_3)\end{aligned}} \tag{12}$$

Compte tenu de l'abréviation:

$$\boxed{R=\frac{\Delta\,y^3}{6}\left(\gamma\,b\,\frac{\pi^4}{a^4}-\omega_r\,k\,\delta\,\frac{\pi^4}{a^2\,b}\right)} \tag{13}$$

l'équation différentielle (7) est à son tour remplacée par la relation numérique suivante au point $r-1$ *précédant le raidisseur:*

$$\boxed{\begin{aligned}&(1-A+B)\,\eta_{r-3}-(4+8A-20B)\,\eta_{r-2}+(6+18A+102B)\,\eta_{r-1}\\&\quad-(4+8A-20B)\,\eta_r+(1-A+B)\,\eta_{r+1}=kC\,(\omega_{r-3}\,\eta_{r-3}\\&\quad+20\,\omega_{r-2}\,\eta_{r-2}+102\,\omega_{r-1}\,\eta_{r-1}+20\,\omega_r\,\eta_r+\omega_{r+1}\,\eta_{r+1})-R\,\eta_r\end{aligned}} \tag{14}$$

Au point r *où se trouve le raidisseur,* on trouve également:

$$\boxed{\begin{aligned}&(1-A+B)\,\eta_{r-2}-(4+8A-20B)\,\eta_{r-1}+(6+18A+102B)\,\eta_r\\&\quad-(4+8A-20B)\,\eta_{r+1}+(1-A+B)\,\eta_{r+2}=kC\,(\omega_{r-2}\,\eta_{r-2}\\&\quad+20\,\omega_{r-1}\,\eta_{r-1}+102\,\omega_r\,\eta_r+20\,\omega_{r+1}\,\eta_{r+1}+\omega_{r+2}\,\eta_{r+2})-4\,R\,\eta_r\end{aligned}} \tag{15}$$

Au point $r+1$ *suivant le raidisseur,* on obtient enfin:

$$\boxed{\begin{aligned}&(1-A+B)\,\eta_{r-1}-(4+8A-20B)\,\eta_r+(6+18A+102B)\,\eta_{r+1}\\&\quad-(4+8A-20B)\,\eta_{r+2}+(1-A+B)\,\eta_{r+3}=kC\,(\omega_{r-1}\,\eta_{r-1}\\&\quad+20\,\omega_r\,\eta_r+102\,\omega_{r+1}\,\eta_{r+1}+20\,\omega_{r+2}\,\eta_{r+2}+\omega_{r+3}\,\eta_{r+3})-R\,\eta_r\end{aligned}} \tag{16}$$

Les relations numériques précédentes (11), (12), (14), (15) et (16) sont précisément celles qui vont nous permettre de traiter tout à l'heure un exemple de calcul complet d'une âme de poutre fléchie, avec raidisseur au cinquième supérieur. Nous devrons auparavant déterminer les valeurs auxiliaires de (8), (9), (10) et (13). Le lecteur comprendra de la sorte comment les résultats donnés à la fin de la présente étude ont été obtenus.

Exemple numérique complet

Nous allons maintenant traiter de manière complète un exemple numérique de panneau d'une poutre à âme pleine avec raidisseur horizontal au cinquième supérieur. Nous ne considérons que le cas de la flexion pure et choisissons un panneau dont la longueur est le double de la hauteur (fig. 1). Nous négligeons l'effet d'encastrement de l'âme dans les semelles, les montants verticaux et le raidisseur horizontal[2]).

Quant au raidisseur, nous admettons tout d'abord qu'il n'est pas soumis à un effort normal, comme s'il était fixé sur la tôle par des boulons avec trous ovalisés dans le sens longitudinal. La section soumise à l'effort normal est donc nulle et δ, défini par (5), vaut zéro. Nous avons déjà montré l'an dernier et montrerons de nouveau tout à l'heure comment on passe très aisément du cas d'un raidisseur sans effort normal au cas d'un raidisseur avec effort normal.

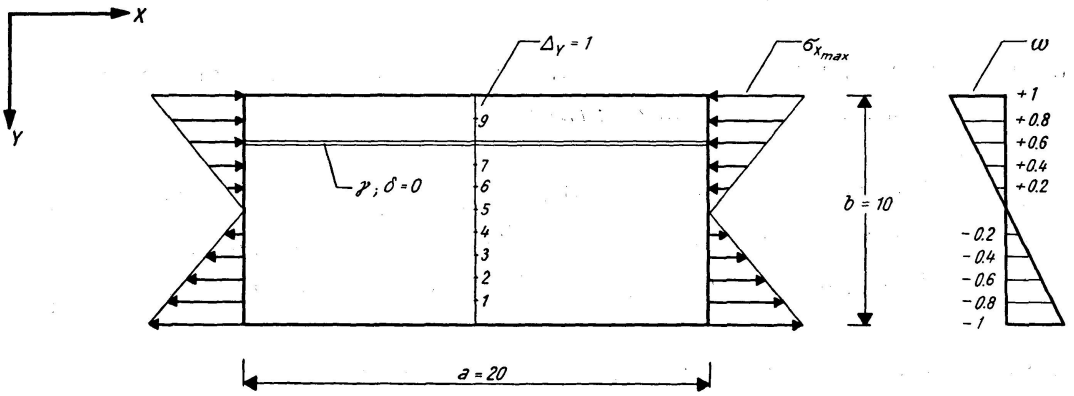

Fig. 1.

Nous voulons utiliser la méthode de calcul la plus avantageuse et la plus rapide. Pour cela, nous choisirons le coefficient de voilement k défini par la relation (3) et nous chercherons la valeur correspondante de la rigidité relative γ du raidisseur, définie par la relation (4). Nous allons traiter le cas où ce coefficient de voilement est égal à 120 ($k = 120$), c'est-à-dire une valeur très proche de son maximum 129,4, déterminé en 1948 déjà et calculé à nouveau l'an dernier de manière plus complète et plus précise.

---

[2]) Cet encastrement, qui dépend de la résistance à la torsion des semelles, montants verticaux et raidisseur horizontal, peut être pris en compte dans le calcul. On le considère d'habitude comme une marge de sécurité supplémentaire.

On se reportera pour plus de détails aux publications suivantes de F. W. Bornscheuer: «Beitrag zur Berechnung ebener, gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten, versteift durch eine Längssteife», Dissertation, Darmstadt 1943/46, et «Mindeststeifigkeiten von Plattenaussteifungen bei berücksichtigter Verdrehsteifigkeit», Sonderdruck aus M.A.N.-Forschungsheft 1952, 1. Halbjahr.

Nous passons maintenant dans le premier membre le second membre[3]) des relations numériques (11), (12), (14), (15) et (16). Nous pouvons alors écrire sans difficulté, aux différents points, l'une des relations numériques en question, suivant que le point considéré se trouve au bord, en pleine tôle, au droit du raidisseur, au point précédant ou suivant le raidisseur. Il n'y a pas d'équations sur les bords, puisque la déviation latérale, valant zéro, est connue.

Pour limiter l'ampleur du travail tout en conservant une précision suffisante, nous avons choisi dix intervalles seulement (fig. 1); l'effort concentré du raidisseur constituant dans le calcul un point singulier, se trouve dès lors juste à deux intervalles du bord supérieur de l'âme. Les neuf points intermédiaires (fig. 1) sont numérotés de manière que les relations numériques (14), (15) et (16) influencées par le raidisseur, c'est-à-dire celles qui contiennent le facteur R défini par (13), soient écrites en dernier lieu. La résolution du système d'équations est ainsi notablement plus simple, la valeur inconnue de γ contenue dans le facteur R n'intervenant qu'en fin du calcul. Nous l'avions d'ailleurs fait remarquer en 1957.

Nous allons maintenant mettre toutes les relations obtenues aux divers points 1 à 9 (fig. 1) sous forme de tableau. Cette manière de procéder est classique; elle simplifie le travail, évite bien des erreurs, facilite le contrôle et requiert beaucoup moins l'attention du calculateur. Nous donnons tout d'abord le tableau n⁰ 1, dans lequel nous avons inscrit, sans leur attribuer de valeur numérique, les abréviations k, γ, A, B, C et R définies par (3), (4), (8), (9), (10), (13), ainsi que le coefficient de répartition ω représentant la variation de la contrainte $\sigma_x = \omega\, \sigma_{x\,max}$, suivant la figure 1.

Puisque le second membre de (11), (12), (14), (15) et (16) a été passé dans le premier membre, le second membre de toutes les équations du tableau n⁰ 1 est évidemment nul. En outre on remarquera que le tableau n⁰ 1 contient neuf équations pour les huit déviations η inconnues et la rigidité relative γ du raidisseur, également inconnue. On se rappellera à ce sujet qu'une des déviations η doit être choisie, toute une série de déformations affines de la tôle étant théoriquement possibles au moment du voilement (phénomène d'instabilité).

Pour passer du tableau n⁰ 1 au tableau n⁰ 2, qui contiendra les valeurs numériques des coefficients des déviations inconnues η et de la rigidité relative γ du raidisseur, également inconnue, nous devons tout d'abord calculer les valeurs de k, γ, A, B, C et R définis par (3), (4), (8), (9), (10) et (13). Pour cela nous notons tout d'abord les valeurs de π, π^2 et π^4, soit 3,141 592 653 pour π, 9,869 604 397 pour π^2 et 97,409 090 953 pour π^4.

---

[3]) Jusqu'ici nous avons toujours écrit le premier membre des équations du voilement comme s'il s'agissait des équations de la plaque fléchie. Dans ce cas, le second membre représente véritablement une charge, due aux efforts élastiques de déviation au moment du cloquage. On sait par ailleurs que l'on peut admettre cette charge et la corriger par approximations successives (Méthode d'Engesser-Vianello).

Tableau n⁰ 1. Equations nécessaires à la détermination de la valeur inconnue du coefficient de rigidité relative γ du raidisseur (et des déviations η de l'âme), pour les dix intervalles considérés

Pt.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×
1	$5+19A+101B$ $-101\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$						
2	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$					
3	$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$				
4		$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$			
5			$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$		
6				$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$1-A+B$ $-\omega kC$	
7					$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC-R$	$1-A+B$ $-\omega kC$
8						$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$	$6+18A+102B$ $-102\omega kC-4R$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC$
9							$1-A+B$ $-\omega kC$	$-(4+8A-20B)$ $-20\omega kC-R$	$5+19A+101B$ $-101\omega kC$
–	$\omega=-0{,}8$	$\omega=-0{,}6$	$\omega=-0{,}4$	$\omega=-0{,}2$	$\omega=0$	$\omega=+0{,}2$	$\omega=+0{,}4$	$\omega=+0{,}6$	$\omega=+0{,}8$

Ensuite, on obtient d'après (8), avec $\Delta y = 1$ et $a = 20$ (fig. 1):

$$A = \frac{\pi^2}{a^2}\frac{\Delta y^2}{6} = \frac{3{,}141\,592\,653^2}{6 \times 20^2} = 0{,}004\,112\,335\,165.$$

De même, on obtient d'après (9):

$$B = \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{a^4}\frac{\Delta y^4}{144} = \frac{0{,}004\,112\,335\,165^2}{4} =$$

$$= \frac{97{,}409\,090\,953}{144 \times 20^4} = 0{,}000\,004\,227\,825.$$

Quant à C, il vient selon (10), avec $b = 10$ (fig. 1):

$$C = B\frac{a^2}{b^2} = \frac{\pi^4}{a^2 b^2}\frac{\Delta y^4}{144} = 0{,}000\,004\,227\,825 \times 4 =$$

$$= \frac{97{,}409\,090\,953}{114 \times 10^2 \times 20^2} = 0{,}000\,016\,911\,301.$$

Enfin, la relation (13) donne, pour $\delta = 0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur):

$$R = \frac{\Delta y^3}{6}\gamma b\frac{\pi^4}{a^4} = \frac{10}{6}\frac{97{,}409\,090\,953}{20^4}\gamma = 0{,}001\,014\,678\,033\,\gamma.$$

En observant le tableau n° 1, nous constatons que nous avons à déterminer les quatre coefficients suivants:

$$5 + 19A + 101B - 101\,\omega k C, \qquad 5 + 18A + 102B - 102\,\omega k C,$$
$$-(4 + 8A - 20B) - 20\,\omega k C, \qquad 1 - A + B - \omega k C,$$

Nous obtenons alors, avec $k = 120$ et les valeurs précédentes de A, B et C:

$$\begin{aligned}
5 + 19A + 101B - 101\,\omega k C &= 5 + 19 \times 0{,}004\,112\,335 + 101 \times 0{,}000\,004\,227\,8 - \\
&\quad 101 \times 120 \times 0{,}000\,016\,911\,301\,\omega \\
&= 5{,}078\,561\,39 - 0{,}204\,964\,97\,\omega, \\
6 + 18A + 102B - 102\,\omega k C &= 6 + 18 \times 0{,}004\,112\,335 + 102 \times 0{,}000\,004\,227\,8 - \\
&\quad 102 \times 120 \times 0{,}000\,016\,911\,301\,\omega \\
&= 6{,}074\,453\,27 - 0{,}206\,994\,32\,\omega, \\
-(4 + 8A - 20B) - 20\,\omega k C &= -(4 + 8 \times 0{,}004\,112\,335 - 20 \times 0{,}000\,004\,227\,8) - \\
&\quad 20 \times 120 \times 0{,}000\,016\,911\,301\,\omega \\
&= -4{,}032\,814\,12 - 0{,}040\,587\,12\,\omega, \\
1 - A + B - \omega k C &= 1 - 0{,}004\,112\,335 + 0{,}000\,004\,228 - \\
&\quad 120 \times 0{,}000\,016\,911\,301\,\omega \\
&= 0{,}995\,891\,83 - 0{,}002\,029\,36\,\omega.
\end{aligned}$$

Avec les chiffres ci-dessus et en tenant compte des valeurs de ω inscrites au bas du tableau n⁰ 1, on peut remplir très rapidement les diverses diagonales du tableau n⁰ 2. On voudra bien remarquer que nous avons multiplié tous les coefficients par 1000, pour simplifier l'écriture. On remarquera d'autre part que le tableau n⁰ 2 est entièrement dissymétrique par rapport à la diagonale principale, contrairement aux problèmes hyperstatiques habituels. On voit immédiatement, d'après le tableau n⁰ 1, que cette dissymétrie est due au coefficient ω de répartition des contraintes, différent si l'on considère les coefficients des inconnues η situés de part et d'autre de la diagonale principale.

Pour résoudre le système d'équations représentées[4]) au tableau n⁰ 2, nous procéderons de manière classique, par éliminations successives[5]) des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ (algorithme de Gauss). Ces éliminations successives sont représentées au tableau n⁰ 3. En tête de ce tableau nous écrivons tout d'abord les inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$, pour ne pas les répéter à chaque élimination. Nous reportons ensuite, sans la changer, l'équation n⁰ 1 du tableau n⁰ 2. Bien qu'il s'agisse en fait d'une simple équation de départ, nous la considérerons comme un premier stade d'élimination et l'appellerons dorénavant équation n⁰ 11.

Dans un deuxième stade d'élimination, nous allons faire disparaître l'inconnue η_1. Pour cela nous écrivons en premier lieu l'équation n⁰ 2 du tableau n⁰ 2, sans la changer. Juste au-dessous, nous voulons placer l'équation n⁰ 11 en la multipliant de telle sorte que le coefficient de η_1 soit égal et de signe contraire à celui de l'équation n⁰ 2 se trouvant juste au-dessus. Ce facteur de multiplication μ de l'équation n⁰ 11 sera donc évidemment égal au rapport du coefficient du η_1 de l'équation n⁰ 2 par celui du η_1 de l'équation n⁰ 11, précédé du signe négatif. En additionnant l'équation n⁰ 2 et l'équation n⁰ 11 multipliée par le facteur μ, que nous appellerons équation n⁰ 11^1, on obtient une nouvelle équation n⁰ 12, dans laquelle le coefficient de η_1, étant nul, fait disparaître cette inconnue.

Dans le troisième stade d'élimination, il s'agit de se débarrasser de η_2. Dans ce but nous écrivons tout d'abord l'équation n⁰ 3 du tableau n⁰ 2. Nous voulons y ajouter l'équation n⁰ 11 en la multipliant de manière à faire disparaître η_1. Pour cela on procède naturellement comme au stade d'élimination précédent: le facteur de multiplication μ de l'équation n⁰ 11 est évidemment égal au rapport du coefficient du η_1 de l'équation n⁰ 3 par celui du η_1 de l'équation n⁰ 11, avec signe négatif. Cette nouvelle équation est alors appelée équation n⁰ 11^2. Ceci fait, nous voulons encore ajouter l'équation n⁰ 12, qui ne

---

[4]) Les chiffres donnant les valeurs de η au bas du tableau n⁰ 2 ont été inscrits ultérieurement.

[5]) Le schéma d'élimination que nous utiliserons est celui de la page 85 de l'ouvrage suivant: Fritz Stüssi, «Vorlesungen über Baustatik», zweiter Band (Baustatik II), Verlag Birkhäuser, Basel/Stuttgart 1954, Tabelle 10, Abgekürzter Gaußscher Algorithmus. Un schéma quelque peu différent se trouve dans Richard Guldan, «Rahmentragwerke und Durchlaufträger», Springer Verlag, Wien 1949, S. 356/357.

Tableau n⁰ 2. Equations numériques nécessaires à la détermination de la valeur inconnue du coefficient de rigidité relative γ du raidisseur (et des déviations η de l'âme), avec les dix intervalles considérés, pour $a/b = 2$, $k = 120$ et $\delta = 0$

Pt.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×
1	+5242,5334	−4008,4618	+ 996,7036						
2	−4000,3444	+6198,6499	−4016,5793	+ 996,2978					
3	+ 997,5154	−4008,4618	+6157,2510	−4024,6967	+ 995,8919				
4		+ 997,1095	−4016,5793	+6115,8521	−4032,8141	+ 995,4860			
5			+ 996,7036	−4024,6967	+6074,4533	−4040,9315	+ 995,0801		
6				+ 996,2978	−4032,8141	+6033,0544	−4049,0490	+ 994,6743	
7					+ 995,8919	−4040,9315	+5991,6555	−4057,1664+1,01467803γ	+ 994,2684
8						+ 995,4860	−4049,0490	+5950,2567+4,05871213γ	−4065,2838
9							+ 995,0801	−4057,1664+1,01467803γ	+4914,5894

η	0,1015197	0,2513105	0,4767194	0,7659452	1,0578627	1,2516032	1,2453814	1 avec $\gamma = 36,20634$	0,5659017

contient plus η_1, en la multipliant de telle manière que η_2 disparaisse également. Pour cela il faut évidemment que la somme des coefficients du η_2 des équations déjà inscrites n⁰ 3 et 11^2, ainsi que de la nouvelle équation 12 convenablement multipliée, appelée équation 12^1, soit égale à zéro. Le facteur de multiplication μ sera dès lors égal, pour passer de l'équation n⁰ 12 à l'équation n⁰ 12^1, à la somme des coefficients du η_2 des équations n⁰ 3 et 11^2, divisée par le coefficient du η_2 de l'équation 12, avec signe négatif. Le tableau n⁰ 3, stade d'élimination n⁰ 3, montre clairement comment les calculs numériques sont disposés et effectués, notamment pour les facteurs de multiplication μ des équations 11^2 et 12^1, dont le calcul détaillé figure, comme au stade d'élimination n⁰ 2, à la fin des opérations. On voit également qu'en effectuant l'addition des équations n⁰ 3, 11^2 et 12^1, on vérifie que les facteurs de multiplication choisis pour passer des équations n⁰ 11 à 11^2 et n⁰ 12 à 12^1 ont été convenablement choisis, la somme des coefficients des η_1 comme des η_2 devant être nulle pour que l'équation obtenue n⁰ 13 soit correcte.

En procédant de la même manière qu'au troisième stade d'élimination, on se débarrasse successivement de η_3, η_4 et η_5. Comme d'habitude en pareil cas, on ajoute une nouvelle colonne dans laquelle figure la somme de tous les coefficients des inconnues de chaque équation, que l'on considère comme s'il s'agissait d'un coefficient ordinaire. A la fin de chaque stade d'élimination, on vérifie immédiatement que la somme des coefficients obtenus est bien égale au chiffre figurant dans la dernière colonne. Il s'agit là d'un contrôle simple et rapide, qui permet à chaque stade d'élimination de s'assurer que ce stade est sans erreur[6]). Si d'éventuelles erreurs n'étaient pas décelées à ce moment, les stades d'élimination suivants seraient faux et le travail serait à recommencer, d'où une perte de temps beaucoup plus importante que pour la colonne complémentaire.

Au moment d'éliminer η_6 surgit une petite difficulté d'écriture, à cause de la rigidité γ du raidisseur, qui affecte l'inconnue η_8 et qu'il faut conserver séparément. On voit au tableau n⁰ 3 comment on peut disposer les calculs, effectués avec la même facilité que si γ n'existait pas. L'élimination de η_7 se

---

[6]) La preuve par la somme des coefficients des équations n'est juste qu'au dernier chiffre près. On le voit facilement en vérifiant les équations n⁰ 17 et 18 des tableaux récapitulatifs n⁰ 5 et 6. Quant à l'équation n⁰ 19 du tableau récapitulatif n⁰ 6, on devrait aboutir à la relation banale $0 = 0$. La différence est donc dans ce cas de deux unités au dernier chiffre, alors qu'elle atteint seulement une unité aux équations susmentionnées n⁰ 17 et 18. Elle pourrait être encore plus grande, si l'on avait affaire à un système contenant davantage d'équations.

Il est facile de se rendre compte que la différence de la preuve par la somme des coefficients des équations provient de ce que les chiffres à additionner sont tout d'abord arrondis. L'exemple suivant le montre clairement: si l'on considère l'égalité $1{,}1 + 1{,}2 + 1{,}3 = 3{,}6$ et que l'on multiplie les deux membres par 5, on trouve sans arrondir $5{,}5 + 6{,}0 + 6{,}5 = 18{,}0$. En arrondissant avant addition, on trouve par contre $6 + 6 + 7 = 19$ et non 18.

Tableau n° 3. Elimination successive des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \cdots$

Eq.	μ	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	Σ
			1. Equation de départ				
1 ou 11	1	+5242,5334	-4008,4618	+996,7036	—	—	+2230,7752
			2. Elimination de η_1				
2	1	-4000,3444	+6198,6499	-4016,5793	+996,2978	—	- 821,9760
11^1	$\mu_1 = +0{,}76305559$	+4000,3444	-3058,6792	+ 760,5403	—	—	+1702,2055
12	—	—	+3139,9707	-3256,0390	+996,2978	—	+ 880,2295

$$\mu_1 = -\frac{-4000{,}3444}{5242{,}5334} = +0{,}76305559$$

			3. Elimination de η_2				
3	1	+997,5154	-4008,4618	+6157,2510	-4024,6967	+995,8919	+117,4998
11^2	$\mu_1 = -0{,}19027354$	-997,5154	+ 762,7042	- 189,6463	—	—	-424,4575
12^1	$\mu_2 = +1{,}03369041$	—	+3245,7576	-3365,7363	+1029,8635	—	+909,8848
13	—	—	—	+2601,8684	-2994,8332	+995,8919	+602,9271

$$\mu_1 = -\frac{997{,}5154}{5242{,}5334} = -0{,}19027354 \qquad \mu_2 = -\frac{-4008{,}4618 + 762{,}7042}{3139{,}9707} = +1{,}03369041$$

Tableau n° 3 (suite)

Eq.	μ	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	Σ

4. Elimination de η_3

4	1	+997,1095	-4016,5793	+6115,8521	-4032,8141	+995,4860	—	—	+ 59,0542
12^2	$\mu_1 = -0{,}31755376$	+997,1095	+1033,9674	- 316,3781	—	—	—	—	-279,5202
13^1	$\mu_2 = +1{,}14633465$	—	+2982,6119	-3433,0811	+1141,6254	—	—	—	+691,1562
14	—	—	—	+2366,3929	-2891,1887	+995,4860	—	—	+470,6902

$$\mu_1 = -\frac{997{,}1095}{3139{,}9707} = -0{,}31755376 \qquad \mu_2 = -\frac{-4016{,}5793 + 1033{,}9674}{2601{,}8684} = +1{,}14633465$$

5. Elimination de η_4

5	1	—	+996,7036	-4024,6967	+6074,4533	-4040,9315	+995,0801	—	+ 0,6088
13^2	$\mu_1 = -0{,}38307226$	—	-996,7036	+1147,2375	- 381,4986	—	—	—	-230,9646
14^1	$\mu_2 = +1{,}21596848$	—	—	+2877,4592	-3515,5943	+1210,4796	—	—	+572,3444
15	—	—	—	—	+2177,3604	-2830,4519	+995,0801	—	+341,9886

$$\mu_1 = -\frac{996{,}7036}{2601{,}8684} = -0{,}38307226 \qquad \mu_2 = -\frac{-4024{,}6967 + 1147{,}2375}{2366{,}3929} = +1{,}21596848$$

Tableau n⁰ 3 (suite)

Eq.	μ	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	Σ
				6. Elimination de η_5					
6	1	—	—	+996,2978	-4032,8141	+6033,0544	-4049,0490	+994,6743	- 57,8366
14^2	$\mu_1 = -0{,}42101960$	—	—	-996,2978	+1217,2471	- 419,1191	—	—	-198,1698
15^1	$\mu_2 = +1{,}29311023$	—	—	—	+2815,5670	-3660,0863	+1286,7483	—	+442,2290
16	—	—	—	—	—	+1953,8490	-2762,3007	+994,6743	+186,2226

$$\mu_1 = -\frac{996{,}2978}{2366{,}3929} = -0{,}42101960 \qquad \mu_2 = -\frac{-4032{,}8141 + 1217{,}2471}{2177{,}3604} = +1{,}29311023$$

Eq.	μ	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×	Σ
				7. Elimination de η_6			
7	1	+995,8919	-4040,9315	+5991,6555	$-4057{,}1664+1{,}01467803\,\gamma$	+994,2684	$-116{,}2821+1{,}01467803\,\gamma$
15^2	$\mu_1 = -0{,}45738496$	-995,8919	+1294,6061	- 455,1347	—	—	-156,4204
16^1	$\mu_2 = +1{,}40559757$	—	+2746,3254	-3882,6832	+1398,1118	—	+261,7540
17	—	—	—	+1653,8376	$-2659{,}0546+1{,}01467803\,\gamma$	+994,2684	$-10{,}9485+1{,}01467803\,\gamma$

$$\mu_1 = -\frac{995{,}8919}{2177{,}3604} = -0{,}45738496 \qquad \mu_2 = -\frac{-4040{,}9315 + 1294{,}6061}{1953{,}8490} = +1{,}40559757$$

Tableau n⁰ 3 (suite)

Eq.	μ	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×	Σ

8. Elimination de η_7

8	1	—	+995,4860	-4049,0490	+5950,2567+4,058712 13 γ	-4065,2838	-1168,5901+4,058712 13 γ
16^2	μ_1 = -0,509499 97	—	-995,4680	+1407,3921	- 506,7865	—	- 94,8804
17^1	μ_2 = +1,597289 18	—	—	+2641,6569	-4247,2791+1,620734 24 γ	+1588,1342	- 17,4879+1,620734 24 γ
18	—	—	—	—	+1196,1911+5,679446 37 γ	-2477,1496	-1280,9584+5,679446 37 γ

$$\mu_1 = -\frac{995{,}4860}{1953{,}8490} = -0{,}509499\,97 \qquad \mu_2 = -\frac{-4049{,}0490 + 1407{,}3921}{1653{,}8376} = +1{,}597289\,18$$

9. Elimination de η_8

9	1	—	—	+995,0801	-4057,1664+1,014678 03 γ	+4914,5894	+1852,5031+1,014678 03 γ
17^2	μ_1 = -0,601679 45	—	—	-995,0801	+1599,8985-0,610510 92 γ	- 598,2309	+ 6,5875-0,610510 92 γ

$$\mu_1 = -\frac{995{,}0801}{1653{,}8376} = -0{,}601679\,45 \qquad \mu_2 = -\frac{-4057{,}1664 + 1{,}014678\,03\,\gamma + 1599{,}8985 - 0{,}610510\,92\,\gamma}{1196{,}1911 + 5{,}679446\,37\,\gamma} = \frac{2457{,}2679 - 0{,}404167\,11\,\gamma}{1196{,}1911 + 5{,}679446\,37\,\gamma}$$

Equation 19: $\left(4914{,}5894 - 598{,}2309 - 2477{,}1496\,\dfrac{2457{,}2679 - 0{,}404167\,11\,\gamma}{1196{,}1911 + 5{,}679446\,37\,\gamma}\right)\eta_9 = 0$, d'où

$$\gamma = -\frac{(4914{,}5894 - 598{,}2309)\,1196{,}1911 - 2477{,}1496 \times 2457{,}2679}{(4914{,}5894 - 598{,}2309)\,5{,}679446\,37 + 2477{,}1496 \times 0{,}404167\,11} = 36{,}206_{34}$$

fait de manière identique et sans difficulté supplémentaire. Quant à l'élimination de η_8, le calcul du deuxième coefficient de multiplication permettant le passage de l'équation n⁰ 18 à 18^1 est un peu plus compliqué que jusqu'ici, comme le montre le neuvième et dernier stade d'élimination du tableau n⁰ 3. Il en est de même du calcul de l'équation n⁰ 19, somme des équations n⁰ 9, 17^2 et 18^1. Cette équation n⁰ 18^1 n'a d'ailleurs pas été écrite au tableau n⁰ 3, vu sa complexité. La chose n'est heureusement pas nécessaire, puisque seul le coefficient de η_9, affecté du facteur de multiplication μ_2 indiqué sous le neuvième et dernier stade d'élimination, nous intéresse.

Le premier membre de l'équation n⁰ 19, donnée en dehors du tableau proprement dit pour une question de place, est multiplié par l'inconnue η_9, tandis que le second membre est nul. Puisque la déviation η_9 n'est pas nulle au moment du voilement, on peut la barrer dans l'équation n⁰ 19. Cette dernière ne contient dès lors plus que la rigidité inconnue γ du raidisseur, correspondant au coefficient de voilement adopté $k=120$. Le calcul de γ est donc facile.

Pour les derniers stades d'élimination du tableau n⁰ 3, on peut introduire la valeur maintenant connue de la rigidité γ du raidisseur. On obtient ainsi le tableau n⁰ 4, qui est en fait une simple vérification des derniers calculs effectués. On voudra bien observer que ce tableau n⁰ 4 remplacerait la dernière partie du tableau n⁰ 3, si l'on avait procédé par tâtonnement pour obtenir la valeur de γ. Comme nous l'avons dit l'an passé dans les «Mémoires», rappelons à ce sujet que le procédé par tâtonnement est utilisé quand on a affaire à un grand nombre d'intervalles et qu'on ne peut pas concentrer tout à la fin des éliminations successives les équations contenant le γ inconnu.

Pour le calculateur non rompu aux méthodes exposées dans la présente publication, il y a intérêt, au début tout au moins, à inscrire séparément, au fur et à mesure de leur obtention, les équations éliminées 11, 12, 13... dans le tableau récapitulatif n⁰ 5. On peut dès lors se passer de tous les stades d'élimination autres que celui traité au moment considéré, ce qui évite des erreurs, surtout si le système comporte un grand nombre d'équations. Le tableau n⁰ 5 sera évidemment complété par le tableau récapitulatif n⁰ 6 des derniers stades d'élimination après obtention de la rigidité γ du raidisseur.

Les tableaux récapitulatifs n⁰ 5 et 6 présentent un autre intérêt; c'est de permettre, plus aisément que les tableaux n⁰ 3 et 4, de remonter aux valeurs des différentes déviations η. *Remarquons à ce propos que nous venons de calculer la valeur de la rigidité γ du raidisseur que nous cherchons pour un coefficient de voilement k bien défini et que, pour ce faire, nous n'avons pas eu besoin de connaître les valeurs des déviations η. Rappelons que ces η doivent au contraire être déterminées avec la méthode d'Engesser-Vianello par approximations successives.*

Pour remonter aux valeurs des différentes déviations η, nous devons tout d'abord nous rappeler que, dans tout problème de stabilité, une infinité de déformations affines sont possibles au même moment. Il faut donc définir cette

Tableau n° 4. Elimination des inconnues η_6, η_7 et η_8 après calcul de la rigidité relative γ du raidisseur

Eq.	μ	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×	Σ
			7. Elimination de η_6				
7	1	+995,8919	-4040,9315	+5991,6555	-4020,4286	+994,2684	- 79,5443
15^2	$\mu_1 = -0{,}45738496$	-995,8919	+1294,6061	- 455,1347	—	—	-156,4204
16^1	$\mu_2 = +1{,}40559757$	—	+2746,3254	-3882,6832	+1398,1118	—	+261,7540
17	—	—	—	+1653,8376	-2622,3168	+994,2684	+ 25,7893
			8. Elimination de η_7				
8	1	—	+995,4860	-4049,0490	+6097,2078	-4065,2838	-1021,6390
16^2	$\mu_1 = -0{,}50949997$	—	-995,4860	+1407,3921	- 506,7865	—	- 94,8804
17^1	$\mu_2 = +1{,}59728918$	—	—	+2641,6569	-4188,5982	+1588,1342	+ 41,1930
18	—	—	—	—	+1401,8231	-2477,1496	-1075,3264
			9. Elimination de η_8				
9	1	—	—	+995,0801	-4020,4286	+4914,5894	+1889,2409
17^2	$\mu_1 = -0{,}60167945$	—	—	-995,0801	+1577,7941	- 598,2309	- 15,5169
18^1	$\mu_2 = +1{,}74246986$	—	—	—	+2442,6345	-4316,3585	-1873,7238
19	—	—	—	—	—	—	+ 0,0002

$$\mu_1 = -\frac{-4020{,}4286 + 1577{,}7941}{+1401{,}8231} = +1742{,}46986$$

Tableau n⁰ 5. Récapitulation des résultats des divers stades d'élimination des équations, en vue d'obtenir la rigidité γ du raidisseur

Eq.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×	Σ
11	+5242,5334	−4008,4618	+ 996,7036							+2230,7752
12		+3139,9707	−3256,0390	+ 996,2978						+ 880,2295
13			+2601,8684	−2994,8332	+ 995,8919					+ 602,9271
14				+2366,3929	−2891,1887	+ 995,4860				+ 470,6902
15					+2177,3604	−2830,4519	+ 995,0801			+ 341,9886
16						+1953,8490	−2762,3007	+994,6743		+ 186,2226
17							+1653,8376	−2659,0546 +1,01467803 γ	+ 994,2684	− 10,9485 +1,01467803 γ
18								+1196,1911 +5,67944637 γ	−2477,1496	−1280,9584 +5,67944636 γ
19									—	—

Tableau n⁰ 6. Récapitulation des résultats des derniers stades d'élimination des équations, après avoir obtenu la rigidité γ du raidisseur

17							+1653,8376	−2622,3168	+ 994,2684	+ 25,7893
18								+1401,8231	−2477,1496	−1075,3264
19									—	+ 0,0002

η	0,1015197	0,2513105	0,4767194	0,7659452	1,0578627	1,2516032	1,2453814	1 avec γ = 36,20634	0,5659017

déformation en un point, ce qui en fixe toutes les autres[7]). Nous adoptons dès lors l'unité pour la déviation η_8 au droit du raidisseur. A l'aide du tableau n⁰ 6 (ou éventuellement du tableau n⁰ 4), on introduit cette valeur de $\eta_8 = 1$ dans l'équation n⁰ 18, ce qui donne: $+1401{,}8231 - 2477{,}1496\,\eta_9 = 0$. La valeur $\eta_9 = 0{,}5659017$ qui en découle[8]), de même que la valeur choisie de $\eta_8 = 1$, sont inscrites tout au bas du tableau n⁰ 6 (ou éventuellement dans les tableaux n⁰ 4 et 3). On continuera en procédant de la même manière pour l'équation n⁰ 17[9]), qui fournira η_7, l'équation n⁰ 16, qui fournira η_6 et ainsi de suite jusqu'à l'équation n⁰ 11, qui donnera la dernière déviation η_1 encore inconnue.

Dès que l'on a obtenu une quantité suffisante de η, il est prudent de procéder immédiatement au contrôle. Pour cela on inscrit tout d'abord les η au bas du tableau n⁰ 2, ce qui permet de vérifier, en une seule opération de la machine à calculer (somme de produits de deux facteurs), que les diverses équations n⁰ 9, 8, 7... jusqu'à 1 sont bien satisfaites par les η trouvés[10]). On trace alors facilement la forme de la cloque (fig. 2).

Le calculateur entraîné pourra simplifier de manière considérable les tableaux dressés jusqu'ici. En premier lieu, il n'est nul besoin d'inscrire, comme nous l'avons fait pour la clarté de l'exposé, le détail du calcul des μ, au bas de chaque stade d'élimination[11]), ce qui prend passablement de temps. Il n'est pas besoin non plus de dresser le tableau n⁰ 2, dont les diverses équations n⁰ 1, 2, ... peuvent être inscrites directement dans le tableau n⁰ 3. Enfin et surtout, on peut également se dispenser d'écrire les équations n⁰ 11^1, 11^2, 12^1, 12^2, 13^1, ... En effet la somme des diverses colonnes des tableaux n⁰ 3 et 4 peut être effectuée en une seule opération de la machine à calculer, et sans

---

[7]) C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous aboutissons à la relation triviale $0 = 0$ de l'équation 19. C'est également la raison pour laquelle nous avions à disposition neuf équations pour les dix inconnues en présence, soit les neuf déviations η et la rigidité γ du raidisseur. Par ailleurs on peut définir l'instabilité comme étant la possibilité d'avoir au même instant une série de déformations affines pouvant atteindre des valeurs très grandes, en provoquant de ce fait la ruine de la pièce.

[8]) Sur la machine à calculer on inscrit $+1401{,}8231$ que l'on passe au résultat. On inscrit ensuite $-2477{,}1496$ au clavier et l'on actionne la machine jusqu'à ce que le résultat soit annulé, ce qui fait apparaître un multiplicateur η_9 de $+0{,}5659017$. Il s'agit donc d'une division classique, les détails des opérations à effectuer dépendant du type de machine utilisée.

[9]) Sur la machine à calculer on forme le produit $-2622{,}3168\,\eta_8 + 994{,}2684\,\eta_9$, soit $-2622{,}3168 + 994{,}2684 \times 0{,}5659017$ qui restera au résultat. On actionnera ensuite la machine jusqu'à ce que le chiffre de $+1653{,}8376$ inscrit au clavier redonne zéro, d'où un η_7 de $1{,}2453814$.

[10]) Les η ont été inscrits avec tous les chiffres trouvés pour obtenir une bonne vérification des équations. Cela ne veut rien dire en ce qui concerne la précision réelle des η calculés.

[11]) La somme des coefficients de l'inconnue à éliminer doit alors donner zéro, ce que nous pouvons faire en une seule opération de la machine à calculer (cf. notes 8 et 9 précédentes).

inscrire les résultats intermédiaires puisqu'il s'agit de nouveau de la somme de produits de deux facteurs. Comme l'un de ces facteurs est constant pour chaque équation déterminée, on perd, en utilisant une machine à calculer ordinaire, sans mémoires, le bénéfice de la multiplication d'un facteur fixe par une série d'autres. Cela diminue quelque peu le gain de temps provenant de ce que les équations n⁰ 11^1, 11^2, 12^1, 12^2, 13^1 ... ne sont pas écrites. Quant au risque d'erreur, il augmente évidemment, bien qu'il soit faible pour le système simplifié de dix équations dont nous nous occupons. On l'atténue d'ailleurs fortement, tout en sollicitant beaucoup moins l'attention du calculateur, si l'on utilise un papier fort avec fenêtres laissant apparaître seulement les chiffres à éliminer, ou même un tel dispositif pour chaque élimination. En outre la preuve par la somme dont nous avons parlé permet de découvrir rapidement toute erreur à la fin de chaque stade d'élimination.

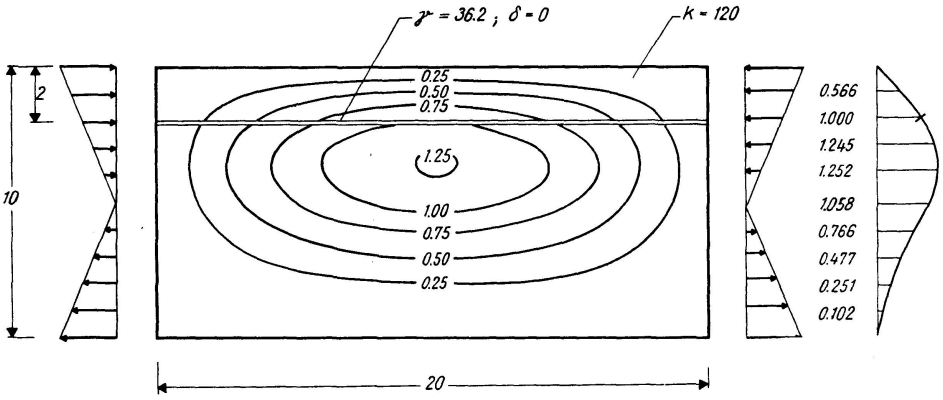

Fig. 2.

Pour le calculateur entraîné, les tableaux n⁰ 2, 3, 4, 5 et 6 seront donc remplacés par un seul et unique tableau, très concentré et très simplifié, le tableau n⁰ 7 [12]). A partir de ce tableau nous pouvons une fois pour toutes déterminer le γ du raidisseur au cinquième supérieur, pour dix intervalles, à l'aide d'une formule appropriée. Pour cela nous reproduisons ci-après la partie médiane du tableau n⁰ 7 en question, en désignant par [1], [2] ... jusqu'à [8], les divers coefficients à utiliser, et les autres, par un astérisque.

L'équation n⁰ 19 s'écrit alors, à partir de ce tableau partiel:

$$([1]+[2]\mu_1+[6]\mu_2)\,\eta_9 = 0,$$

avec
$$\mu_2 = -\frac{[4]+[8]\gamma+([5]+[8]\gamma)\,\mu_1}{[3]+[7]\gamma},$$

ce qui donne:
$$[1]+[2]\mu_1-[6]\frac{[4]+[8]\gamma+([5]+[8])\,\mu_1}{[3]+[7]\gamma} = 0,$$

[12]) On remarquera, au dernier chiffre de certains coefficients des équations 17 et 18, une différence d'une unité entre les résultats donnés au tableau n⁰ 5 et ceux donnés au tableau n⁰ 7. Les raisons de pareilles différences ont déjà été données à la note 6 du présent article.

Tableau n⁰ 7. Elimination successive des inconnues $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ sous forme abrégée

Eq.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×	Σ
11	+5242,5334	−4008,4618	+ 996,7036							+2230,7752
2 12	−4000,3444 —	+6198,6499 +3139,9707	−4016,5793 −3256,0390	+ 996,2978 + 996,2978				$\mu_1 =$ +0,76305559		− 821,9760 + 880,2295
3 13	+ 997,5154 —	−4008,4618 —	+6157,2510 +2601,8684	−4024,6967 −2994,8332	+ 995,8919 + 995,8919			$\mu_1 =$ −0,19027354	$\mu_2 =$ +1,03369041	+ 117,4998 + 602,9271
4 14		+ 997,1095 —	−4016,5793 —	+6115,8521 +2366,3929	−4032,8141 −2891,1887	+ 995,4860 + 995,4860		$\mu_1 =$ −0,31755376	$\mu_2 =$ +1,14633465	+ 59,0542 + 470,6902
5 15			+ 996,7036 —	−4024,6967 —	+6074,4533 +2177,3604	−4040,9315 −2830,4519	+ 995,0801 + 995,0801	$\mu_1 =$ −0,38307226	$\mu_2 =$ +1,21596848	+ 0,6088 + 341,9886
6 16	$\mu_1 =$ −0,42101960	$\mu_2 =$ +1,29311023		+ 996,2978 —	−4032,8141 —	+6033,0544 +1953,8490	−4049,0490 −2762,3007	+ 994,6743 + 994,6743		− 57,8366 + 186,2226
7 17	$\mu_1 =$ −0,45738496	$\mu_2 =$ +1,40559755			+ 995,8919 —	−4040,9315 —	+5991,6555 +1653,8377	−4057,1664 +1,01467803 γ −2659,0546 +1,01467803 γ	+ 994,2684 + 994,2684	− 116,2821 +1014,67803 γ − 10,9485 +1014,67803 γ
8 18	$\mu_1 =$ −0,50949997	$\mu_2 =$ +1,59728916	Avec γ inconnu			+ 995,4860 —	−4049,0490 —	+5950,2567 +4,05871213 γ +1196,1911 +5,67944635 γ	−4065,2838 −2477,1497	−1168,5901 +4058,71213 γ −1280,9584 +5,67944635 γ
9 19	$\mu_1 =$ −0,60167945						+ 995,0801 —	−4057,1664 +1,01467803 γ —	+4914,5894 —	+1852,5031 +1,01467803 γ —
7 17	$\mu_1 =$ −0,45738496	$\mu_2 =$ +1,40559755			+ 995,8919 —	−4040,9315 —	+5991,6555 +1653,8377	−4,0204286 −2,6223168	+ 994,2684 + 994,2684	− 79,5443 + 25,7893
8 18	$\mu_1 =$ −0,50949997	$\mu_2 =$ +1,59728916	Avec $\gamma = 36,20635$ (le calcul en est donné dans le texte)			+ 995,4860 —	−4049,0490 —	+6,0972079 +1,4018232	−4065,2838 −2477,1497	−1021,6389 −1075,3264
9 19	$\mu_1 =$ −0,60167945	$\mu_2 =$ +1,74246985					+ 995,0801 —	−4020,4286 —	+4914,5894 —	+1889,2409 + 0,0002

η	0,1015197	0,2513105	0,4767194	0,7659452	1,0578627	1,2516032	1,2453814	1	0,5659017

Eq.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×	η_6 ×	η_7 ×	η_8 ×	η_9 ×
7 17	*	*			* –	* –	* *	* + * [5] + [8]γ	* [2]
8 18	*	*				* –	* –	* + * [3] + [7]γ	* [6]
9 19	μ_1						* –	[4] + [8]γ –	[1] *

d'où l'on déduit la valeur cherchée de γ:

$$\gamma = -\frac{([1]+[2]\mu_1)[3]-([4]-[5]\mu_1)[6]}{([1]+[2]\mu_1)[7]-(1+\mu_1)[8][6]}.$$

Avec les valeurs du tableau n⁰ 7, cette formule donne bien le γ du tableau n⁰ 3 [13]):

$$\gamma = -\frac{(4914{,}5894-994{,}2684\times 0{,}60167945)\,1196{,}1911}{(4914{,}5894-994{,}2684\times 0{,}60167945)\,5{,}67944635}$$

$$\cdot\frac{+(-4057{,}1664+2659{,}0546\times 0{,}60167945)\,2477{,}1497}{+(1-0{,}60167945)\,1{,}01467803\times 2477{,}1497} =$$

$$= -\frac{4316{,}3585\times 1196{,}1911-2457{,}2679\times 2477{,}1497}{4316{,}3585\times 5{,}67944635+0{,}40416711\times 2477{,}1497} =$$

$$= \frac{\ldots}{25515{,}70896} = 36{,}20635.$$

Introduite dans les équations n⁰ 17, 18 et 19, cette valeur de γ peut être aisément contrôlée, comme précédemment au tableau n⁰ 4. En même temps ces équations n⁰ 17, 18 et 19, dans lesquelles on a introduit le γ trouvé, permettent de calculer très facilement les valeurs des déviations η, si on désire les connaître. A cet effet nous avons reporté, tout au bas du tableau n⁰ 7, les valeurs de ces η [10]), au fur et à mesure de leur obtention. Comme nous l'avons déjà dit auparavant, le contrôle des η se fait directement en vérifiant les équations de départ n⁰ 9, 8, 7 ... jusqu'à 1, qui doivent être satisfaites en y introduisant les η trouvés.

Lorsqu'il faut chercher, pour un a/b déterminé (fig. 1), les valeurs de la rigidité γ du raidisseur correspondant à diverses valeurs du coefficient de voilement k, le calculateur expérimenté aura intérêt à se servir du tableau n⁰ 8, dans lequel les équations de départ n⁰ 1, 2, 3 ... jusqu'à 9 auront leurs coefficients formés des deux termes du tableau n⁰ 1. Dans le deuxième terme, on

[13]) Au dernier chiffre près, pour les raisons exposées à la note 6.

Tableau n⁰ 8. Equations de départ pour $a/b = 2$ et dix intervalles. Fragment d'une variante

Eq.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×			Σ
1	+5078,5614 +1,3664331 k	−4032,8141 +0,2029356 k	+ 995,8919 +0,0067645 k					+2041,6392 +1,5761332 k
11								
2	−4032,8141 +0,2705808 k	+6074,4533 +1,0349716 k	−4032,8141 +0,1352904 k	+ 995,8919 +0,0033823 k		$\mu_1 =$		− 995,2830 +1,4442251 k
12								
3	+ 995,8919 +0,0135290 k	−4032,8141 +0,2029356 k	+6074,4533 +0,6899811 k	−4032,8141 +0,0676452 k	+995,8919 —	$\mu_1 =$	$\mu_2 =$	+ 0,6089 +0,9740909 k
13								

Tableau n⁰ 9. Elimination successive des inconnues η_1, η_2, $\eta_3 \ldots$ sous forme abrégée ($k = 120$). Fragment d'une variante

Eq.	η_1 ×	η_2 ×	η_3 ×	η_4 ×	η_5 ×			Σ
1	+5078,5614 +1,3664331 k	−4032,8141 +0,2029356 k	+ 995,8919 +0,0067645 k					+2041,6392 +1,5761332 k
11	+5242,5334	−4008,4618	+ 996,7036					+2230,7752
2	−4032,8141 +0,2705808 k	+6074,4533 +1,0349716 k	−4032,8141 +0,1352904 k	+ 995,8919 +0,0033823 k		$\mu_1 =$ +0,76305559		− 995,2830 +1,4442251 k
12	—	+3139,9707	−3256,0390	+ 996,2978				+ 880,2295
3	+ 995,8919 +0,0135290 k	−4,0328141 +0,2029356 k	+6074,4533 +0,6899811 k	−4032,8141 +0,0676452 k	+995,8919 —	$\mu_1 =$ −0,19027334	$\mu_2 =$ +1,03369041	+ 0,6089 +0,9740909 k
13	—	—	+2601,8684	−2994,8332	+995,8919			+ 602,9271

laissera subsister le coefficient de voilement k sans lui donner de valeur. De la sorte le tableau n⁰ 8 sera utilisable quel que soit le k choisi. En le reproduisant par un procédé quelconque, mécanique ou héliographique, et en ajoutant le résultat des éliminations successives, comme au tableau n⁰ 7, on obtiendra, pour chaque valeur du coefficient de voilement k un tableau analogue au tableau n⁰ 9, contenant tous les résultats des opérations à effectuer sur la machine. On se rend compte facilement que le tableau n⁰ 9 n'entraîne pas un nombre plus grand d'opérations sur la machine[14]), mais quelques opérations un peu plus compliquées. Cette complication est largement compensée par le gain de temps provenant des valeurs de départ écrites une fois pour toutes.

Bien entendu, il est possible de choisir une quantité d'autres dispositions pour le tableau n⁰ 9 donnant les équations de départ et les éliminations successives. Chaque calculateur peut trouver une disposition qui convienne le mieux à ses habitudes et à sa dextérité, ainsi qu'au genre de machine à calculer dont il dispose.

Pour le cas de la tôle non raidie, avec onde transversale simple ou double la rigidité γ du raidisseur n'intervient plus. Il faut alors procéder par approximations successives, qui d'ailleurs convergent beaucoup mieux que si l'on choisit les déviations η (Engesser-Vianello). Bien entendu, rien n'empêche de conserver γ en s'approchant petit à petit du k pour lequel le γ s'annule justement.

Enfin nous répéterons tout à l'heure ce que nous avons dit l'an passé en ce qui concerne le passage du cas du raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$) au cas du raidisseur avec effort normal.

Résultats finals de l'étude entreprise pour l'âme fléchie et raidie au cinquième supérieur

En procédant comme nous venons de le faire tout à l'heure en traitant l'exemple $k = 120$ et $\delta = 0$, on a tout d'abord déterminé la rigidité dite «optimum» du raidisseur placé au cinquième supérieur de l'âme d'un panneau de poutre soumis à la flexion pure. Nous avons montré l'an dernier dans les «Mémoires» que cette rigidité «optimum» γ_e correspond à un coefficient de voilement k égal à 129,4. Nous ne reviendrons plus sur cette question et rappellerons simplement que le raidisseur placé au cinquième supérieur ne fléchit pratiquement pas lors du voilement en deux séries de cloques super-

---

[14]) Par «opération» de la machine, nous entendons l'ensemble des manipulations donnant un résultat à inscrire. Par exemple, la somme d'une série de multiplications divisée par un seul facteur constitue une opération.

Bien entendu nous ne parlons ici que des machines à calculer mécaniques ordinaires et sans «mémoires». La disposition de nos tableaux joue d'ailleurs le rôle du «programme» de machines plus perfectionnées et les chiffres des tableaux sont ceux enregistrés par les «mémoires».

posées; c'est donc l'endroit «optimum» du raidisseur, c'est-à-dire celui où l'on obtient le plus grand coefficient de voilement k. En effet, on ne peut le dépasser avec une cloque unique, la tôle se voilant alors plus facilement en deux séries de cloques superposées, en laissant le raidisseur sans déformation. Rappelons en outre que la rigidité «optimum» du raidisseur γ_e n'est véritablement «économique» que pour les poutres hautes, où l'on peut réduire au minimum l'épaisseur de l'âme, sans en être empêché par des raisons d'ordre constructif.

Le calcul de la rigidité γ_e correspondant à $k = 129{,}4$ et $\delta = 0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur) a été effectué pour tous les rapports a/b compris entre 0,5 et 4, avec un intervalle $\Delta \frac{a}{b}$ de 0,25. Ceci fait, on a procédé de même pour les autres valeurs du coefficient de voilement intéressant le praticien, soit de 20 à 120, avec un intervalle Δk de 10. Bien entendu, seul le cas $\delta = 0$ (pas d'effort normal dans le raidisseur) a été étudié, les autres cas s'en déduisant très facilement, comme nous le verrons.

Les résultats trouvés en considérant dix intervalles le long de la verticale médiane de l'âme (fig. 1) ont été inscrits au tableau n° 10. Pour certaines valeurs de k et de a/b, réparties au mieux, un calcul complémentaire a été effectué avec cinq, quinze et vingt intervalles. Par extrapolation à l'infini [15]), il a été sans autre possible de trouver la valeur probable de la rigidité γ du raidisseur pour des intervalles très serrés le long de la verticale médiane de l'âme (fig. 1). Dès lors les différences entre le calcul avec dix intervalles et les valeurs probables pour des intervalles très serrés étaient aisées à définir pour tous les a/b et tous les k considérés au tableau n° 10, ces différences obéissant à certaines lois précises [16]). On passe alors par simple addition du tableau n° 10 (calcul avec dix intervalles le long de la verticale médiane de la figure 1) au tableau n° 11 (valeurs de la rigidité γ pour des intervalles très serrés le long de la verticale médiane de la figure 1). La comparaison des deux tableaux montre que les différences sont minimes et que la précision obtenue dépasse largement les besoins de la pratique.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que du raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$). Il faudrait pour cela que la liaison avec l'âme soit réalisée par boulons avec trous ovalisés. Si par contre le raidisseur est rivé ou soudé à la tôle, il est soumis à un effort normal qui tend à le faire flamber et diminue dès lors la résistance qu'il oppose au voilement de l'âme. Il faut donc augmenter la rigidité du raidisseur soumis à un effort normal ($\delta \neq 0$) par rapport à celle du

[15]) Nous avons donné l'an dernier la formule d'extrapolation $k = 129{,}424 - \frac{1{,}888}{(0{,}1\,n)^4}$, où n est le nombre d'intervalles, pour le cas de la rigidité «optimum» $\gamma_e = 129{,}4$ et le rapport $a/b \cong 0{,}285$. On trouve facilement une formule analogue pour les différentes valeurs de k et de a/b.

[16]) Pour le coefficient de voilement «optimum» $k = 129{,}4$, cette différence, négative pour $a/b = 0{,}5$, devient positive lorsque a/b augmente avec maximum vers $a/b = 1$. Elle décroît ensuite progressivement jusqu'à $a/b = 4$, en devenant négative vers $a/b = 2$. Pour d'autres k, les maxima et les zéros se déplacent en direction des plus petits a/b.

Tableau n⁰ 10. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs obtenues avec dix intervalles pour un raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$)

$\frac{a}{b}$	Pour $k=20$	Pour $k=30$	Pour $k=40$	Pour $k=50$	Pour $k=60$	Pour $k=70$	Pour $k=80$	Pour $k=90$	Pour $k=100$	Pour $k=110$	Pour $k=120$	Pour $k=129,4$
0,50	-0,201	0,167	0,553	0,959	1,391	1,855	2,361	2,924	3,572	4,356	5,394	6,888
0,75	-0,345	0,505	1,386	2,299	3,246	4,232	5,260	6,339	7,477	8,685	9,981	11,297
1,00	-1,040	0,432	1,955	3,523	5,134	6,786	8,482	10,223	12,012	13,853	15,751	17,591
1,25	-2,747	-0,549	1,737	4,093	6,508	8,976	11,495	14,062	16,677	19,341	22,055	24,652
1,50	-5,998	-2,995	0,150	3,403	6,744	10,159	13,639	17,180	20,777	24,428	28,132	31,660
1,75		-7,541	-3,461	0,777	5,142	9,612	14,173	18,814	23,527	28,307	33,149	37,754
2,00		-14,923	-9,841	-4,545	0,925	6,541	12,280	18,127	24,069	30,098	36,206	42,015
2,25			-19,833	-13,414	-6,769	0,067	7,067	14,209	21,477	28,857	36,338	43,456
2,50				-26,782	-18,899	-10,775	-2,444	6,069	14,744	23,562	32,509	41,028
2,75					-36,526	-27,053	-17,326	-7,374	2,778	13,110	23,603	33,602
3,00						-49,939	-38,754	-27,300	-15,605	-3,692	8,418	19,967
3,25							-68,010	-54,994	-41,694	-28,137	-14,345	-1,183
3,50								-91,847	-76,882	-61,620	-46,084	-31,249
3,75									-122,672	-105,645	-88,305	-71,741
4,00										-161,826	-142,622	-124,272
4,25												-190,57 *

* Valeur obtenue par extrapolation

Tableau n⁰ 11. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs correspondant à des intervalles très serrés pour un raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$)

$\frac{a}{b}$	Pour $k=20$	Pour $k=30$	Pour $k=40$	Pour $k=50$	Pour $k=60$	Pour $k=70$	Pour $k=80$	Pour $k=90$	Pour $k=100$	Pour $k=110$	Pour $k=120$	Pour $k=129{,}4$
0,50	-0,20	0,17	0,56	0,96	1,40	1,86	2,37	2,93	3,57	4,3$\overline{5}$	5,38	6,86
0,75	-0,35	0,50	1,39	2,30	3,2$\overline{5}$	4,24	5,27	6,34	7,48	8,69	9,99	11,31
1,00	-1,04	0,43	1,95	3,52	5,13	6,79	8,49	10,23	12,02	13,86	15,76	17,61
1,25	-2,75	-0,55	1,73	4,09	6,51	8,97	11,50	14,07	16,68	19,3$\overline{5}$	22,06	24,67
1,50	-6,00	-3,00	0,15	3,40	6,74	10,15	13,64	17,18	20,78	24,43	28,14	31,67
1,75		-7,55	-3,47	0,77	5,13	9,60	14,17	18,81	23,52	28,30	33,1$\overline{5}$	37,75
2,00		-14,93	-9,85	-4,56	0,91	6,53	12,27	18,12	24,06	30,09	36,19	42,00
2,25			-19,85	-13,43	-6,78	0,05	7,05	14,19	21,46	28,84	36,32	43,43
2,50				-26,80	-18,92	-10,80	-2,47	6,04	14,72	23,53	32,48	41,00
2,75					-36,55	-27,08	-17,36	-7,41	2,74	13,07	23,56	33,56
3,00						-49,97	-38,79	-27,34	-15,65	-3,74	8,37	19,90
3,25							-68,05	-55,04	-41,75	-28,19	-14,41	-1,25
3,50								-91,90	-76,94	-61,68	-46,15	-31,33
3,75									-122,75	-105,72	-88,39	-71,83
4,00										-161,91	-142,71	-124,37
4,25												-190,7

raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$). En considérant la relation (13), il est facile de déterminer l'augmentation de cette rigidité. En effet, si la valeur de R définie par (13) ne change pas, il en est de même des équations (11), (12), (14), (15) et (16). Dès lors, si, pour le raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$), nous connaissons la rigidité γ correspondant à un certain coefficient de voilement k et à un certain rapport a/b de la hauteur à la largeur de l'âme, il suffit de s'arranger pour ne pas changer R et obtenir immédiatement la rigidité correspondant à n'importe quelle valeur de δ. Comme nous l'avons fait l'an dernier, on écrit à ce moment, pour R = const.:

$$\gamma_{\delta=0}\, b \frac{\pi^4}{a^4} = \gamma_\delta\, b \frac{\pi^4}{a^4} - \omega_r\, k\, \delta \frac{\pi^4}{a^2 b}$$

ou après simplification:

$$\boxed{\gamma_\delta = \gamma_{\delta=0} + \omega_r\, k\, \delta \frac{a^2}{b^2}} \tag{17}$$

En posant $\omega_r = 0{,}6$ pour le raidisseur au cinquième supérieur (fig. 1), et en partant du tableau n° 11, on obtient immédiatement toutes les valeurs de la rigidité γ du raidisseur, quelles que soient les valeurs du coefficient de voilement γ et l'importance de l'effort normal δ dans le raidisseur. C'est ce que nous avons fait pour $\delta = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}2$, aux tableaux n° 13 et 14. Auparavant nous avons répété au tableau n° 12 les valeurs déjà données au tableau n° 11 pour $\delta = 0$, mais en nous bornant aux valeurs intéressant le cas $\delta = 0$, à l'exclusion de celles à utiliser pour obtenir les γ correspondant à des $\delta \neq 0$.

On remarquera qu'au tableau n° 10 (dix intervalles le long de la verticale médiane de la fig. 1), nous avons donné trois décimales après la virgule. Au tableau n° 11 (intervalles très serrés), nous avons donné deux décimales seulement après la virgule. Enfin, aux tableaux n° 12, 13 et 14, nous nous sommes contentés d'une seule décimale après la virgule. Cette décimale unique doit correspondre assez bien à la précision du calcul, tout en étant plus que suffisante pour les besoins de la pratique. En ce qui concerne les faibles valeurs de γ, nous nous sommes abstenus de donner une décimale complémentaire, parce que la sensibilité du calcul est plus grande pour les rapports a/b inférieurs à l'unité. Cette sensibilité du calcul correspond d'ailleurs à une sensibilité réelle du système au moindre changement de l'âme et du raidisseur, dès que l'on a affaire à des panneaux hauts et courts. On observera en outre que nous aurions pu nous dispenser des calculs complémentaires avec un plus grand nombre d'intervalles sur la verticale médiane de la figure 1; en effet, la différence à la dernière décimale atteint une unité au plus[17]).

---

[17]) La dernière décimale est au plus exacte à une unité près. Il suffit en effet d'un très faible changement pour la faire varier. Si par exemple nous arrondissons 5,949 nous obtenons 5,9 tandis que si nous arrondissons $5{,}949 + 0{,}002 = 5{,}951$, il vient 6,0.

Tableau n⁰ 12. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour un raidisseur sans effort normal ($\delta = 0$)

$\frac{a}{b}$	Pour $k=20$	Pour $k=30$	Pour $k=40$	Pour $k=50$	Pour $k=60$	Pour $k=70$	Pour $k=80$	Pour $k=90$	Pour $k=100$	Pour $k=110$	Pour $k=120$	Pour $k=129{,}4$
0,50		0,2	0,6	1,0	1,4	1,9	2,4	2,9	3,6	4,3	5,4	6,9
0,75		0,5	1,4	2,3	3,2	4,2	5,3	6,3	7,5	8,7	10,0	11,3
1,00		(0,4)	2,0	3,5	5,1	6,8	8,5	10,2	12,0	13,9	15,8	17,6
1,25			(1,7)	4,1	6,5	9,0	11,5	14,1	16,7	19,3	22,1	24,7
1,50			(0,2)	(3,4)	6,7	10,2	13,6	17,2	20,8	24,4	28,1	31,7
1,75				(0,8)	(5,1)	(9,6)	14,2	18,8	23,5	28,3	33,1	37,8
2,00					(0,9)	(6,5)	(12,3)	(18,1)	24,1	30,1	36,2	42,0
2,25							(7,1)	(14,2)	(21,5)	(28,8)	36,3	43,4 *
2,50								(6,0)	(14,7)	(23,5)	(32,5)	(41,0)
2,75										(13,1)	(23,6)	(33,6)
3,00											(8,4)	(19,9)

* Valeur maximum de γ pour $k = 129{,}4$: $\gamma_e = 43{,}4$ avec $\frac{a}{b} = 2{,}23$

Tableau n° 13. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour $\delta = 0{,}1$

$\frac{a}{b}$	Pour $k=20$	Pour $k=30$	Pour $k=40$	Pour $k=50$	Pour $k=60$	Pour $k=70$	Pour $k=80$	Pour $k=90$	Pour $k=100$	Pour $k=110$	Pour $k=120$	Pour $k=129{,}4$
0,50	0,1	0,6	1,2	1,7	2,3	2,9	3,6	4,3	5,1	6,0	7,2	8,8
0,75	0,3	1,5	2,7	4,0	5,3	6,6	8,0	9,4	10,9	12,4	14,0	15,7
1,00	(0,2)	2,2	4,4	6,5	8,7	11,0	13,3	15,6	18,0	20,5	23,0	25,4
1,25		2,3	5,5	8,8	12,1	15,5	19,0	22,5	26,1	29,7	33,3	36,8
1,50		(1,1)	5,6	10,2	14,8	19,6	24,4	29,3	34,3	39,3	44,3	49,1
1,75			(3,9)	(10,0)	16,2	22,5	28,9	35,3	41,9	48,5	55,2	61,5
2,00				(7,4)	(15,3)	23,3	31,5	39,7	48,1	56,5	65,0	73,1
2,25				(1,8)	(11,4)	(21,3)	(31,4)	41,5	51,8	62,3	72,8	82,7
2,50					(3,6)	(15,5)	(27,5)	(39,8)	52,2	64,8	77,5	89,5
2,75						(4,7)	(18,9)	(33,4)	(48,1)	(63,0)	78,0	92,3 *
3,00							(4,4)	(21,3)	(38,4)	(55,7)	(73,2)	(89,8)
3,25									(21,6)	(41,5)	(61,6)	(80,8)
3,50										(19,2)	(42,1)	(63,8)
3,75												(37,4)

* Valeur maximum de γ pour $k = 129{,}4$: $\gamma_e = 92{,}3$ avec $\frac{a}{b} = 2{,}77$

Tableau n⁰ 14. Rigidité relative γ du raidisseur au cinquième supérieur de l'âme d'une poutre fléchie. Valeurs utilisables pour $\delta = 0{,}2$

$\frac{a}{b}$	Pour $k=20$	Pour $k=30$	Pour $k=40$	Pour $k=50$	Pour $k=60$	Pour $k=70$	Pour $k=80$	Pour $k=90$	Pour $k=100$	Pour $k=110$	Pour $k=120$	Pour $k=129{,}4$
0,50	0,4	1,1	1,8	2,5	3,2	4,0	4,8	5,6	6,6	7,7	9,0	10,7
0,75	1,0	2,5	4,1	5,7	7,3	9,0	10,7	12,4	14,2	16,1	18,1	20,0
1,00	1,4	4,0	6,8	9,5	12,3	15,2	18,1	21,0	24,0	27,1	30,2	33,1
1,25	(1,0)	5,1	9,2	13,5	17,8	22,1	26,5	30,9	35,4	40,0	44,6	48,9
1,50		(5,1)	11,0	16,9	22,9	29,1	35,2	41,5	47,8	54,1	60,5	66,6
1,75		(3,5)	11,2	19,1	27,2	35,3	43,6	51,9	60,3	68,7	77,3	85,3
2,00			(9,4)	19,4	29,7	40,1	50,7	61,3	72,1	82,9	93,8	104,1
2,25			(4,5)	(16,9)	(29,7)	42,6	55,7	68,9	82,2	95,7	109,2	122,0
2,50				(10,7)	(26,1)	(41,7)	57,5	73,5	89,7	106,0	122,5	138,0
2,75					(17,9)	(36,4)	(55,2)	74,3	93,5	112,9	132,5	151,0
3,00						(25,6)	(47,6)	(69,9)	(92,4)	115,1	138,0	159,7
3,25							(33,4)	(59,0)	(85,0)	(111,2)	(137,7)	162,8 *
3,50								(40,4)	(70,1)	(100,0)	(130,3)	(158,9)
3,75									(46,0)	(79,9)	(114,1)	(146,5)
4,00										(49,3)	(87,7)	(124,1)
4,25												(89,8)

* Valeur maximum de γ pour $k = 129{,}4$: $\gamma_e = 162{,}8$ avec $\frac{a}{b} = 3{,}25$

Ajoutons que, pour passer du tableau n⁰ 11 aux tableaux n⁰ 12, 13 et 14, on a intérêt à calculer uns fois pour toutes les valeurs de l'expression $\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ de (17), ce qui se fait aisément sous forme de tableau, comme ci-dessous.

$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2}$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}1$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}2$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2}$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}1$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}2$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a^2}{b^2}$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}1$	$\omega_r \delta \frac{a^2}{b^2}$ pour $\delta = 0{,}2$
0,5	0,25	0,015	0,030	1,75	3,0625	0,18375	0,3675	3	9	0,54	1,08
0,75	0,5625	0,03375	0,0675	2	4	0,24	0,48	3,25	10,5625	0,63375	1,2675
1	1	0,06	0,12	2,25	5,0625	0,30375	0,6075	3,5	12,25	0,735	1,47
1,25	1,5625	0,09375	0,1875	2,5	6,25	0,375	0,75	3,75	14,0625	0,84375	1,6875
1,5	2,25	0,135	0,27	2,75	7,5625	0,45375	0,9075	4	16	0,96	1,92

Afin de faciliter la tâche du praticien, les valeurs des tableaux n⁰ 12, 13 et 14 ont été représentées sous forme graphique, aux figures 3, 4 et 5, soit pour $\delta = 0$, $\delta = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}2$. Nous n'avons pas donné d'autres courbes pour des δ intermédiaires entre $\delta = 0$, $\delta = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}2$. La chose n'est pas nécessaire, car selon (17), γ varie linéairement avec δ. Pour un a/b et un k fixes, il est donc possible d'interpoler linéairement entre les valeurs données aux tableaux n⁰ 12, 13 et 14 ou aux figures 3, 4 et 5. Mais il est tout aussi rapide et facile de trouver la valeur exacte cherchée à partir du tableau n⁰ 11, en utilisant la relation (17). Dans ce cas les figures 3, 4 et 5 donnent un contrôle bienvenu, destiné à éviter les erreurs grossières. Elles permettent également de se rendre compte si l'on se trouve déjà dans la partie descendante de la courbe, ce que l'on peut faire également en considérant un rapport a/b légèrement différent du rapport réel. Si l'on se trouve vraiment sur la partie descendante de la courbe, l'usage veut que l'on s'en tienne à la valeur maximum de la rigidité γ [18]). On remplace donc les guirlandes des figures 3, 4 et 5 par des horizontales à partir du maximum, ce qui augmente quelque peu la sécurité [19]).

[18]) Dans les «Mémoires» de 1957, nous avions calculé, à la page 237, les maxima suivants pour la rigidité «optimum» γ_e correspondant à $k = 129{,}4$: $\delta = 0$ ($a/b = 2{,}23$; $\gamma_e = 43{,}4$), $\delta = 0{,}02$ ($a/b = 2{,}34$; $\gamma_e = 51{,}6$), $\delta = 0{,}04$ ($a/b = 2{,}45$; $\gamma_e = 60{,}5$), $\delta = 0{,}06$ ($a/b = 2{,}56$; $\gamma_e = 70{,}2$), $\delta = 0{,}08$ ($a/b = 2{,}67$; $\gamma_e = 80{,}8$), $\delta = 0{,}1$ ($a/b = 2{,}77$; $\gamma_e = 92{,}3$), $\delta = 0{,}12$ ($a/b = 2{,}87$; $\gamma_e = 104{,}6$), $\delta = 0{,}14$ ($a/b = 2{,}96$; $\gamma_e = 117{,}8$), $\delta = 0{,}16$ ($a/b = 3{,}06$; $\gamma_e = 131{,}9$), $\delta = 0{,}18$ ($a/b = 3{,}15$; $\gamma_e = 146{,}9$), $\delta = 0{,}2$ ($a/b = 3{,}25$; $\gamma_e = 162{,}8$).

[19]) Les valeurs de la rigidité «optimum» γ_e correspondant à $k = 129{,}4$ ont déjà été données l'an dernier au tableau n⁰ 3, page 237 des «Mémoires». Elles ont été reprises pour $\delta = 0$, $\delta = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}2$ et figurent aujourd'hui aux tableaux n⁰ 12, 13 et 14. De même les courbes correspondantes de γ_e pour $\delta = 0$, $\delta = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}2$, données cette années aux figures 3, 4 et 5 (en gras) sont reprises, à une autre échelle, de la figure 2 de l'année passée.

D'autre part, nous avions donné l'an dernier à la figure 3 les courbes du coefficient de voilement k en fonction du rapport a/b pour différents γ et pour $\delta = 0$. C'est sous

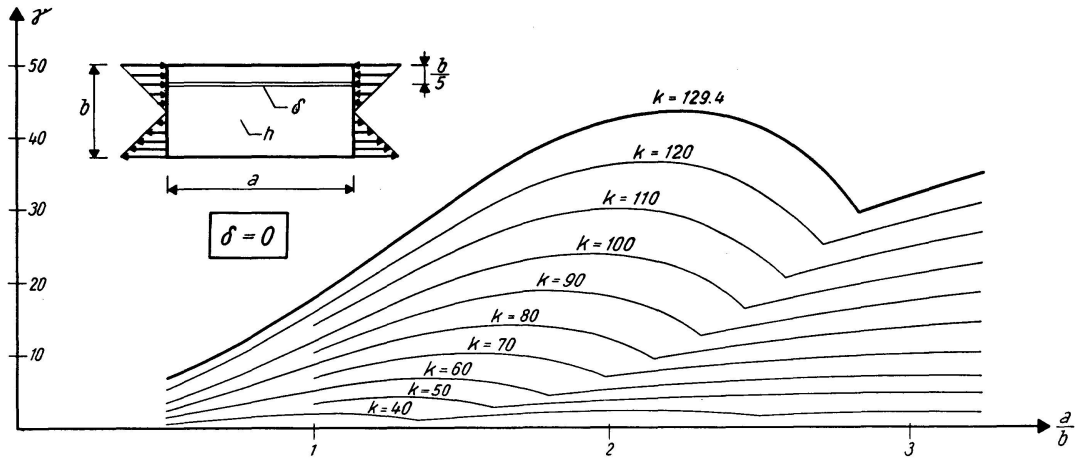

Fig. 3.

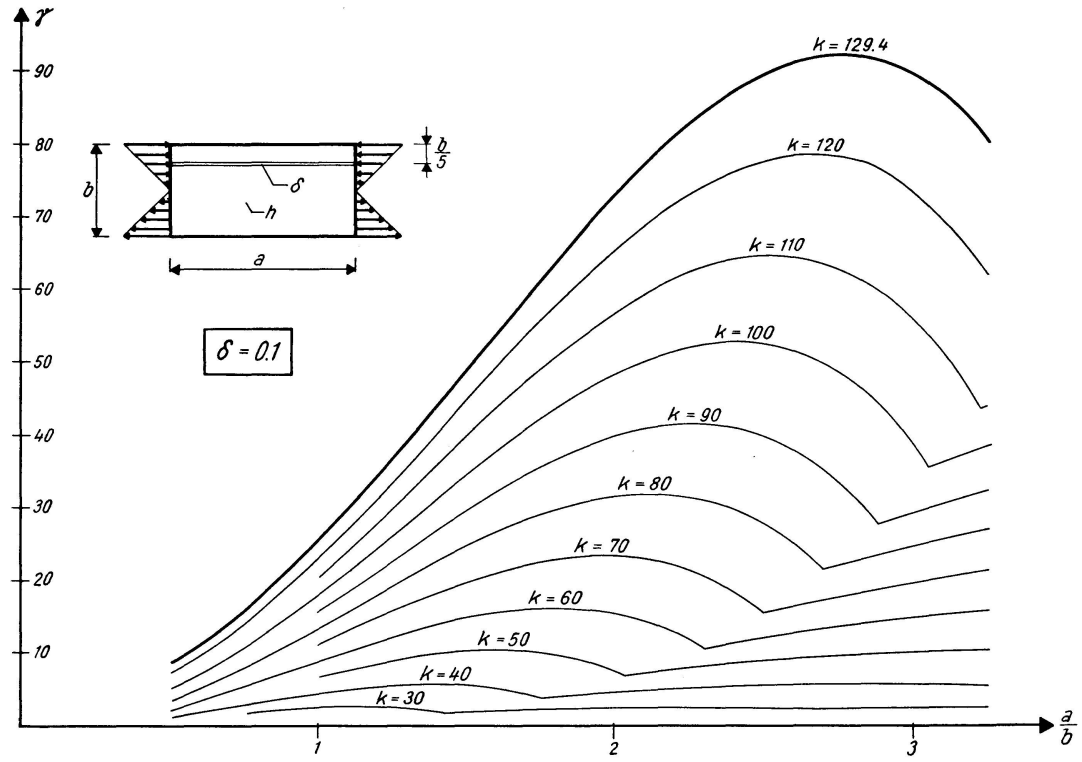

Fig. 4.

Notons encore, qu'en pratique, nous cherchons en règle générale la rigidité γ d'un raidisseur dont nous ignorons la section et par conséquent l'importance

cette forme que l'on donne généralement les résultats des calculs de voilement. La chose est parfaitement logique, tant qu'on utilise le procédé d'Engesser-Vianello par approximations successives, comme nous l'avions encore fait l'an passé, sauf pour la détermination de la rigidité «optimum» γ_e. Les résultats trouvés en 1957 concordent d'ailleurs parfaitement avec ceux calculés cette année de manière différente, étant donné que l'on part dans les deux cas des mêmes équations (11), (12), (14), (15) et (16). On passe évidemment très facilement des courbes de la figure 3 de 1957 aux courbes de la figure 3 de l'actuelle publication, en cherchant, pour $k = 10, 20, 30 \ldots$, sur la figure 3 de 1957, les valeurs de a/b correspondant à $\gamma = 10, 20, 30 \ldots$.

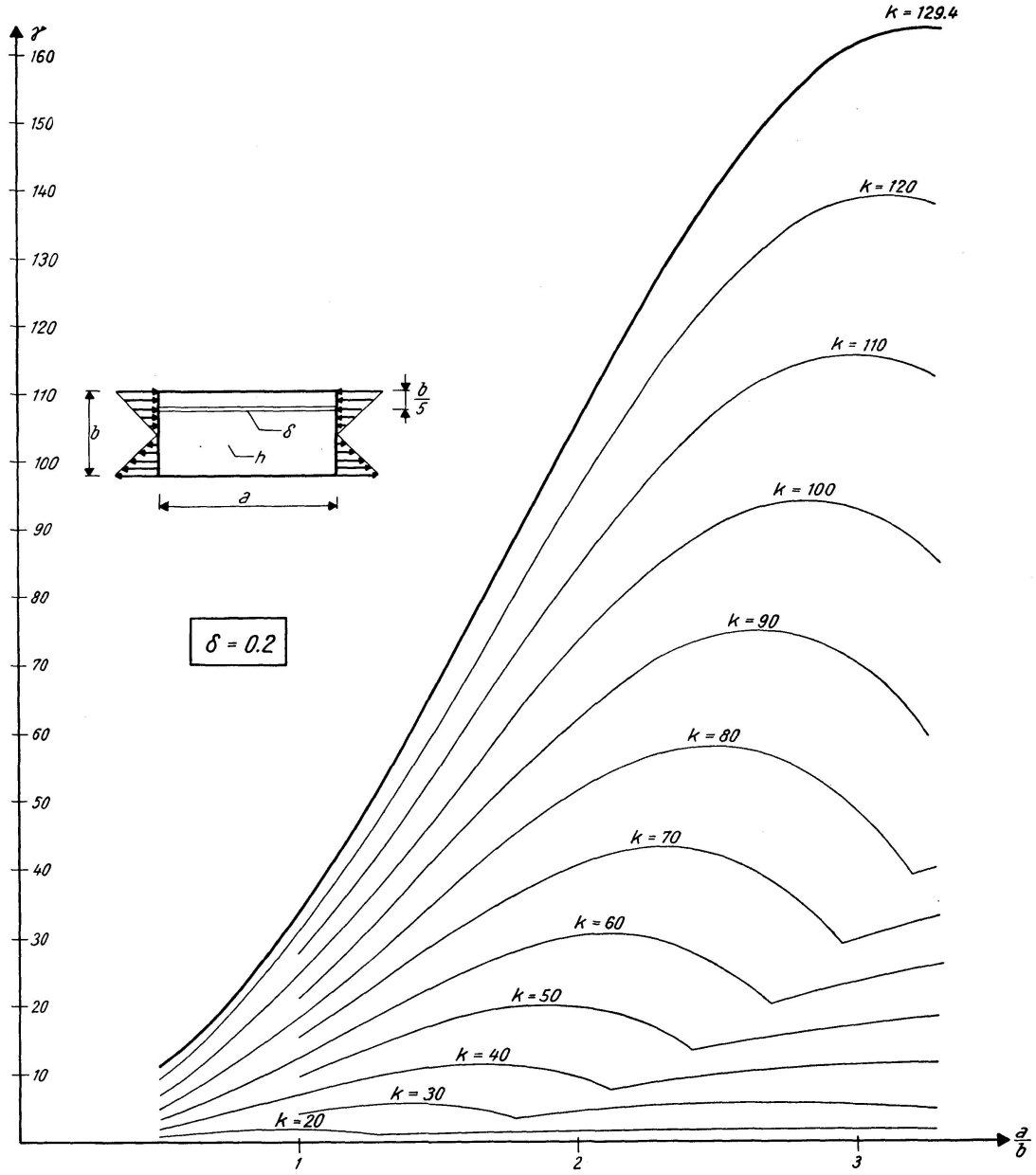

Fig. 5.

δ de l'effort normal. Un tâtonnement s'impose, ce qui se fera facilement en utilisant les figures 3, 4 et 5. Si l'on désire une meilleure précision, on se servira du tableau n° 11 [20]) et de la relation (17), toujours par tâtonnement.

[20]) A titre d'exemple, l'interpolation linéaire donne un γ de $0{,}5\,(5{,}13+6{,}79)=5{,}96$ pour $a/b=1$ et $k=65$. Pour $a/b=1{,}25$ et $k=65$, on trouve $0{,}5\,(6{,}51+8{,}97)=7{,}74$. Pour $a/b=1{,}125$ et $k=65$ la valeur de γ sera donc de $0{,}5\,(5{,}96+7{,}74)=6{,}85$.

Par interpolation parabolique (cf. par exemple: Dr. Lothar Schrutka, Leitfaden der Interpolation, Springer-Verlag, Wien 1945, S. 62), on trouve $\gamma=0{,}0625\times 2{,}30+0{,}5625\times$ $\times\, 3{,}25+0{,}5625\times 4{,}24-0{,}0625\times 5{,}27=3{,}740$ pour $a/b=0{,}75$ et $k=65$, $\gamma=5{,}954$ pour $a/b=1$ et $k=65$, $\gamma=7{,}733$ pour $a/b=1{,}25$ et $k=65$ et $\gamma=8{,}436$ pour $a/b=1{,}5$ et $k=65$. Pour $a/b=1{,}125$ et $k=65$, γ vaut alors 6,94.

Résumé

Les auteurs rappellent tout d'abord les relations de statique appliquée données dans les «Mémoires» de 1957 pour traiter le problème du voilement de l'âme des poutres fléchies, avec raidisseur horizontal.

Ils traitent ensuite un exemple numérique complet de panneau soumis à la flexion pure et raidi au cinquième supérieur.

Enfin, ils donnent, sous forme de tables et de courbes, tous les résultats trouvés et la manière de s'en servir pour traiter facilement tous les cas intermédiaires.

Zusammenfassung

Die Verfasser geben zuerst die schon in den «Abhandlungen» 1957 veröffentlichten baustatischen Gleichungen über die Biegungsbeulung der waagrecht versteiften Stegbleche wieder.

Nachher behandeln sie ein vollständiges Beispiel eines auf reine Biegung beanspruchten Balkenfeldes.

In Form von Tabellen und Kurven werden sodann sämtliche Ergebnisse zusammengefaßt, mit den nötigen Angaben für die Behandlung von Zwischenwerten.

Summary

At first, the authors recall the formulas of applied statics given in the «Publications» of 1957 in relation to the problem of the buckling of sagging beams with horizontal stiffener.

Next they solve a complete numerical example of a panel submitted to pure bending and stiffened in the top fifth of the web.

Finally they give, by way of charts and plottings, all the obtained results, and they show how to use them for the easy treatment of all intermediate cases.