Théorie générale des plaques élasto-plastiques

Autor(en): **Massonnet, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **26 (1966)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20880

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Théorie générale des plaques élasto-plastiques

Allgemeine Theorie der elasto-plastischen Platten

General Theory of Elasto-Plastic Plates

CH. MASSONNET
Professeur à l'Université de Liège

1. Introduction

En 1950, le président du C.E.B., professeur F. LEVI a présenté une méthode permettant d'évaluer les effets des déformations non élastiques (déformations plastiques proprement dites ou fissures). Cette méthode consiste à assimiler l'effet des déformations non élastiques à celui de distorsions de SOMIGLIANA. Une application systématique de ce procédé a été faite par CALLARI [2], qui a comparé, pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à quatre charges concentrées, les résultats théoriques aux résultats expérimentaux et obtenu un accord confirmant la validité de la méthode.

La méthode développée dans le présent mémoire s'inspire directement des travaux de LEVI. Elle a cependant un objectif plus général, qui est de représenter le comportement élasto-plastique des plaques formées de n'importe quel matériau, et en particulier des plaques métalliques.

Cet objectif nous a conduit à abandonner l'hypothèse fondamentale du professeur LEVI et à considérer, au lieu des distorsions à caractère vectoriel de SOMIGLIANA les distorsions de type tensoriel qui s'introduisent naturellement par l'intermédiaire des équations de PRANDTL-REUSS de la théorie différentielle de la plasticité [3].

Par ailleurs, vu l'extrême complexité des calculs à mettre en œuvre, il nous a semblé indispensable de programmer la méthode pour une calculatrice électronique. Ce travail a été effectué par mon collaborateur A. CORNELIS et est exposé dans une note qui fait suite à la présente théorie. Sa mise au point nous a demandé un temps très considérable. Le mémoire de Monsieur CORNELIS se termine par un bref exposé des résultats numériques déjà obtenus.

Actuellement, le programme est construit pour traiter des dalles rectan-

gulaires en béton armé à armature isotrope et de section constante, librement appuyées sur tout leur contour. Il sera aisé de généraliser ce programme pour des dalles de forme quelconque, à mode d'appui quelconque sur leur bord, et munies d'une armature orthotrope à sections variables d'un point à l'autre.

Nous préparons en ce moment des essais sur dalles rectangulaires afin de contrôler les résultats de la théorie et de mettre au point son interprétation en termes de largeur et entredistance des fissures, à l'aide des formules de fissuration retenues par le Comité Européen du Béton.

Le défaut principal de la théorie exposée dans les lignes qui suivent est d'être une extension élasto-plastique de la théorie *linéaire* de LAGRANGE-KIRCHHOFF et d'ignorer par conséquent les effets d'arc ou de membrane qui peuvent se développer dans son feuillet moyen. C'est pourquoi nous travaillons actuellement à développer une théorie générale des plaques-*membranes* en régime élasto-plastique, qui constituera en quelque sorte une généralisation au régime élasto-plastique de la théorie élastique des plaques membranes établie par VON KARMAN et MARGUERRE.

2. Notations

$(\dot{\ })$	dérivée par rapport au temps
$D = \dfrac{E e^3}{12(1-\nu^2)}$	rigidité flexionnelle de la plaque
e	épaisseur de la plaque
E	module de YOUNG
$f(M_x, M_y, M_{xy})$	potentiel plastique
M_x, M_y, M_{xy}	composantes du tenseur des moments dans la plaque
M_1, M_2	moments de flexion principaux
M_p	moment plastique
p	intensité de la charge transversale sur la plaque
w	déplacement transversal d'un point du feuillet moyen
x, y, z	coordonnées
α	angle d'une section normale dans la plaque avec une section principale
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	dilatations principales
ϵ_c	dilatation de comparaison
λ	intensité des déformations plastiques
μ	paramètre de charge
μ_0	valeur du paramètre de charge caractérisant la fin du domaine élastique
ν	coefficient de Poisson
$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$	composantes du tenseur des courbures — totales
$\chi_x^e\ \chi_y^e\ \chi_{xy}^e$	tenseur des courbures — élastiques
$\chi_x^p\ \chi_y^p\ \chi_{xy}^p$	tenseur des courbures — plastiques

χ_1, χ_2	courbures principales
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensions principales
σ_c	tension de comparaison

3. Hypothèses fondamentales

La théorie reprend d'abord les hypothèses fondamentales faites par KIRCHHOFF dans la théorie classique des plaques élastiques, à savoir:

Première hypothèse

Les déplacements transversaux des points de la plaque sont petits par rapport à son épaisseur, de sorte que l'extension du feuillet moyen est négligeable.

Deuxième hypothèse (KIRCHHOFF)

Les particules matérielles situées sur une normale au feuillet moyen de la plaque avant déformation demeurent sur cette normale après déformation de la surface moyenne. Autrement dit, l'état déformé de la plaque est déterminé par l'état déformé de son feuillet moyen.

Troisième hypothèse (KIRCHHOFF)

Les composantes des tensions dans la direction de la normale au feuillet moyen sont très petites par rapport aux autres.

Les hypothèses 2 et 3 se complètent et traduisent l'idée que toute couche élémentaire de matériau, parallèle au feuillet moyen, se trouve pratiquement en état plan de tension.

* * *

Si l'on dépasse la limite élastique du matériau, il se produira dans la plaque des fissures ou des déformations plastiques. Il faut préciser le mécanisme d'introduction de ces déformations. On sait que, sous charge croissante, ces déformations envahissent graduellement toute l'épaisseur de la plaque et s'étendent de part et d'autre de l'endroit où elles sont nées en premier lieu.

L'analyse de ces déformations plastiques réparties serait très complexe et, dans l'étude des structures élasto-plastiques formées de barres, on l'a évitée en introduisant le concept de rotule plastique, c'est à dire en admettant que la courbure χ de la barre suit la loi élastique $\chi = \frac{M}{EI}$ jusqu'à ce que le moment M atteigne le moment plastique M_p (fig. 1).

Cette hypothèse revient à admettre que la courbure de la barre en un point est la somme de sa courbure élastique maximum χ_e et de sa courbure plastique χ_p (fig. 1).

Dans la quatrième et dernière hypothèse de la présente théorie, nous étendons le concept de rotule plastique aux plaques en admettant que:

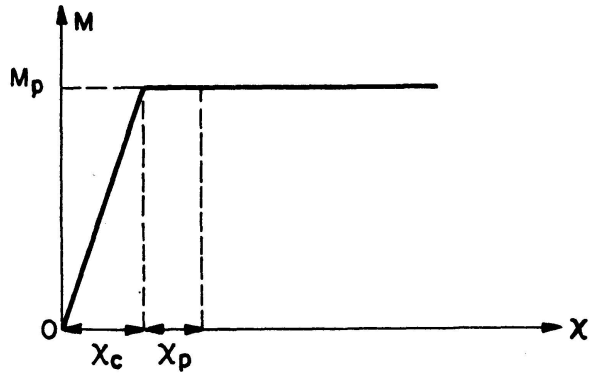

Fig. 1.

Quatrième hypothèse

Les composantes en un point du feuillet moyen du tenseur courbure totale s'obtiennent en ajoutant aux composantes du tenseur courbure élastique déterminées par la théorie élastique des plaques les composantes du tenseur courbure plastique déterminées par la théorie plastique des plaques faites d'un matériau rigide-plastique à écrouissage isotrope.

4. Théorie générale

La théorie différentielle de la plasticité fournit les vitesses de courbure $\dot{\chi}$ *où le symbole* $(\dot{\ })$ *représente une dérivée par rapport au temps.* Nous serons donc amenés à calculer les dérivées par rapport au temps de toutes les quantités intervenant dans la théorie classique des plaques, ce qui s'obtient simplement, puisque toutes les formules sont linéaires, en surmontant d'un point tous les symboles intervenant dans les équations de la théorie élastique des plaques.

Ainsi, des expressions connues du tenseur-courbure

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y},$$

on déduit directement les composantes du tenseur des vitesses de courbure

$$\dot{\chi}_x = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}, \qquad \dot{\chi}_y = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}, \qquad \dot{\chi}_{xy} = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x\, \partial y}. \tag{1}$$

En vertu de la quatrième hypothèse, les vitesses de courbure ont des composantes élastiques et plastiques qui s'ajoutent, de sorte que

$$\dot{\chi}_x = \dot{\chi}_x^e + \dot{\chi}_x^p\,; \qquad \dot{\chi}_y = \dot{\chi}_y^e + \dot{\chi}_y^p\,; \qquad \dot{\chi}_{xy} = \dot{\chi}_{xy}^e + \dot{\chi}_{xy}^p. \tag{2}$$

Les relations (2) jouent, dans la présente théorie, le rôle que jouent les équations de PRANDTL-REUSS dans la théorie générale de la plasticité.

Les composantes élastiques du tenseur des vitesses de courbure s'obtiennent en fonction des moments en dérivant par rapport au temps les expressions classiques de la théorie élastique des plaques, ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= D(\dot{\chi}_x^e + \nu \dot{\chi}_y^e), \\ \dot{M}_y &= D(\dot{\chi}_y^e + \nu \dot{\chi}_x^e), \\ \dot{M}_{xy} &= D(1-\nu)\dot{\chi}_{xy}^e, \end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$D = \frac{E e^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{4}$$

A présent, nous pouvons, en vertu de la quatrième hypothèse, évaluer les composantes plastiques $\dot{\chi}^p$ du tenseur des vitesses de courbure par la loi du potentiel plastique (ou loi de normalité)

$$\dot{\chi}_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_x}, \qquad \dot{\chi}_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_y}, \qquad \dot{\chi}_{xy} = \lambda \frac{\partial f}{\partial M_{xy}} \tag{5}$$

où

$$f(M_x, M_y, M_{xy})$$

est le potentiel plastique [3].

La théorie du potentiel plastique a été développée pour un matériau parfaitement plastique, c'est-à-dire dont la surface d'écoulement

$$f(M_x, M_y, M_{xy}) = M_p^2 \tag{6}$$

conserve une forme invariable quand les déformations plastiques progressent. La méthode actuelle reste cependant applicable si le matériau est écrouissable, mais il faut alors supposer que son écrouissage est isotrope, c'est-à-dire que la surface d'écoulement se modifie en restant semblable à elle-même, son rapport d'homothétie dépendant en chaque point de la courbure plastique équivalente totale en ce point

$$\bar{\chi}^p = \int d\bar{\chi}^p = \int \dot{\bar{\chi}}^p \, dt \tag{7}$$

selon la loi bien déterminée obtenue expérimentalement:

$$M_p = F(\bar{\chi}^p). \tag{8}$$

Le calcul de $\bar{\chi}^p$ sera discuté plus en détail au par. 4.

Par les équations (2), nous obtenons pour les vitesses de courbure élastiques, en tenant compte des expressions (1) et (5),

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_x^e &= -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial M_x}, \\ \dot{\chi}_y^e &= -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial M_y}, \\ \dot{\chi}_{xy}^e &= -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \, \partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial M_{xy}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituant ces expressions dans les formules (3), nous obtenons les expressions des moments en régime élastoplastique:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_x &= -D\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}\right)-D\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial M_x}+\nu\frac{\partial f}{\partial M_y}\right),\\
\dot{M}_y &= -D\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}\right)-D\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial M_y}+\nu\frac{\partial f}{\partial M_x}\right),\\
\dot{M}_{xy} &= D(1-\nu)\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x\,\partial y}-D(1-\nu)\lambda\frac{\partial f}{\partial M_{xy}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

L'équation d'équilibre de translation verticale d'un élément de plaque $e\,dx\,dy$ s'écrit:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y}=-p \tag{11}$$

où $p(x,y)$ est l'intensité de la charge transversale au point (x,y). En différentiant cette relation par rapport au temps, on trouve:

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x\,\partial y}=-\dot{p}. \tag{12}$$

Si nous substituons dans cette dernière relation les valeurs des composantes du tenseur-moment données par (10), nous obtenons l'*équation fondamentale:*

$$\begin{aligned}
\nabla^4 \dot{w} \equiv \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial y^4} &= \frac{\dot{p}}{D}-\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial M_x}+\nu\frac{\partial f}{\partial M_y}\right)\right]\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial M_y}+\nu\frac{\partial f}{\partial M_x}\right)\right]-2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial M_{xy}}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{13}$$

qui généralise l'équation classique de LAGRANGE.

Le paramètre λ apparaissent dans cette équation est relié comme suit au comportement du point considéré de la plaque pendant le temps dt considéré: Si il y a déchargement $\lambda=0$.

Si la déformation plastique continue, λ est positif et le point de charge (M_x, M_y, M_{xy}) reste sur la surface d'écoulement qui gonfle en restant homothétique à elle-même avec un rapport d'homothétie dépendant de $\bar{\chi}^p$, comme on l'a dit plus haut.

5. Discussion du critère de plasticité

5.1. Considérons d'abord une *plaque métallique* faite d'un métal dont la courbe tension-dilatation en traction simple est $\sigma=F(\epsilon)$ (fig. 2).

Nous admettons que, en état polyaxial, le métal obéit à la loi d'écrouissage isotrope

$$\sigma_e = F(\epsilon_c) \tag{14}$$

représentée par le même diagramme fig. 2, où

$$\sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \tag{15}$$

représente la tension de comparaison, dépendant des trois tensions principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, selon le critère de VON MISES, et

$$\epsilon_c = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \tag{16}$$

la dilatation de comparaison, qui dépend des dilatations principales selon la loi (16).

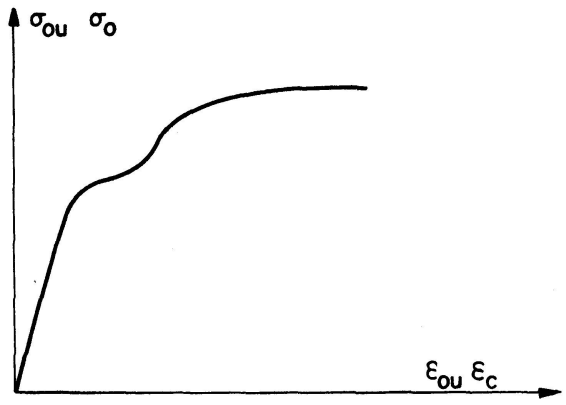

Fig. 2.

Pour un matériau rigide-plastique, on sait (cf. 3, p. 74—78) que l'équation de la surface d'écoulement est:

$$M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2 = M_p^2 = \left(\frac{\sigma_c e^2}{4}\right)^2. \tag{17}$$

Il résulte des formules (5) que les vitesses de courbure plastiques sont, dans ce cas,

$$\dot{\chi}_x^p = \lambda (2 M_x - M_y); \qquad \dot{\chi}_y^p = \lambda (2 M_y - M_x); \qquad \dot{\chi}_{xy}^p = 6 \mu M_{xy}. \tag{18}$$

5.2. Considérons maintenant une *dalle en béton armé* munie d'une armature isotrope, c'est-à-dire armée également dans deux directions perpendiculaires. On suppose que cette dalle obéit au critère carré de JOHANSEN représenté à la fig. 3[1]), où M_1 et M_2 sont les moments principaux dans la plaque et M_p^+, M_p^-, les moments plastiques pour la flexion positive et négative, respectivement.

D'après la loi de normalité (5), le vecteur des vitesses de courbure est normal au lieu de plasticité (fig. 3). Par exemple, pour un point (M_1, M_2) situé sur le côté $A B$ du critère carré, ce vecteur n'a qu'une composante hori-

[1]) Cette hypothèse n'est pas tout à fait exacte, comme l'ont montré les expériences exécutées sous la direction commune du professeur H. LOUIS et du soussignσ [4]. Elle est adoptée ici par souci de simplification.

zontale $\dot{\chi}_1^p$, qui n'est définie qu'en direction et pas en grandeur. Nous pouvons donc par simplicité prendre dans les calculs ci-après $\dot{\chi}_1^p = \lambda$ et $\dot{\chi}_2^p = 0$.

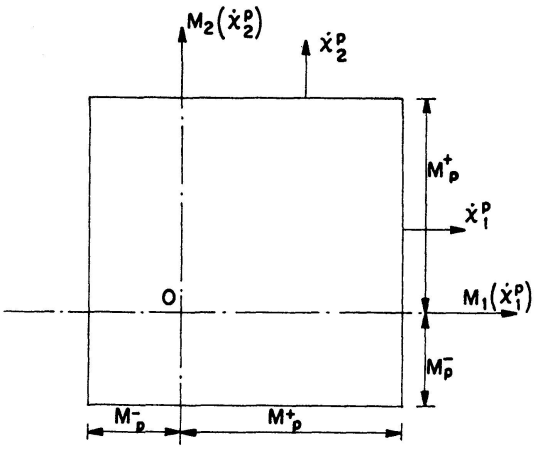

Fig. 3.

Le tenseur des vitesses de courbure plastique est dès lors celui représenté par le cercle de Mohr de la fig. 4. Cette figure montre que

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_x^p &= \lambda \cos^2 \alpha, \\ \dot{\chi}_y^p &= \lambda \sin^2 \alpha, \\ \dot{\chi}_{xy}^p &= \lambda \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \tag{19}$$

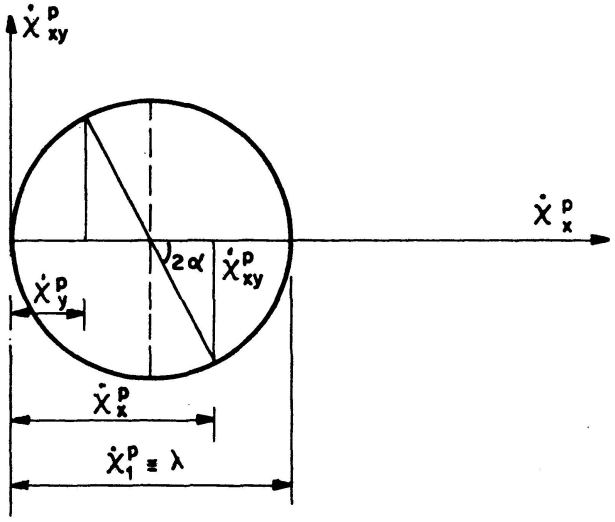

Fig. 4.

Remplaçant les $\dot{\chi}^p$ par ces expressions dans l'équation fondamentale (13), il vient:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \dot{w} = \frac{\dot{p}}{D} &- \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\lambda (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\lambda (\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha)] \\ &+ 2 (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} (\mu \sin \alpha \cos \alpha). \end{aligned} \tag{20}$$

Supposons maintenant qu'une bande mince soit découpée hors de la dalle étudiée et qu'on effectue sur cette bande un essai de flexion pure jusqu'à la

ruine. On obtiendra un diagramme moment courbure expérimental, qui a la forme de la fig. 5a.

Nous admettrons qu'on peut considérer comme courbure plastique χ^p la partie de la courbure χ qui excède les abscisses χ^e de la loi de HOOKE extrapolée $0AD$. En soustrayant cette partie élastique du diagramme (fig. 5a), on obtient

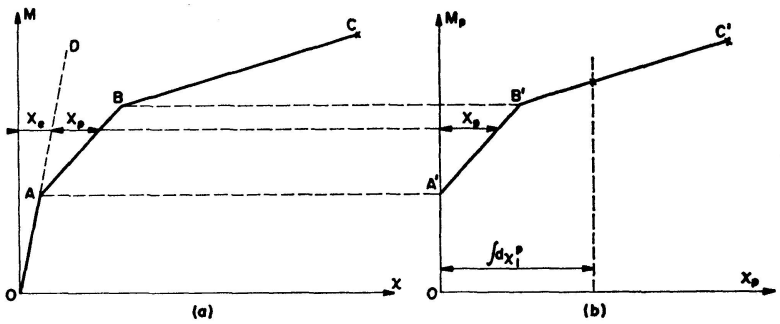

Fig. 5.

Ce diagramme montre trois phases plus ou moins prononcées:
a) phase élastique non fissurée OA; b) phase élastique fissurée AB; c) phase plastique BC.

(fig. 5b), le diagramme reliant le moment plastique M_p à la courbure plastique χ^p. Ce diagramme représent dans le cas actuel la loi d'écrouissage isotrope admise au paragraphe 3 et a comme équation:

$$M_p = F\left(\int d\chi_1^p\right), \tag{21}$$

où $\int d\chi_1^p$ est la somme des courbures plastiques élémentaires qui se sont produites au point considéré depuis l'entrée en plasticité.

6. Solution de l'équation fondamentale (13) dans le cas des dalles en béton armé

Etant donné que le béton armé a, dans le domaine fissuré-plastique, un comportement non linéaire et dépendant des déformations antérieures, l'intégration de l'équation de LAGRANGE généralisée (13) ne peut se faire qu'en augmentant les charges pas à pas.

Nous nous bornerons ci-après à étudier le cas d'une mise en charge proportionnelle (ou radiale) dans laquelle $p(x, y)$ représente la distribution des charges en service et $\mu p(x, y)$ la valeur des chages à un moment quelconque de l'évolution élasto-plastique. Le facteur μ sera désigné dans ce qui suit sous le nom de *facteur de charge*.

Comme dans la méthode LEVI-CALLARI, le problème aux limites est résolu par la méthode des différences finies; on couvre la plaque d'un réseau régulier à mailles carrées de côté h et on prend les déplacements transversaux w des nœuds de ce réseau comme inconnues.

Le problème est d'abord résolu en régime élastique pour une charge p

arbitraire en écrivant en chaque point «l'étoile» des valeurs de w correspondant à l'opérateur biharmonique $\nabla^4 w$ en chaque point *intérieur* du réseau.

Les conditions d'appui peuvent toujours s'exprimer aisément, éventuellement en prolongeant le réseau d'une ou deux mailles au-delà du bord. Ce problème sera discuté par Monsieur CORNELIS au par. 2 de sa note (voir ci-après) dans le cas particulier d'une plaque reposant sur appuis simples.

Les équations algébriques linéaires obtenues peuvent s'exprimer sous la forme matricielle

$$(w)\{A\} = \left(\frac{p\,h^4}{D}\right) \tag{22}$$

où (w) et $\left(\frac{p\,h^4}{D}\right)$ sont les vecteurs colonnes des déplacements et des charges données multipliées par la constante $\frac{h^4}{D}$. $\{A\}$ est la matrice carrée des coefficients numériques du système.

La matrice $\{A\}$ peut être inversée, donnant la solution

$$(w) = \{A^{-1}\}\left(\frac{p\,h^4}{D}\right). \tag{23}$$

Les coefficients de $\{A^{-1}\}$ sont emmagasinés en permanence dans la mémoire de la calculatrice électronique.

Les moments dans la plaque sont calculés par les formules classiques de la théorie des plaques élastiques

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= \quad D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned} \tag{24}$$

On calcule ensuite en chaque point les moments principaux M_1 et M_2, puis on détermine la valeur μ_0 du multiplicateur μ pour laquelle la plaque est sur le point de sortir du régime élastique. Ce nombre est le plus petit des rapports

$$\frac{M_p^+}{M_1^{+\,max}} \quad \text{et} \quad \frac{M_p^-}{M_2^{-\,min}}$$

où M_p^+ et M_p^- représentent, rappelons-le, les moments plastiques pour la flexion positive et négative respectivement.

Au-delà du domaine élastique, les calculs procèdent pas à pas, en augmentant le facteur de charge μ par petites quantités $\Delta\mu$ de l'ordre de 1 pour cent de μ. Pour expliquer comment se déroule ce calcul, supposons qu'une certaine intensité de charge $\mu > \mu_0$ a été atteinte, pour laquelle la plaque est déjà fissurée (ou plastifiée) aux points A, B, C, du réseau, disons. Les courbures inélastiques cumulées $\chi^p = \int d\chi^p$ qui se sont produites en ces points depuis le début du chargement, sont emmagasinées dans la mémoire de l'ordinateur.

On augmente alors le paramètre de charge μ d'une petite quantité $\Delta\mu$ et on multiplie tous les moments de l'étape précédente par

$$\frac{\mu+\Delta\mu}{\mu_0}.$$

Supposons que, après cette opération, les moments principaux aux points A, B, C, ainsi qu'en un nouveau point D, disons, excèdent les valeurs des moments plastiques correspondant aux courbures plastiques cumulées χ^p par le diagramme de la fig. 5b. Dans ces conditions, les fissures déjà existantes aux points A, B, C, vont s'ouvrir davantage et une nouvelle fissure va se former en D.

Le problème, à présent, est de trouver les grandeurs des distorsions λ_A, λ_B, λ_C, λ_D, qui doivent être introduites, dans les sections principales, aux points A, B, C, D, respectivement, pour détendre la plaque en ces points et ramener les moments fléchissants principaux à des valeurs correspondant aux points $(M_p, \int d\chi^p)$ de la courbe fig. 5b).

Ce problème se résout de la manière suivante[2]):

1. En utilisant la matrice inversée $\{A^{-1}\}$, l'ordinateur calcule le champ des moments dûs à des distorsions angulaires unitaires $\lambda=1$ introduites successivement en chacun des points A, B, C, D, dans les directions des sections principales correspondantes de la plaque.
2. On traduit les conditions à réaliser aux points A, B, C, D, ce qui fournit un système de 4 équations linéaires à 4 inconnues $\lambda_A, \ldots, \lambda_D$. La résolution de ce système donne les valeurs des distorsions inconnues.
3. On calcule ensuite l'effet de ces distorsions sur les déplacements w et sur le champ des moments dans la plaque et on emmagasine ces résultats dans la mémoire de l'ordinateur. Ce dernier est maintenant prêt à effectuer l'étape suivante.

Bibligraphie

1. F. Levi: Superfici d'influenza e fenomeni di adattamento nelle lastre piane. — Giornale del Genio Civile, n⁰ 5, 1950.
2. C. E. Callari: Méthode générale de calcul des dalles dans le domaine anélastique. — Annales de l'Institut Technique, Paris, Série «Théories et méthodes de calcul», n⁰ 201, septembre 1964.

---

[2]) Cette méthode est, en fait, celle utilisée par Levi et Callari, sauf que les distorsions utilisées ici ne sont pas des distorsions de Somigliana. Il est clair que les calculs deviennent d'autant plus complexes que la plastification de la plaque est plus avancée.

Il aurait semblé plus conforme au mode de travail des ordinateurs de déterminer à chaque pas les distorsions plastiques λ par un processus d'approximations successives. Cependant, les tentatives faites pendant plusieurs mois pour mettre un tel processus au point n'ont pas donné de résultats convenables.

3. Ch. Massonnet et M. Save: Calcul plastique des Constructions, Vol. II. — Structures Spatiales. — Editeur: C.B.L.I.A., 47, rue Montoyer, Bruxelles, 1962.
4. R. Baus et S. Tolaccia: Calcul à la rupture des dalles en béton armé et étude expérimentale du critère de rupture en flexion pure. — Annales de l'Institut Technique, Paris, Série «Béton, Béton Armé», n⁰ 189, septembre 1963.
5. S. Timoshenko et S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2e édition. — McGraw Hill Book Co., 1959 (voir p. 361—362).

Résumé

Le mémoire décrit une méthode qui permet de déterminer les déformations élasto-plastiques d'une plaque formée d'un matériau élastique-plastique écrouissable et le champ de tensions dans cette plaque. La méthode est basée sur les équations de Prandtl-Reuss et l'hypothèse de l'écrouissage isotrope. Elle s'applique tant à des plaques métalliques qu'à des plaques en béton armé; dans ce dernier cas, les fissures dans le béton sont assimilées à des déformations plastiques. Pratiquement, la méthode travaille par différences finies et procède pas à pas en faisant croître le coefficient de charge par petites quantités.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine Methode zur Bestimmung der elasto-plastischen Verformungen und des Spannungsfeldes von Platten beschrieben, die aus einem elasto-plastischen verfestigbaren Material gebildet sind. Die Methode beruht auf den Gleichungen von Prandtl-Reuss und auf der Hypothese einer isotropen Verfestigbarkeit. Sie kann sowohl bei metallischen Platten als auch bei Stahlbetonplatten angewendet werden; im letzteren Fall werden die Risse im Beton plastischen Verformungen gleichgesetzt. Für die praktische Anwendung arbeitet diese Methode mit endlichen Differenzen und mit schrittweiser Erhöhung des Belastungskoeffizienten um kleine Beträge.

Summary

The paper describes a method which makes it possible to determine the elasto-plastic deformations of a plate made of a strain-hardening elasto-plastic material and the field of tensions in the plate. The method is based on the Prandtl-Reuss equations and the hypothesis of isotropic strain-hardening. It is applicable both to steel plates and to reinforced concrete slabs; in the latter case the cracks in the concrete are regarded as analogous to plastic deformations. In practice, the method operates by finite differences and proceeds step by step by causing the load coefficient to increase by small amounts.