Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 29 (1969)

Artikel: Effets dynamiques sur les tabliers des ponts
Autor: Winand, André
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22914

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Effets dynamiques sur les tabliers des ponts

Dynamische Einflüsse auf Brückenplatten

Dynamic Effects on Bridge Decks

ANDRÉ WINAND
Ingénieur à la Société Nationale des Chemins de fer belges
Assistant à l'Université Libre de Bruxelles

1. Introduction

Dans ces dernières années, les efforts de modernisation de nombreuses Administrations de Chemins de fer se sont, entre autres, portés sur l'augmentation des vitesses. D'ores et déjà des tronçons de ligne sont équipées pour des vitesses de plus de 200 km/h à la S.N.C.F. (France) et à la D.B. (Allemagne fédérale de l'Ouest) et nos confrères japonais ont réalisé la liaison désormais célèbre du Tokaïdo où des vitesses de pointe de 250 km/h sont atteintes.

Cette évolution ne va certes pas sans poser aux ingénieurs des chemins de fer une grande diversité de problèmes. Parmi ceux-ci, il y a le comportement des ouvrages d'art sous les charges roulantes animées de grandes vitesses, supérieures à celles jamais atteintes jusqu'à présent.

Consciente de ce problème, l'Union Internationale des Chemins de fer (U.I.C.) a chargé un Comité d'Experts de son Office de Recherches et d'Essais (O.R.E.) de l'étude de ce problème. Ce Comité, placé sous la Présidence de Monsieur A. Soete, Ingénieur en Chef à la S.N.C.B., exécute actuellement de nombreux mesurages à la fois sur modèle réduit et sur ponts existants, ainsi qu'à diverses études, notamment statistiques, qui doivent aboutir à de précieux enseignements pratiques.

Nous avons pensé qu'il n'était peut être pas sans intérêt que nous nous livrions à la présente étude théorique du problème en tenant compte autant que possible des divers paramètres en jeu. C'est ce travail que nous présentons à la méditation et à la critique du lecteur.

Il faut encore noter que les formules avancées ci-dessous, bien qu'établies dans l'esprit de l'examen des effets dynamiques des charges roulantes sur ponts-rails, sont en fait également valables pour les ponts-route.

2. Les charges roulantes

De par les ressorts des véhicules, les vibrations des engins-moteurs, les irrégularités du chemin de roulement, les charges roulantes ne sont pas constantes et sont, au contraire, constituées de *forces pulsantes.*

On considérera (voir fig. 1) que chaque essieu donne lieu à un effet qui est la superposition

— d'une charge constante mobile P_c

— et d'une charge alternée mobile $Q \cos \omega t$.

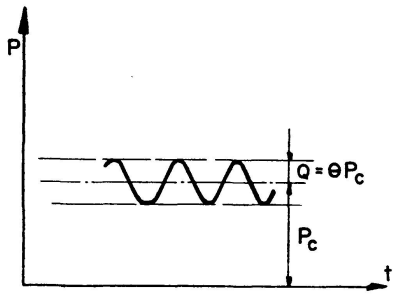


Fig. 1.

L'amplitude de la force alternée Q est ainsi une fraction θ de P_c. La force pulsante mobile peut donc s'écrire

$$P_c(1 + \theta \cos \omega t) \equiv P.$$

Il faut attirer l'attention ici sur le fait que:

ω est bien la pulsation de la force transmise par les roues au pont (et non de la caisse de la locomotive par exemple). Elle dépend de la constante élastique des ressorts du matériel roulant notamment, et est caractéristique pour un véhicule donné.

θ doit également être caractéristique d'un véhicule donné. Dans certains cas toutefois, θ dépend de la vitesse. C'est le cas pour le déséquilibre dû aux balourds des roues des locomotives à vapeur.

3. Cas d'une force mobile P d'intensité constante

Soit une poutre de section constante Ω de densité γ et de longueur l simplement appuyée et parcourue par la force d'intensité constante P_c animée d'une vitesse v (voir fig. 2).

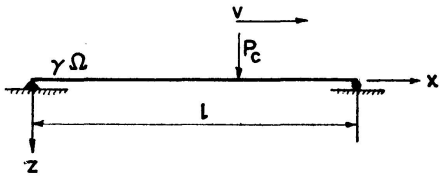


Fig. 2.

L'expression générale des vibrations produites, exprimée en flèches est, d'après TIMOSHENKO[1]).

$$(z_{P_c})_d = \frac{2\,g\,P_c\,l^3}{\gamma\Omega\,\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}}{n^2\,(n^2\,\pi^2\,a^2 - v^2\,l^2)}\sin\frac{n\,\pi\,v\,t}{l}$$
$$- \frac{2\,g\,P_c\,l^4\,v}{\gamma\Omega\,\pi^3\,a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}}{n^3\,(n^2\,\pi^2\,a^2 - v^2\,l^2)}\sin\frac{n^2\,\pi^2\,a\,t}{l^2}, \tag{1}$$

où
$$a = \sqrt{\frac{E\,I\,g}{\gamma\Omega}}.$$

En étudiant la flèche de la section médiane, et en exprimant le temps t correspondant à la position de la force sur le pont en fraction i de l/v, soit $t = i\,\frac{l}{v}$, l'expression ci-dessus se transforme aisément en:

$$(z_{P_c})_d = \frac{2\,P_c\,l^3}{E\,I\,\pi^4}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2\,(n^2 - \pi^2\,K^2)}\left(\sin n\,i\,\pi - \frac{\pi K}{n}\sin n^2\frac{i}{K}\right) \tag{2}$$

pour laquelle on a posé
$$K = \frac{v}{l\,\omega_0}$$

où ω_0 est la pulsation propre de la poutre, qui a pour valeur:

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\,I\,g}{\gamma\Omega}}.$$

En fait, il faut tenir compte de ce que la charge P_c modifie la pulsation propre du pont.

Dès lors, si $G = \gamma\Omega\,l$ est le poids propre du pont, la *pulsation propre du pont chargé* vaut:

$$\omega_0' = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\,I\,g\,l}{G + P_c}}. \tag{3}$$

Dans l'expression (2) il y aura donc lieu de remplacer

$$K = \frac{v}{l\,\omega_0} \quad \text{par} \quad \boxed{K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}}. \tag{4}$$

Comme nous le verrons, ce paramètre K' revêtera une grande importance.

---

[1]) S. TIMOSHENKO: Théorie des vibrations. Paris et Liège, Librairie Polytechnique Ch. Béranger.

On sait que la flèche statique maximum due à P vaut:

$$(z_P)_{s_{max}} = \frac{P\,l^3}{48\,E\,I}. \tag{5}$$

Dès lors le coefficient de majoration dynamique pour la charge roulante d'intensité constante P_c vaut:

$$\Phi_{P_c} = \frac{(z_{P_c})_d}{(z_P)_{s_{max}}} = \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2\,(n^2-\pi^2\,K^2)} \left(\sin n\,i\,\pi - \frac{n\,K'}{n} \sin n^2 \frac{i}{K'}\right). \tag{6}$$

Il arrive fréquemment, dans ce genre de travail que, pour donner une orientation à l'étude, on se limite au premier harmonique. Nous verrons plus loin ce qu'il en est exactement. Si celà était admissible, il serait logique de rapporter entre eux, d'une part la valeur (2) de $(z_{P_c})_d$ pour $n=1$, et d'autre part, le premier terme de l'expression sous forme de série de Fourier de la flèche statique, soit:

$$(z_P)_{s_{max}} = \frac{2\,P\,l^3}{E\,I\,\pi^4}.$$

Dès lors, le coefficient dynamique Φ_{P_c} aurait pour expression

$$\Phi_{P_c} = \frac{1}{1-\pi^2\,K'^2} \left(\sin i\,\pi - \pi\,K' \sin \frac{i}{K'}\right). \tag{7}$$

Cette expression simple nous permettait de nous livrer au calcul manuel des valeurs de Φ_{P_c} en fonction de i pour différentes valeurs de K' dont la mise en graphique donne l'allure de principe de la fig. 3.

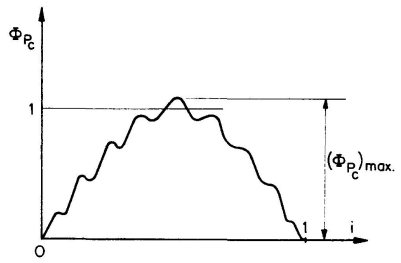


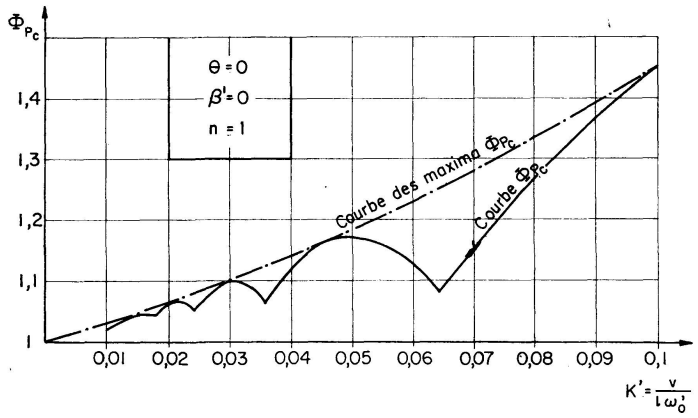
Fig. 3.

Pour chacun de ces diagrammes, nous avons relevé la valeur de $(\Phi_{P_c})_{max}$, ce qui nous a permis de dresser le graphique de $(\Phi_{P_c})_{max}$ en fonction de K' reproduit à la Planche I. Comme on peut le voir, la courbe se présente sous forme d'ondes.

De cette courbe, on peut encore chercher à déduire une courbe des maxima de $(\Phi_{P_c})_{max}$. Celle-ci a pour expression:

$$(\Phi_{P_c})_{max\,max} = \frac{1}{1-\pi\,K'}.$$

PLANCHE I. Variation du coefficient dynamique Φ_{P_c} en fonction du coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile d'intensité constante P_c. Limitation au premier harmonique



Celle-ci n'a bien sûr qu'un intérêt purement théorique. Il est toutefois intéressant de calculer la valeur de $(\Phi_{P_c})_{max}$ lorsque $K' = \frac{1}{\pi}$, c'est-à-dire lorsque $(\Phi_{P_c})_{max\,max} = \infty$.

Calculons la vraie valeur de la fonction $(\Phi_P)_{max}$ pour $K' = \frac{1}{\pi}$ par la Règle de l'Hospital.

On a successivement

$$\frac{\partial}{\partial K}\left[\sin i\pi - \pi K \sin\frac{i}{K}\right] = -\pi K \cos\frac{i}{K}\left(\frac{-i}{K^2}\right) - \pi \sin\frac{i}{K},$$

$$\frac{\partial}{\partial K}(1 - \pi^2 K^2) = -2\pi^2 K,$$

$$(\Phi_{P_c})_{max} = \left[\frac{\pi\frac{i}{K}\cos\frac{i}{K} - \pi\sin\frac{i}{K}}{-2\pi^2 K}\right]_{K=\frac{1}{\pi}} = \frac{\sin i\pi - i\pi\cos i\pi}{2}.$$

La valeur de i donnant le maximum de $(\Phi_{P_c})_{max}$ est telle que:

$$\frac{\partial(\Phi_{P_c})_{max}}{\partial i} = \frac{1}{2}[\pi\cos i\pi + i\pi^2 \sin i\pi - \pi\cos i\pi] = 0,$$

soit:

$$i \sin i\pi = 0.$$

Cette équation transcendante est vérifiée pour toute valeur entière de i

$$\text{Pour } i = 0 \quad (\Phi_{P_c})_{max} = 0.$$

$$\text{Pour } i = 1 \quad (\Phi_{P_c})_{max} = \frac{\pi}{2}.$$

Les valeurs de i supérieures à l'unité n'ont pas de sens physique. Donc, pour $K' = \frac{1}{\pi}$, le maximum de la fonction $(\Phi_{P_c})_{max}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

4. Cas d'une force alternée mobile $\Theta P \cos \omega t$

La loi générale de déformation du pont est alors

$$z_{\theta P \cos \omega t} = \frac{\theta P l^3}{E I \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi x}{l} \left[\frac{\sin\left(\frac{n \pi v}{l} + \omega\right) t}{n^4 - (\beta + n \alpha)^2} + \frac{\sin\left(\frac{n \pi v}{l} - \omega\right) t}{n^4 - (\beta - n \alpha)^2} \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-n^2 \alpha^2 + (n^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-n^2 \alpha^2 + (n^2 + \beta)^2} \right) \right], \tag{8}$$

où
$$\alpha = \frac{v l}{\pi a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\frac{2 l^2}{\pi a}}{\frac{2 \pi}{\omega}}.$$

Or,
$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E I g}{\gamma \Omega}} = \frac{\pi^2 a}{l^2}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{l^2}{\pi^2} \omega_0.$$

Dès lors,
$$\alpha = \frac{\pi v}{l \omega_0}, \qquad \text{soit} \quad \alpha = \pi K,$$
$$\beta = \frac{l^2 \omega}{\pi^2 a}, \qquad \text{soit} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Ce paramètre β revêtera également une grande importance, ou mieux encore le paramètre

$$\boxed{\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}}. \tag{9}$$

qui représente le rapport entre la pulsation forcée de la charge mobile et la pulsation propre du pont chargé.

En conséquence, pour la section médiane, on aura:

$$z_{\theta P \cos \omega t} = \frac{\theta P l^3}{E I \pi^4} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\frac{\sin\left(n \pi + \frac{\beta'}{K'}\right) i}{n^4 - (\beta' + n \pi K')^2} + \frac{\sin\left(n \pi - \frac{\beta'}{K'}\right) i}{n^4 - (\beta' - n \pi K')^2} \right.$$
$$\left. - \frac{\pi K'}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 - \beta')^2} + \frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 + \beta')^2} \right) \right]. \tag{10}$$

Remarquons que si nous faisons $\beta = 0$ dans l'expression ci-dessus, on retrouve en toute logique, au coefficient θ près, l'expression (2) établie dans le cas de la charge d'intensité constante.

5. Expression générale du coefficient de majoration dynamique dans le cas d'une force pulsante mobile

Examen de l'influence des divers paramètres

Par la superposition des effets, nous aurons d'une manière générale:

$$z_P = z_{P_c} + z_{\theta P \cos \omega t} = \Phi_P (z_P)_{s_{max}}.$$

$$\text{D'où: } \Phi_P = \frac{48}{\pi^4} \Bigg\{ \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2 (n^2 - \pi^2 K'^2)} \left(\sin n i \pi - \frac{\pi K'}{n} \sin n^2 \frac{i}{K'} \right)$$
$$+ \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \theta \Bigg[\frac{\sin \left(n \pi + \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' + n \pi K')^2} + \frac{\sin \left(n \pi - \frac{\beta'}{K'} \right) i}{n^4 - (\beta' - n \pi K')^2} \tag{11}$$
$$- \frac{\pi K'}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 - \beta')^2} + \frac{\sin \frac{n^2 i}{K'}}{-(n \pi K')^2 + (n^2 + \beta')^2} \right) \Bigg] \Bigg\}.$$

L'exploitation numérique de cette formule exigeait l'intervention d'un ordinateur électronique. C'est grâce au Laboratoire de Calcul de l'Université Libre de Bruxelles que ceci fut possible. Il fallait en effet calculer pour différentes valeurs de θ, β' et K' les valeurs de Φ_P en fonction de i, puis relever les valeurs maxima de Φ_P pour chacune de ces courbes afin de pouvoir dresser les diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de K'.

Dans le temps de calcul-machine qui nous était imparti, nous nous sommes limités aux valeurs suivantes:

Pour θ: 0; (force d'intensité constante),
0,15; (cas le plus courant en pratique),
0,30; (cas de locomotives mal équilibrées ou de plats dans les bandages des roues).

Pour $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$: 0; 0,5; 1; 2; 5; 10.

Pour $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$:

0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200
0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325
0,0350	0,0400	0,0450	0,0500	0,0500
0,0700	0,0800	0,0900	0,1000	0,1100
0,1200	0,1300	0,1400	0,1500	0,1600
0,1700	0,1800	0,1900	0,2000	0,2500

et $1/\pi$. (Les valeurs de K' de 0,01 à 0,2 constituent la gamme des valeurs susceptibles d'être rencontrées en pratique, les valeurs plus élevées ne présentent qu'un intérêt théorique.)

Enfin, nous avons fait varier i de 1/50 à 50/50 par bonds de 1/50.

De plus, les calculs à l'ordinateur nous ont montré qu'on ne pouvait se limiter à l'harmonique $n = 1$. En fait, en s'imposant une précision de $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ sur le coefficient dynamique Φ, il a fallu parfois monter jusqu'à des harmoniques d'ordre $n = 19$, les harmoniques d'ordre 3, 5 et 7 jouant généralement un rôle important.

Nous avons représenté à la Planche II, à titre d'exemple les diagrammes

PLANCHE II. Exemples de variation du coefficient dynamique Φ_P lors du parcours du pont par la force mobile P pour les valeurs particulières 0,025 et 0,05 du coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$.

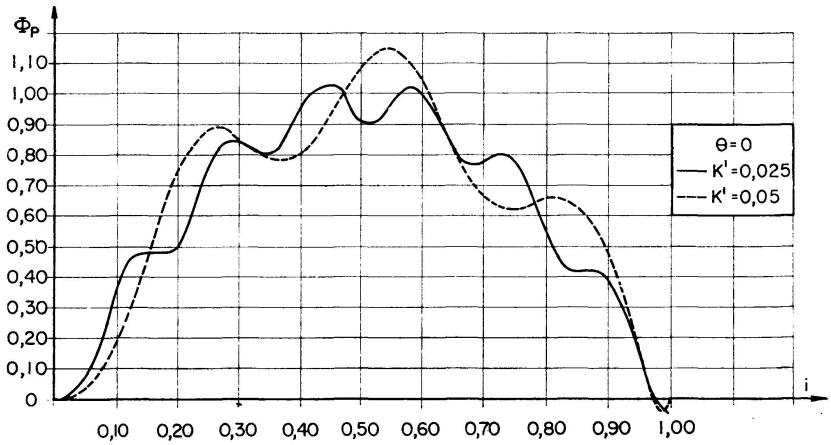
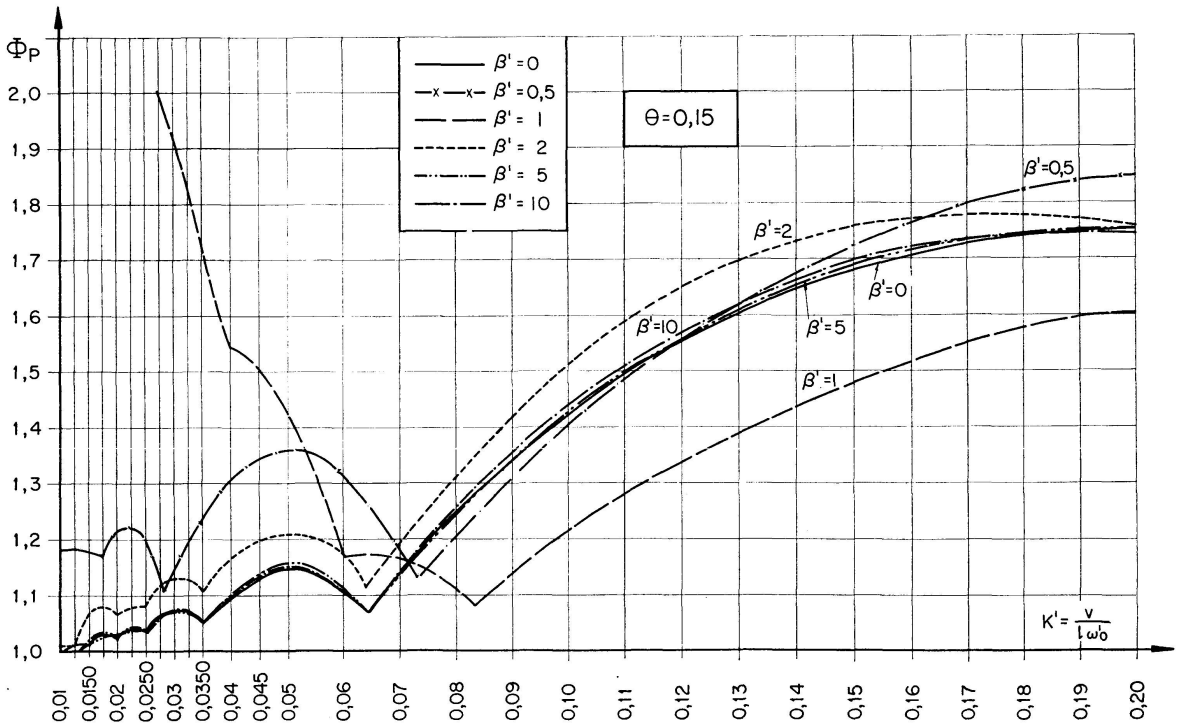


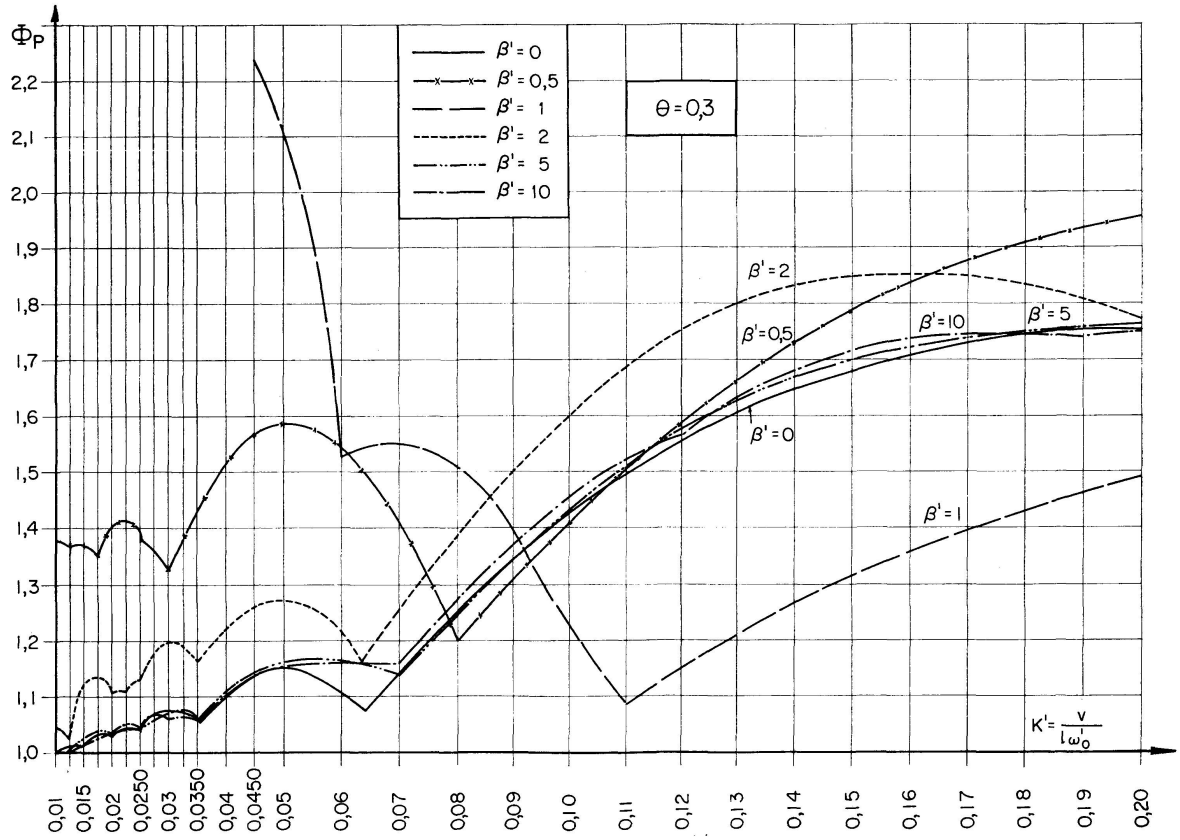
PLANCHE III. Diagramme des maxima du coefficient dynamique Φ_P en fonction du coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$ pour différentes valeurs du paramètre $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile $P_c(1 + \theta \cos \omega t)$ avec $\theta = 0{,}15$.



de Φ_P en fonction de i, c'est-à-dire du coefficient dynamique en fonction de la position de la force sur le pont, dans le cas d'une force non pulsante ($\theta = 0$) et celà pour deux valeurs du coefficient K', soit $K' = 0{,}025$ et $K' = 0{,}05$. On reconnaît l'allure des diagrammes d'enregistrement de la flèche d'un tablier de pont sous l'action d'un mobile se déplaçant sur celui-ci. On remarquera que le maximum n'a pas lieu à mi-portée, ce qui serait tout à fait fortuit.

Si, pour chaque courbe de Φ_P en fonction de i, on retient la valeur maximale de Φ_P, on peut dresser les diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de K', pour $\theta = 0{,}15$ (Planche III) et pour $\theta = 0{,}3$ (Planche IV) avec chaque fois les

PLANCHE IV. Diagramme des maxima du coefficient dynamique Φ_P en fonction du coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'}$ pour différentes valeurs du paramètre $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$ dans le cas d'une force mobile $P_c(1 + \theta \cos \omega t)$ avec $\theta = 0{,}3$.



différentes courbes correspondant aux valeurs envisagées pour le paramètre β'. On remarquera que ces courbes présentent toujours l'allure en forme d'ondes que nous avons déjà pu voir à la Planche I dans le cas particulier d'une force d'intensité constante et où nous nous étions limités volontairement au premier harmonique.

L'enveloppe de ces ondes augmentent avec les valeurs de K' sauf pour les valeurs de β' voisinnes ou égales à l'unité.

En fait, grâce à l'abandon de la traction vapeur, les valeurs pratiques de

β' sont nettement au-dessus de l'unité et atteignent couramment les valeurs envisagées 5 et 10. Or, on s'aperçoit que les courbes de $\Phi_{P\,max}$ en fonction de K' pour $\beta' = 5$ et $\beta' = 10$ sont en fait très voisinnes et presque confondues pour des valeurs normales de θ. Cette constatation doit avoir, à nos yeux, un intérêt pratique certain.

Afin de mieux illustrer ce que nous venons de dire nous avons établi des diagrammes de $(\Phi_P)_{max}$ en fonction de $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'}$, et celà pour $\theta = 0{,}15$ et $K' = 0{,}05$ à la Planche V, ainsi que pour $\theta = 0{,}15$ et $K' = 0{,}10$ à la Planche VI. On voit

PLANCHE V. Exemple de variation du coefficient dynamique Φ_P en fonction du rapport β' entre la pulsation forcée due à la charge mobile $P_c(1 + \theta \cos \omega t)$ et la pulsation propre du pont chargé. Cas particulier où $\theta = 0{,}15$ et $K' = 0{,}05$.

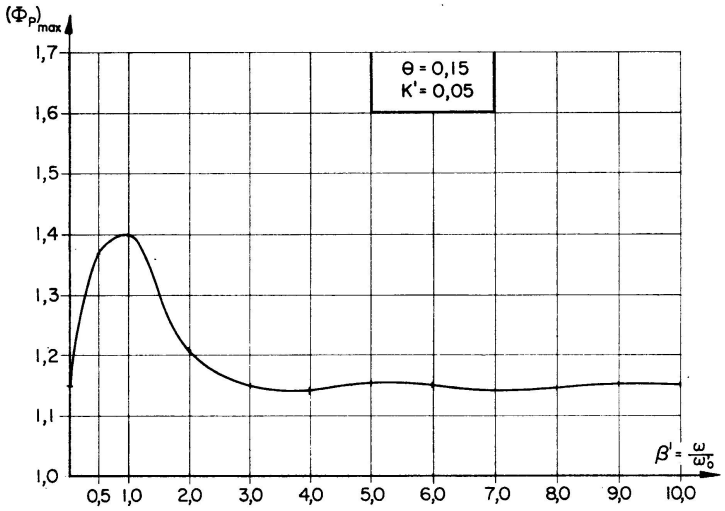
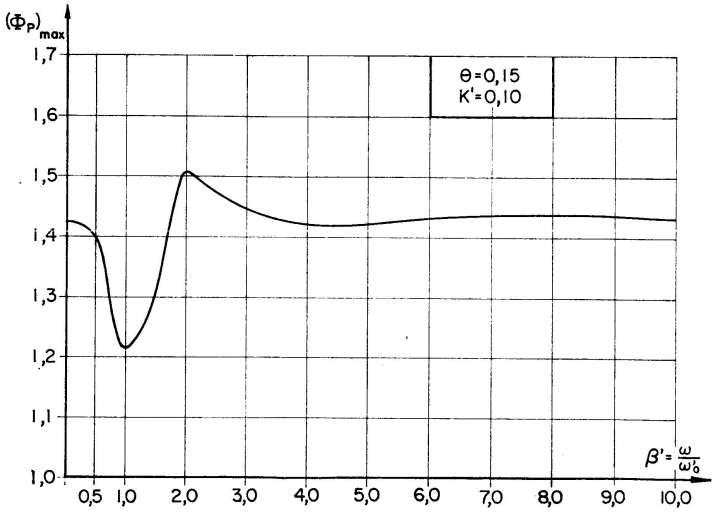


PLANCHE VI. Exemple de variation du coefficient dynamique Φ_P en fonction du rapport β' entre la pulsation forcée due à la charge mobile $P_c(1 + \theta \cos \omega t)$ et la pulsation propre du pont chargé. Cas particulier où $\theta = 0{,}15$ et $K' = 0{,}10$.



que les valeurs de $(\Phi_P)_{max}$ ne sont plus guère influencées par β' lorsque $\beta' \geqq 4$, alors que les perturbations sont grandes au voisinage de $\beta' = 1$.

En ce qui concerne ce cas particulier où $\beta' = 1$ (c'est-à-dire lorsqu'il y a égalité entre la fréquence forcée de la charge pulsante et la fréquence propre du pont chargé, donc résonnance), on aura certainement remarqué aux Planches III et IV, combien les valeurs calculées de $(\Phi_P)_{max}$ sont élevées pour les faibles valeurs de K', c'est-à-dire notamment lorsque le mobile se déplace à petite vitesse, ou lorsque la portée du pont est grande. En fait, les valeurs réelles qui seraient mesurées n'atteindraient pas celles aussi élevées obtenues par le calcul grâce au jeu de l'amortissement interne due à ce que d'aucuns appellent, la viscosité du tablier. Nous croyons cependant devoir présentement émettre l'avis que, plus les valeurs de K' sont élevées, c'est-à-dire notamment dans le cas où les mobiles sont animés de grande vitesse (or c'est bien là l'objet de notre étude), moins les phénomènes d'amortissement interne, ou de viscosité du tablier, ont le temps de se manifester. Les valeurs calculées se rapprocheraient alors des valeurs réelles et plus particulièrement, nous le verrons ci-dessous, lorsque, au lieu de considérer une, et une seule, charge concentrée, on envisage le cas plus pratique où on a deux, ou éventuellement plusieurs essieux.

6. Expression du coefficient de majoration dynamique dans le cas de deux forces pulsantes mobiles identiques

Conclusions pratiques des calculs effectués

Si les expressions données plus haut permettent, à notre avis, une orientation dans l'étude qui nous occupe, nous nous devons de rechercher à nous approcher le plus possible des conditions réelles.

C'est ainsi que nous envisageons le cas de deux forces pulsantes mobiles identiques $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ distantes de λl (voir fig. 4), lequel correspond, par

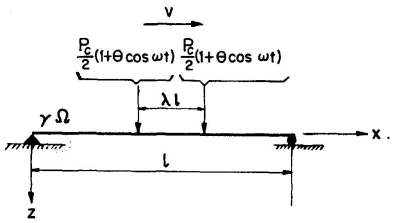


Fig. 4.

exemple, à une locomotive à deux bogies, chaque bogie, bien qu'étant muni de deux ou trois essieux, pouvant généralement être assimilé à une seule charge (sauf pour les éléments courts tels que les longrines) par la répartition des pressions due aux traverses et au ballast, ou, dans le cas d'une «pose directe» de la voie (c'est-à-dire sans ballast), par le jeu des semelles en maté-

riau amortisseur (liège – néoprène) qui sont posées entre le rail et les selles d'appui d'une part, et entre les selles d'appui et le tablier proprement dit d'autre part.

Dans ces conditions, par simple superposition des effet, des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et en tenant compte du décalage λl, on obtient à partir de l'expression (11):

$$\begin{aligned}\Phi'_{2(P/2)} = \frac{48}{\pi^4}\Bigg\{ & \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-\pi^2K'^2)}\Bigg(\sin n i\pi - \frac{\pi K'}{n}\sin n^2\frac{i}{K} \\ & + \sin n(i-\lambda)\pi - \frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}\Bigg) \\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\theta}{2}\Bigg[\frac{\sin\left(n\pi+\frac{\beta'}{K'}\right)i}{n^4-(\beta'+n\pi K')^2} + \frac{\sin\left(n\pi-\frac{\beta'}{K'}\right)i}{n^4-(\beta'-n\pi K')^2} \\ & + \frac{\sin\left(n\pi+\frac{\beta'}{K'}\right)(i-\lambda)}{n^4-(\beta'+n\pi K')^2} + \frac{\sin\left(n\pi-\frac{\beta'}{K'}\right)(i-\lambda)}{n^4-(\beta'-n\pi K')^2} \\ & - \frac{\pi K'}{n}\Bigg(\frac{\sin\frac{n^2-i}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2} + \frac{\sin\frac{n^2-i}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2} \\ & + \frac{\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2} + \frac{\sin\frac{n^2(i-\lambda)}{K'}}{-(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2}\Bigg)\Bigg]\Bigg\},\end{aligned} \tag{12}$$

où i définit la position de la force de droite à la fig. 4.

En posant:

$$\begin{aligned} A &= n\pi+\frac{\beta'}{K'}, & D &= n^4-(\beta'-n\pi K')^2, \\ B &= n\pi-\frac{\beta'}{K'}, & E &= -(n\pi K')^2+(n^2-\beta')^2, \\ C &= n^4-(\beta'+n\pi K')^2, & F &= -(n\pi K')^2+(n^2+\beta')^2 \end{aligned} \tag{13}$$

et en transformant l'expression ci-dessus au moyen des formules de Simpson, il vient:

$$\begin{aligned}\Phi'_{2(P/2)} = \frac{48}{\pi^4}\Bigg\{ & \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2(n^2-\pi^2K'^2)}\Bigg(\sin\frac{n\pi}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{n\lambda\pi}{2} \\ & - \frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'} \\ & + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \theta\Bigg[\frac{\sin\frac{A}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{A}{2}\lambda}{C} + \frac{\sin\frac{B}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{B}{2}\lambda}{D} \\ & - \frac{\pi K'}{n}\left(\frac{1}{E}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'} + \frac{1}{F}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{14}$$

La relation (14) ci-dessus représente en fait le rapport entre la flèche dynamique due au mobile composé des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et la flèche statique maximum due à la force P_c, soit

$$\Phi'_{2(P/2)} = \frac{(w_{2(P/2)})_{dyn}}{(w_P)_{stat\,max}}.$$

Or, en fait, ce que nous devons avoir, c'est le rapport entre la flèche dynamique due au mobile composé de deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ et la flèche statique maximum due à ce même mobile, soit:

$$\Phi_{2(P/2)} = \frac{(w_{2(P/2)})_{dyn}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}}.$$

Dès lors, on a:

$$\Phi_{2(P/2)} = \Phi'_{2(P/2)}\frac{(w_P)_{stat\,max}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}}.$$

Or, on sait que:

$$(w_P)_{stat\,max} = \frac{P\,l^3}{48\,E\,I},$$

$$(w_{2(P/2)})_{stat\,max} = \frac{P\,l^3}{96\,E\,I}(1-\lambda)\,[3-(1-\lambda)^2] \qquad \text{lorsque } \lambda \leqq 0{,}5.$$

D'où
$$\frac{(w_P)_{stat\,max}}{(w_{2(P/2)})_{stat\,max}} = \frac{2}{(1-\lambda)\,[3-(1-\lambda)^2]}.$$

Et l'expression du coefficient de majoration dynamique du cas est:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_{2(P/2)} = \frac{96}{\pi^4(1-\lambda)\,[3-(1-\lambda)^2]}\Bigg\{&\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{2}{n^2(n^2-\pi^2K'^2)}\Bigg(\sin\frac{n\pi}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{n\lambda\pi}{2}\\ &-\frac{\pi K'}{n}\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}\\ &+\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\theta\Bigg[\frac{\sin\frac{A}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{A}{2}\lambda}{C}+\frac{\sin\frac{B}{2}(2i-\lambda)\cos\frac{B}{2}\lambda}{D}\\ &-\frac{\pi K'}{n}\left(\frac{\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}}{E}+\frac{\sin\frac{n^2(2i-\lambda)}{2K'}\cos\frac{n^2\lambda}{2K'}}{F}\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}} \tag{15}$$

A partir de cette relation, on peut dresser les diagrammes de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i. A titre d'exemple, nous représentons à la Planche VII la courbe de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i pour $\lambda = 0{,}25$ (l'entredistance des bogies est le quart de la portée du pont), $\theta = 0$, $\beta = 0$ et $K' = 0{,}025$. En comparant cette courbe avec celle obtenue pour Φ_P pour les mêmes valeurs de θ, β' et K' et représentée

PLANCHE VII. Exemple de variation du coefficient dynamique $\Phi_{2(P/2)}$ lors du parcours du pont par deux charges mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ distantes de λl pour les valeurs particulières suivantes: $\lambda=0{,}25;\ \theta=0;\ \beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}=0;\ K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}=0{,}025.$

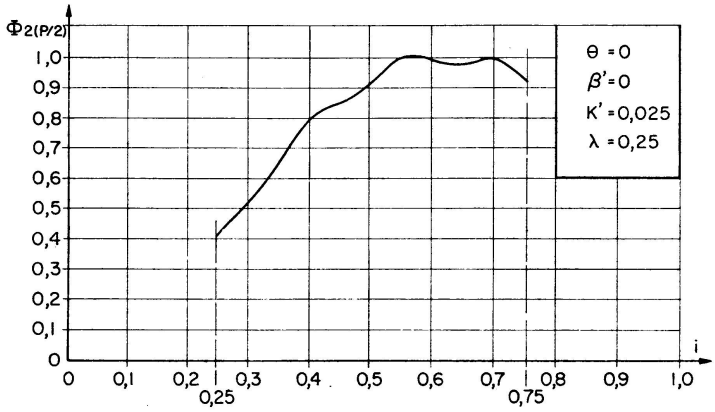
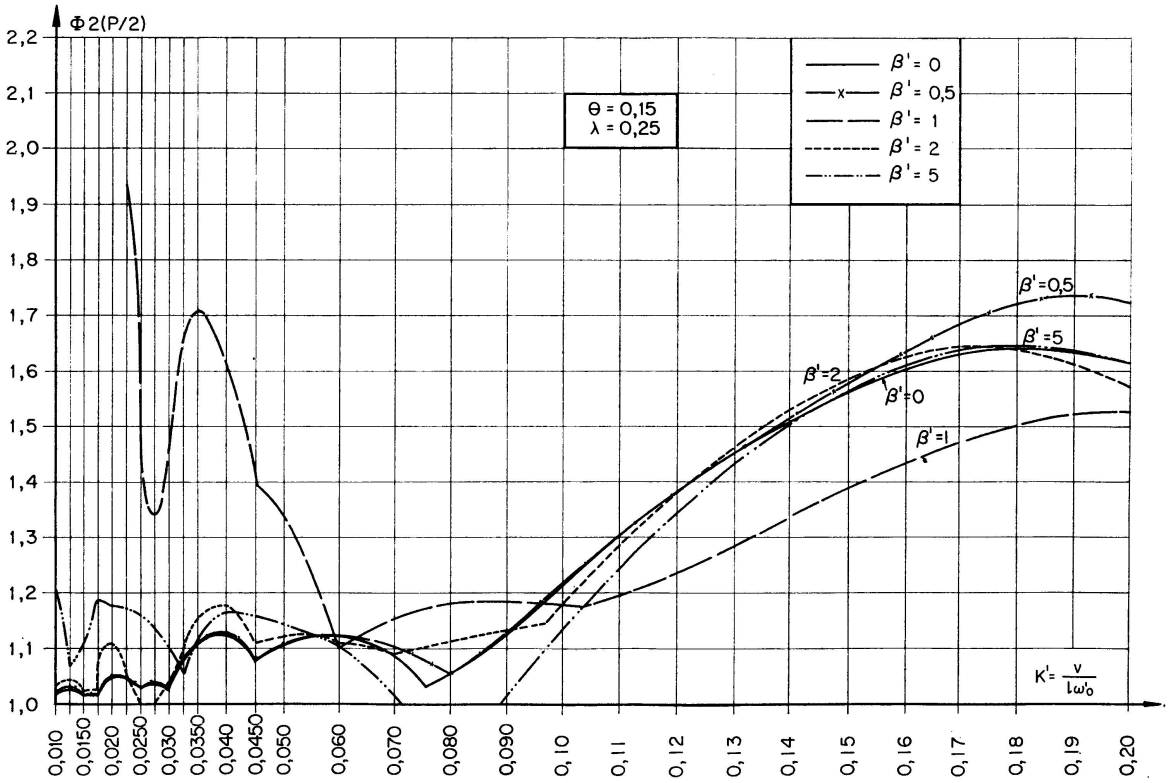


PLANCHE VIII. Diagramme des maxima du coefficient dynamique $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction du coefficient $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$ pour différentes valeurs du paramètre $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$ dans le cas de deux forces mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$ distantes de λl avec $\lambda=0{,}25$ et $\theta=0{,}15$.



à la Planche II, on remarquera que, dans le cas des deux forces $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$, les ondulations sont fortement atténuées et que la valeur de l'extremum est légèrement plus faible que dans le cas de la force concentrée unique $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.

Si à présent, toujours pour $\lambda = 0{,}25$ (nous n'avons pas envisagé d'autres valeurs de λ afin de respecter le temps de calcul à l'ordinateur qui nous était imparti), on recherche toutes les valeurs maximales de $\Phi_{2(P/2)}$ pour chaque courbe de $\Phi_{2(P/2)}$ en fonction de i, on peut dresser le diagramme de la Planche VIII, pour lequel nous avons mené les calculs pour les valeurs pratiques suivantes des paramètres θ, β' et K':

$$\theta = 0{,}15,$$
$$\beta' = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2 \text{ et } 5,$$

ainsi que toutes les valeurs de K' indiquées plus haut au paragraphe 5.

Cette Planche est, à nos yeux, d'un très grand intérêt pratique. En effet, elle nous indique clairement que, pour les valeurs de θ et λ envisagées, *en dehors des phénomènes de résonnance, la valeur du coefficient de majoration dynamique reste inférieure à 1,2 jusqu'à des valeurs de K' voisinnes de 0,10. Au-delà de cette valeur de K', le coefficient dynamique subit un accroissement appréciable, mais cependant nettement moindre que dans le cas de la force concentrée unique* (voir Planche III pour la comparaison). Ce fait semble se confirmer par les essais expérimentaux en cours.

7. Exploitation pratique de la présente étude

Nous sommes d'avis que des diagrammes donnant le coefficient de majoration dynamique Φ en fonction du coefficient K', établis à partir de mesurages et extrapolés par analogie avec la théorie exposée ci-dessus, peuvent facilement être exploités par les praticiens du calcul des ponts.

En effet, la valeur du coefficient K' se calcule aisément.

On a successivement:

v = la vitesse envisagée dans le présent et dans le futur pour la ligne devant emprunter le pont à calculer.
l = la portée du pont.
ω_0' = la pulsation propre du pont chargé.

Or, celle-ci peut se calculer avec une excellente approximation par la formule de Rayleigh donnant la fréquence propre f du pont chargé (en Hz) à partir de la flèche statique maximum $(w_{stat})_{max}$ (en cm) sous la charge à considérer:

$$f \equiv \frac{\omega_0'}{2\pi} = \frac{5{,}6}{\sqrt{(w_{stat})_{max}}}.$$

Dans ces conditions, si les services du matériel roulant peuvent donner la gamme des valeurs de θ et ω relatives aux véhicules qu'ils comptent utiliser dans le présent et dans l'avenir, il suffira à l'auteur de projet de lire la valeur du coefficient dynamique sur les diagrammes précités.

Les courbes de ces diagrammes ne seraient pas nécessairement les enveloppes des mesures effectuées, mais pourraient découler par exemple avec un fractile de 5%, de l'exploitation statistique de ces mesures, pour autant que les maxima mesurés soient encore compatibles avec la sécurité.

8. Exemple numérique

Soit un pont-rails de 30 mètres de portée destiné à être parcouru par des locomotives à deux bogies distants d'environ 7,50 m et animées d'une vitesse de 150 km/h et pour lesquels la variation de charge par bogie est de $\pm 15\%$ à une fréquence de 40 Hz.

La flèche calculée sous charges du pont correspond au $\frac{1}{900}$ de la portée.

Dès lors, on a successivement:

Pulsation propre du pont chargé:

$$\omega_0' = \frac{2\pi\, 5{,}6}{\sqrt{\frac{3000}{900}}} = 19{,}22 \qquad \text{(fréquence} = 3{,}07\,\text{Hz)}.$$

Pulsation forcée: $\omega = 2\pi\, 40 = 251{,}5.$

Coefficient $\beta' = \frac{\omega}{\omega_0'} = \frac{251{,}5}{19{,}22} = 13{,}05 > 4.$

Coefficient $K' = \frac{v}{l\,\omega_0'} = \frac{150 \cdot 10^2}{3{,}6 \cdot 30 \cdot 10^2 \cdot 19{,}22} = 0{,}0722.$

En se référant à la Planche VIII, on voit que pour $K' = 0{,}0722$ et $\beta' = 5$ (on a vu plus haut que pour des valeurs de β' supérieures à 4 les fluctuations du coefficient dynamique sont faibles) la valeur du coefficient dynamique est inférieure à 1,2.

Ce n'est que pour des vitesses supérieures à 200 km/h que celui-ci prend des valeurs plus élevées.

On se rend compte de la simplicité du présent calcul. Cette façon de faire nous apparaît particulièrement commode pour les auteurs de projet.

9. Remerciements

Nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance à Monsieur le Professeur P. Hontoy, Président de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université Libre de Bruxelles, qui nous a autorisé à faire appel aux ordinateurs électroniques de l'Université pour nos calculs.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur A. Paduart qui a bien voulu patronner la présente étude.

Nos remerciements vont également à Messieurs A. DEHAEN et A. SOETE, Ingénieurs en Chef à la S.N.C.B., qui nous ont autorisé à la publier, ainsi qu'à Monsieur P. DEDIEU, Assistant au Laboratoire de Calcul de l'Université de Bruxelles, qui a bien voulu se charger du traitement à l'ordinateur électronique de nos formulations.

Les principales notations utilisées

P	force concentrée mobile.
G	poids propre du pont.
i	fraction du temps de parcours du pont définissant la position de la force P.
l	portée du pont.
n	ordre d'un harmonique.
v	vitesse de la force P sur le pont.
w	flèche du pont à mi-portée.
z	flèche du pont en un point quelconque.
ω	pulsation de la force mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.
ω_0	pulsation propre du pont.
ω_0'	pulsation propre du pont chargé.
$\beta=\frac{\omega}{\omega_0}$; $\beta'=\frac{\omega}{\omega_0'}$; $K=\frac{v}{l\,\omega_0}$; $K'=\frac{v}{l\,\omega_0'}$.	
Φ_P	coefficient dynamique dans le cas d'une force mobile $P_c(1+\theta\cos\omega t)$.
$\Phi_{2(P/2)}$	coefficient dynamique dans le cas de deux forces mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$.
λ	fraction de l définissant la distance séparant les deux forces mobiles $\frac{P_c}{2}(1+\theta\cos\omega t)$.
Φ_{P_c}	coefficient dynamique dans le cas d'une force mobile d'intensité constante.
E	module de Young.
I	moment d'inertie.
Ω	aire d'une section transversale droite.
γ	poids spécifique.

Résumé

L'augmentation des vitesses des convois ferroviaires pose aux ingénieurs des chemins de fer une grande diversité de problèmes parmi lesquels il y a le comportement des tabliers de pont. L'auteur aborde le problème sur le plan théorique et examine l'influence des principaux paramètres en jeu. Le traitement à l'ordinateur électronique des formules élaborées a permis l'établissement de diagrammes donnant le coefficient dynamique en fonction de ces paramètres. Sur cette base, l'auteur propose une méthode pratique pour le calcul du coefficient dynamique.

Zusammenfassung

Die Geschwindigkeitserhöhung der Züge stellt den Eisenbahningenieur vor ein breites Feld von Problemen, unter denen das Verhalten der Brückenplatte zu erwähnen ist. Der Verfasser nimmt das Problem theoretisch in Angriff und prüft den Einfluß der Hauptparameter. Die Behandlung der hergeleiteten Formeln mittels des Elektronenrechners hat eine graphische Auswertung, die den Stoßzuschlag (dynamischer Beiwert) in Funktion der Parameter angibt, möglich gemacht. Auf dieser Grundlage schlägt der Verfasser ein praktisches Verfahren zur Berechnung des Stoßzuschlages vor.

Summary

The increase in the speeds of railway trains confronts railway engineers with a wide variety of problems, among which there is the behaviour of bridge decks. The author approaches the problem from the theoretical angle and considers the effect of the principal parameters concerned. Treatment in an electronic computer of the formulae that have been worked out has made it possible to prepare diagrams giving the dynamic coefficient in relation to these parameters. On this basis, the author suggests a practical method for calculating the dynamic coefficient.