Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen

Autor(en): **Deutsch, I.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **32 (1972)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24941

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Berechnung der Rissbildung bei auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen

Analysis of Cracking in Reinforced Concrete Members Subjected to Bending and Shear

Calcul de la fissuration des éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant

I. DEUTSCH
Dozent Dr. Ing., Technische Hochschule Timişoara

1. Einführung

Die Rissbildung in gezogenen und auf reine Biegung beanspruchten Bauteilen wurde weitgehend untersucht. Für den am häufigsten auftretenden Fall der Biegung mit Querkraft trifft dies aber leider nicht zu. Eine Erklärung dafür könnte die Tatsache liefern, dass auch die Bemessung der Querbewehrung noch Gegenstand von Diskussionen ist und das Problem der Rissbildung erst nach einer relativen Klärung des Bruchsicherheitsnachweises angeschnitten wurde.

Der Verfasser setzt sich in dieser Arbeit zum Ziel, ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher bezüglich des Bruchverhaltens von auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteilen, Formeln für die Berechnung des Rissabstandes und der Rissweite abzuleiten. Diese Grössen werden gesondert gewonnen, je nachdem ob der Bruch durch das Biegemoment oder durch die Querkraft verursacht wird.

Dieser Aufsatz behandelt nur den ersten Fall, also die Rissbildung der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Bauteile, die durch Biegung zum Bruch kommen. Die im Text vorkommenden Bezeichnungen wurden im Anhang zusammengefasst.

2. Die allgemeinen Gleichungen für den Rissabstand und die Rissweite

2.1. Grundlegende Annahmen

Die Ableitung der allgemeinen Gleichungen stützt sich auf verschiedene Annahmen. So wird vorausgesetzt, dass sich bei der Rissbildung (Stadium Ia) die Betondruckzone und die Zugbewehrung vollkommen elastisch verhalten. Dagegen wird für die Betonzugzone eine völlige Plastifizierung angenommen, trotzdem dies nicht ganz der Wirklichkeit entspricht. Es wird ferner angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben.

Nach der Rissbildung (Stadium II) sind im Rissquerschnitt nur der gedrückte Beton und die vollkommen elastische Zugbewehrung aktiv. Zwischen den Rissen ist die Zusammenarbeit Beton-Bewehrung gesichert. Die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte wird beibehalten. Die Verteilung der Schubspannungen wird in der Druckzone parabolisch und in der Zugzone, allerdings nur bis zur Achse der Längsbewehrung, rechteckig vorausgesetzt.

Die Zugfestigkeit des Betons wurde im Einklang mit den rumänischen Normen [10] mit Hilfe von Biegeversuchen an Prismen $10 \times 10 \times 30$ cm bestimmt. Dabei wird eine völlige Plastifizierung der Zugzone angenommen, so dass für die Zugfestigkeit gilt:

$$R_t = 3{,}5 \frac{M}{b\,h^2}. \tag{1}$$

Der Einfluss der Haftspannungen auf das Rissverhalten der Stahlbetonbauteile ist komplex. Untersuchungen von J. Faury [7], R. L'Hermite [8] und M. M. Adam [9] zeigten, dass in der Nähe der Bewehrungsstäbe (in einem Umkreis von 2 cm) eine Plastifizierung des Betons auftritt. Deshalb ist die Berücksichtigung der wirklichen Haftverhältnisse schwierig und lohnt sich oft nicht. Vereinfachend kann für die Verteilung der Haftspannungen ein bestimmtes Gesetz angenommen, bei der Berechnung jedoch ein experimentell bestimmter Mittelwert angesetzt werden. So erscheint in der Formel für die Berechnung des Rissabstandes (s. Abschnitt 2.3) eine Konstante c_1, die von der Verteilung der Haftspannungen τ_{as} abhängt. Weiter wird aber gemäss den rumänischen Normen [10] für τ_{as} ein Rechteckdiagramm eingeführt.

Die Eigenspannungen wurden vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung bereitet aber keine Schwierigkeiten.

2.2. Theorie der Rissbildung bei Biegung mit Querkraft

Der Einfachheit halber wird ein in Feldmitte konzentriert belasteter Einfeldbalken mit Rechteckquerschnitt betrachtet. Das Verhältnis a/h ist genügend gross um den Vorrang des Biegemomentes zu sichern und der Balken ist

so bewehrt, dass ein Biegebruch eintritt (Fig. 1). Die für diesen Lastfall entwickelte Theorie bleibt auch für andere Belastungen gültig.

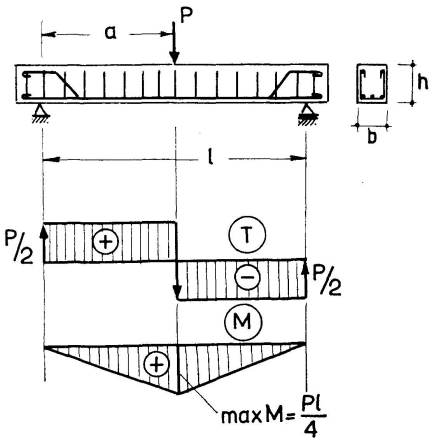


Fig. 1.

Fig. 2a zeigt den Verlauf der in Schrägrissen aufnehmbaren Rissmomente $M_{fi} = M_{bfi} + M_{afi}$. Gleichfalls ist die M^{I}-Kurve aufgetragen. Sie stellt für bestimmte Werte von T, μ und μ_t den Grenzwert von M_z dar, bei dem noch keine Schrägrisse auftreten. Bei einem unendlich kleinen Momentenzuwachs erscheint der erste Riss.

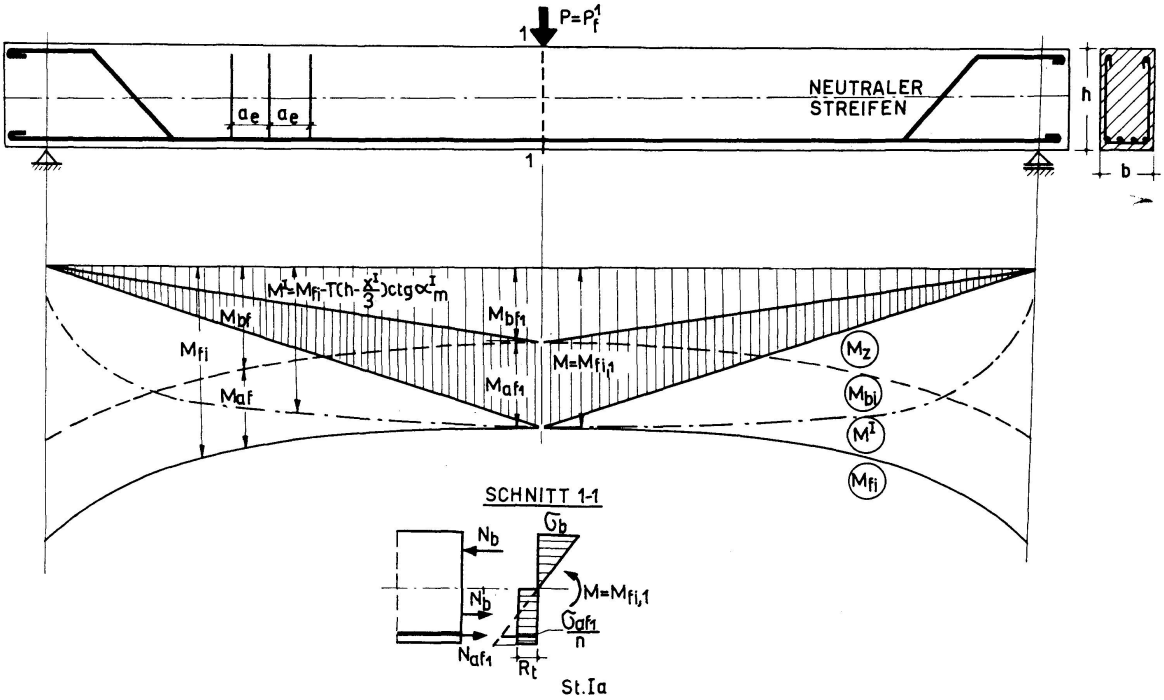


Fig. 2a.

Vor der Rissbildung sind die vom Beton und von der Bewehrung aufgenommenen Spannungen proportional mit den zugehörigen Schnittgrössen und verlaufen in Längsrichtung affin zum M_z-Diagramm (Stadium I). Steigt die

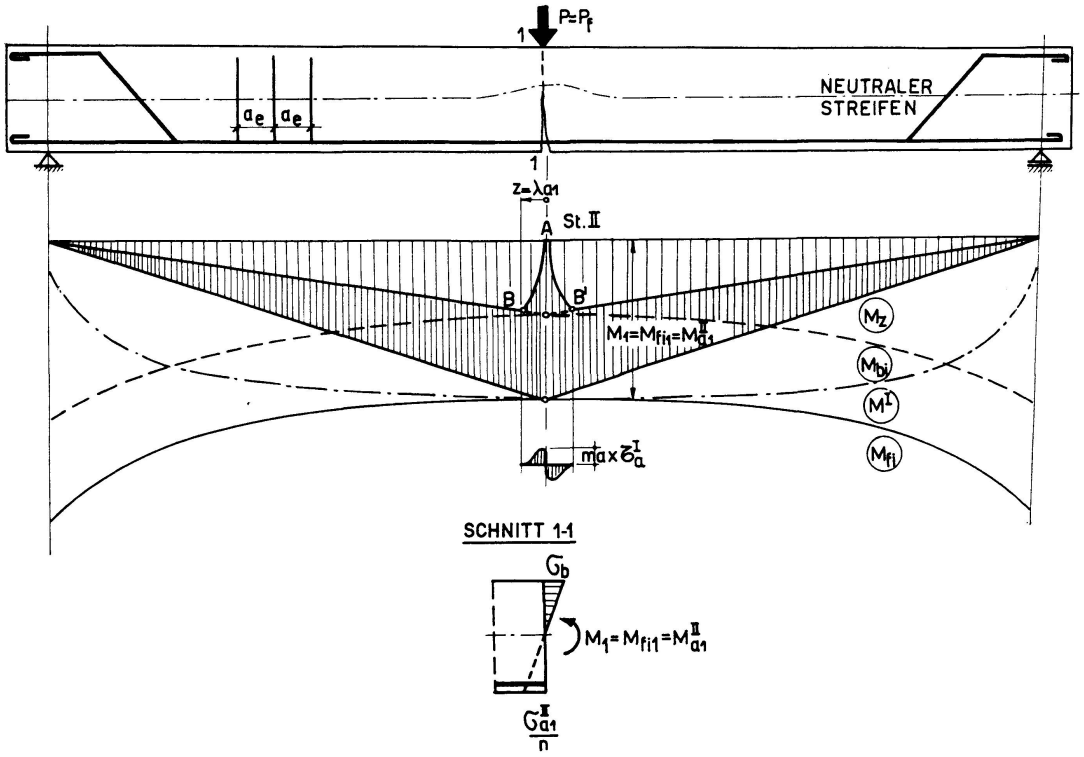


Fig. 2b.

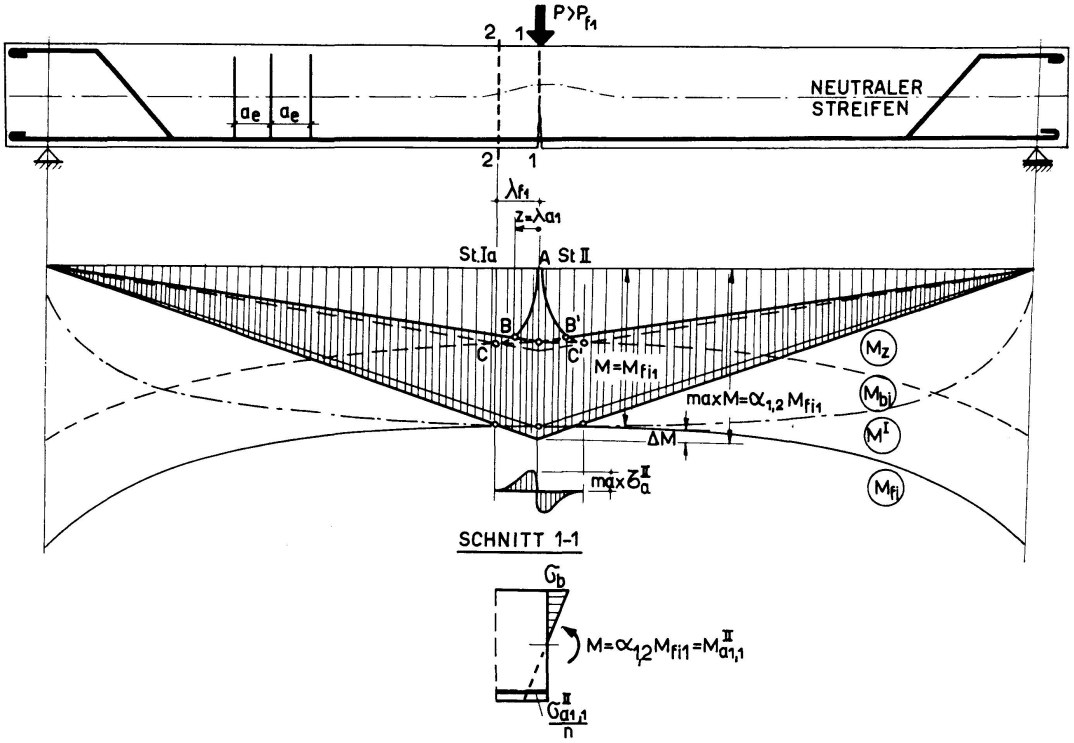


Fig. 2c.

Last von P auf P_{f1}, so dass im Schnitt 1—1 die Betonzugspannung σ_b' den Grenzwert R_t erreicht, so bildet sich ein Riss. Vor Erscheinen des Risses 1 befindet sich der Querschnitt 1—1 im Stadium Ia, mit:

$$\max M = M_{fi,1} = M_{bfi,1} + M_{afi,1}. \tag{2}$$

Die Figuren 2a und b zeigen die Phasen der Bildung des Risses 1. M_{bfi} und M_{afi} stellen die von dem gezogenen Beton bzw. von der Bewehrung aufgenommenen Momentenanteile im Stadium Ia dar. Im Rissquerschnitt wird der gesamte Zug von der Bewehrung aufgenommen.

Der Beton der dem Riss 1 benachbarten Schnitte übernimmt von der Bewehrung durch Haftspannungen einen Teil des Gesamtzuges. So fällt die Stahlspannung bei einem gleichzeitigen Anwachsen der Betonspannungen bis zu $\sigma_b' < R_t$ in einer Entfernung $z = \lambda_{a1}$ vom Riss (Zustand I). Im Schnitt 2—2 erhält man den der Bildung von Riss 2 vorangehenden Grenzzustand wenn die Beanspruchung bis zum Grenzwert $M_{fi,2}$ anwächst. (Dann gilt für die Betonzugspannung $\sigma_b' = R_t$, siehe Punkt C in Fig. 2c.)

Wie aus Fig. 2c ersichtlich, tritt dies in einem Abstand $\lambda_{f,1}$ vom Schnitt 1—1 ein. Gleich vor Erscheinen des Risses 2 gilt für die Last: $P > P_{f,1}$ und das Biegemoment im Schnitt 1—1 ist von $M_{fi,1}$ auf max. $M = M_{fi,1} + \Delta M_1 = \alpha_{1,2} M_{fi,1}$ angewachsen. Der Schnitt 2—2 befindet sich im Stadium Ia und bei einem unendlich kleinen Zuwachs der Belastung erscheint im Schnitt 2—2 der Riss 2 in Richtung der Hauptdrucklinie.

Dieser Gesetzmässigkeit folgt beim Wachsen der Belastung ein Ansteigen der Zahl der Risse bis auf n im Gebrauchszustand (Fig. 2d), so dass für den Schnitt 1—1 geschrieben werden kann:

$$\max M = \frac{M_B}{C} = M_G = \alpha_{1,n} M_{fi,1}. \tag{3}$$

Fig. 2d zeigt dass die $\overline{M}_a^{\mathrm{II}}$-Linie in bezug auf die $\overline{M}$-Linie um eine veränderliche Grösse v versetzt ist, da es sich um Schrägschnitte handelt [3].

Die Stahlspannung im Stadium II, $\bar{\sigma}_{a,k}^{\mathrm{II}}$, im Schrägriss k beträgt [3]:

$$\boxed{\bar{\sigma}_{a,k}^{\mathrm{II}} = \frac{\overline{M}_k + \overline{T}_k (h_0 - X_k^{\mathrm{II}}) \operatorname{ctg} \alpha_{m,k}^{\mathrm{II}} - \overline{M}_{at,k}}{A_{a,k}\left(h_0 - \frac{X_k^{\mathrm{II}}}{3}\right)}}, \tag{4}$$

wobei: $\overline{M}_k$ und $\overline{T}_k$ die Schnittgrössen im Gebrauchszustand sind.

Die Lage der Nullinie im Stadium II wird nach [4] aus der Gleichung

$$\xi_k^{\mathrm{II}} = \frac{X_k^{\mathrm{II}}}{h_0} = \frac{2\,\alpha_2 + \alpha_{t2}}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{4}{2\,\alpha_2 + \alpha_{t2}}} - 1\right] \tag{5}$$

bestimmt, mit

$$\alpha_2 = n\,\mu \tag{6}$$

und

$$\alpha_{t2} = n\,\mu_t \frac{a_t}{h_0} \frac{\sin \beta_t}{\sin \alpha_m^{\mathrm{II}}} \cos(\beta_t - \varphi). \tag{7}$$

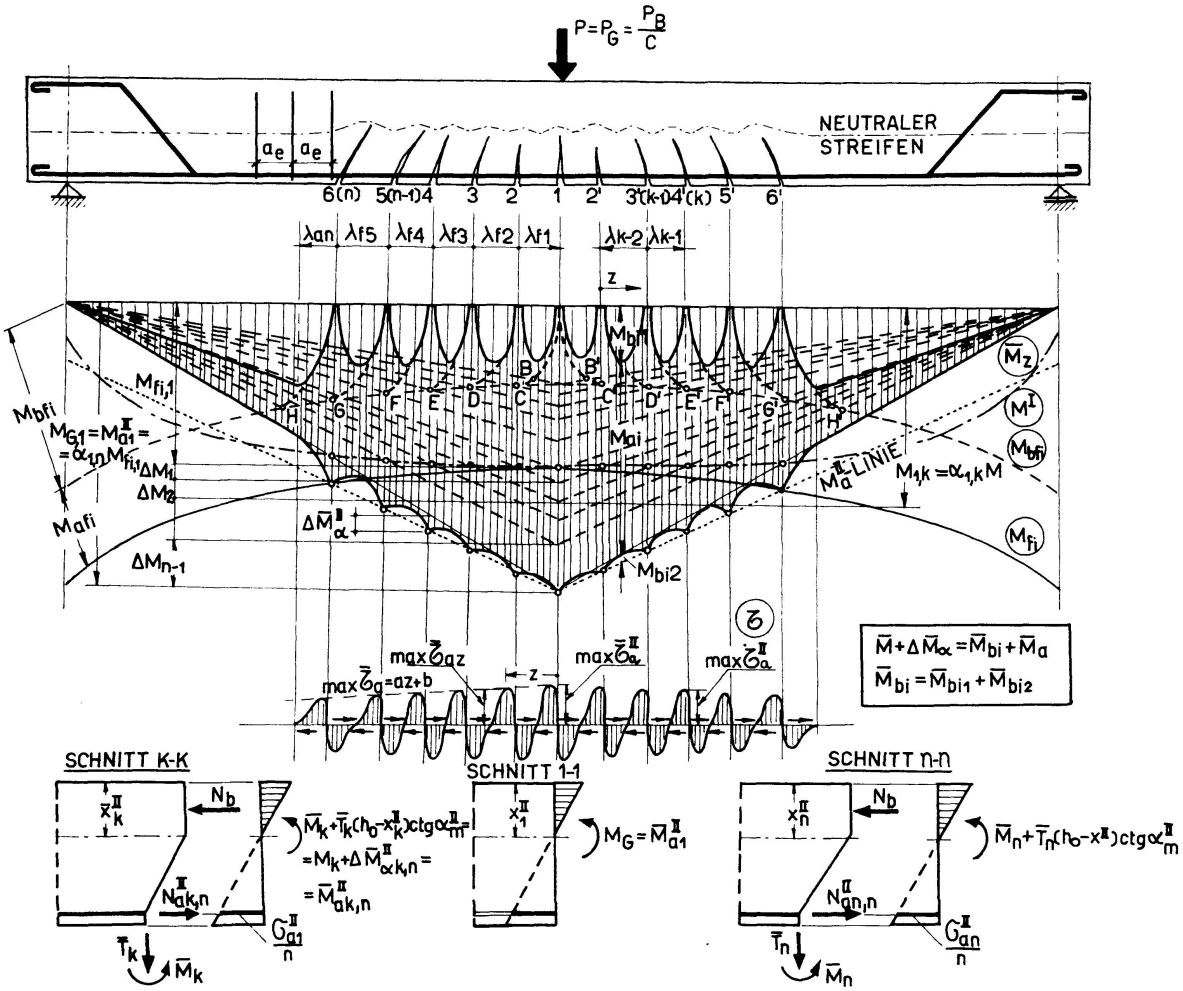


Fig. 2d.

Die mittlere Rissneigung $\alpha_{m,k}^{\mathrm{II}}$ folgt aus der Beziehung [4]:

$$\operatorname{tg}\alpha_{m,k}^{\mathrm{II}} = \frac{h_0 - X_k^{\mathrm{II}}}{\dfrac{0{,}457\,h_0}{\operatorname{tg}\alpha_{m,k}^{\mathrm{I}}} + 0{,}543\,h_0 - X_k^{\mathrm{II}}}, \tag{8}$$

wobei die mittlere Neigung im Stadium Ia aus der Gleichung

$$\alpha_m^{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \tag{9}$$

mit

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{T\,h}{M}(0{,}66 + 2{,}52\,n\,\mu_1) \tag{10}$$

berechnet wird.

Unter der Gebrauchslast ändert sich im Rissgebiet des Balkens (Fig. 2d) auch die Haftspannung von $\bar{\tau}_{am,1}^{\mathrm{II}}$ im Schnitt 1—1 auf $\bar{\tau}_{am,n}^{\mathrm{I}}$ für den letzten Riss im Schnitt n—n. Zwischen diesen beiden Werten kann ohne weiteres ein linearer Verlauf der Form

$$\bar{\tau}_{am}^{\mathrm{II}} = \bar{\tau}_{am,1}^{\mathrm{II}}\left[\frac{1-\beta'}{s_n}(s_n - z_k) + \beta'\right] \tag{11}$$

angenommen werden, mit:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} + \cdots + \lambda_{f,n}, \tag{12}$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k}, \tag{13}$$

$$\beta' = \frac{\bar{\tau}^{\mathrm{I}}_{am,n}}{\bar{\tau}^{\mathrm{II}}_{am,1}}. \tag{14}$$

Der β'-Wert hängt von der Qualität des Bewehrungsstahls ab, u. zw. können folgende Werte angenommen werden:

$$\beta' = 0{,}9 \quad \text{für Rundstahl (OB 38)},$$

$$\beta' = 0{,}65 \quad \text{für Profilstahl (PC)}.$$

2.3. Rissabstand

Die Berechnung erfolgt für einen Riss $k+1$, es wird also λ_k (Fig. 3) bestimmt. Im Schrägriss $k+1$ sind im Stadium Ia die Betonzugzone und die Bewehrung aktiv. Es gilt:

$$M_{k+1} + T_{k+1}\left(h - \frac{X^{\mathrm{I}}_{k+1}}{3}\right) \operatorname{ctg} \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1} = M_{fi,k+1} = M_{bfi,k+1} + M_{afi,k+1} \tag{15}$$

mit:

$$M_{bfi,k+1} = \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}} z^{\mathrm{I}}_{b,k+1} R_t \tag{16}$$

und:

$$M_{afi,k+1} = 2\, n\, R_t\, A_a \frac{z^{\mathrm{I}}_a}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}. \tag{17}$$

Der Wert $M_{bfi,k+1}$ kann auch in der Form:

$$M_{bfi,k+1} = u \int_0^{\lambda_{f,k}} z\, \tau_{as}\, ds \tag{18}$$

angeschrieben werden.

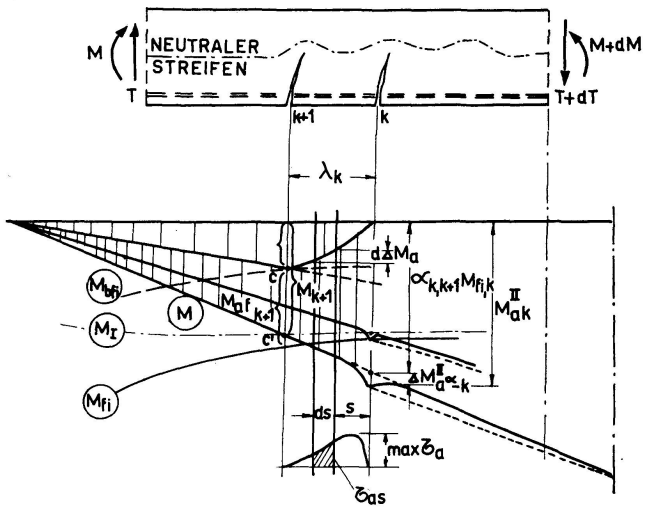


Fig. 3.

Werden die Beziehungen (16) und (18) gleichgesetzt, die Spannung τ_{as} als Funktion des Höchstwertes der Haftspannung max. τ_a ausgedrückt

$$\tau_{as} = \max \tau_a f\left(\frac{s}{\lambda_{f,k}}\right) \tag{19}$$

und die Bezeichnung $\varphi_k = \frac{s}{\lambda_{f,k}}$, also $ds = \lambda_{f,k} d\varphi_k$ eingeführt, so erhält man

$$\lambda_{f,k} = c_1 \frac{A_{bt}}{\sin^2 \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}} \frac{z^{\mathrm{I}}_{b,k+1}}{u\, z^{\mathrm{II}}_{a,k}} \frac{R_t}{\max \tau_a}. \tag{20}$$

Der Koeffizient c_1 hängt vom Verlauf der Haftspannung τ_{as} ab und wird aus der Beziehung:

$$c_1 = \frac{1}{\int_0^1 f(\varphi_k)\, d\varphi_k} \tag{21}$$

berechnet.

Wird für τ_{as} ein rechteckiges Diagramm im Einklang mit den rumänischen Vorschriften [10] und für das Verhältnis $\frac{z^{\mathrm{I}}_{b,k+1}}{z^{\mathrm{II}}_{a,k} \sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}$ der Mittelwert 0,85 angenommen, so ergibt sich mit der Bezeichnung:

$$\beta_f = 0{,}85 \frac{R_t}{\omega_1 \max \tau_a} \tag{22}$$

die Formel für die Berechnung des Rissabstandes:

$$\boxed{\lambda_{f,k} = \beta_f \frac{A_{bt,k+1}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k+1}}}, \tag{23}$$

wobei

$$A_{bt,k+1} = b\,(h - X^{\mathrm{I}}_{k+1}) \tag{24}$$

ist.

Der Wert X^{I} kann nach [5] berechnet werden:

$$\xi^{\mathrm{I}}_{k+1} = \frac{X^{\mathrm{I}}_{k+1}}{h} = \frac{2\, n\, \mu_1\, \delta \sin \alpha^{\mathrm{I}}_m + 1 - \frac{T}{2\, b\, h\, R_t} \sin 2\, \alpha^{\mathrm{I}}_m}{2\, n\, \mu_1 \sin \alpha^{\mathrm{I}}_m + 2 - \frac{T}{2\, b\, h\, R_t} \sin 2\, \alpha^{\mathrm{I}}_m}. \tag{25}$$

Der Koeffizient β_f ist eine variable Grösse und hängt von dem Verhältnis $\frac{R_t}{\max \tau_a}$ ab, das vom Durchmesser der Bewehrungsstäbe, von der Betondeckung, der Staboberfläche und einigermassen von der Betongüte bestimmt wird.

Der Wert β_f wurde auf Grund eigener Versuche [4] wie auch der Versuche anderer Forscher [6] bestimmt. Dabei wurde festgestellt, dass er so angenommen werden kann wie es in den rumänischen Normen [10] für reine Biegung vorgeschrieben ist, nämlich:

— für Rundstahl (OB-38) $\beta_f = 0{,}5 + 30\frac{\mu}{d}$, (26)

— für Profilstahl (PC) $\beta_f = 0{,}35 + 30\frac{\mu}{d}$. (27)

Die Beziehung (23) wird folgendermassen praktisch verwendet. Bei symmetrischer Belastung erscheint der erste Riss in Balkenmitte. Um die Entfernung $\alpha_{f,1}$ in der der zweite Riss auftritt zu bestimmen, muss die mittlere Neigung dieses Risses $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2}$ bekannt sein. Sie wird durch stufenweise Annäherung berechnet. Als Ausgangswert wird $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2} = \alpha^{\mathrm{I}}_{m,1} = 90°$ angenommen und $\lambda_{f,1}$ bestimmt. Diesem Wert entspricht ein anderes $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,2}$, das zur zweiten Annäherung dient.

Bei der Berechnung der anderen $\lambda_{f,k}$-Werte werden folgende Ausgangsgrössen benützt: für $\lambda_{f,2}$ das dem Schnitt $z_3 = 2\lambda_{f,1}$ entsprechende $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,3}$, für $\lambda_{f,3}$ das dem Schnitt $z_4 = \lambda_{f,1} + 2\lambda_{f,2}$ zugehörige $\alpha^{\mathrm{I}}_{m,4}$ und im allgemeinen für $\lambda_{f,k}$ der dem Schnitt $z_{k+1} = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + 2\lambda_{f,k-1}$ entsprechende Wert $\alpha^{\mathrm{II}}_{m,k+1}$.

Gewöhnlich genügt die erste Annäherung, da die wirkliche Rissneigung wenig von der angenommenen abweicht (maximale Abweichung: 2%).

2.4. Rissweite unter Gebrauchslasten

Fig. 4 zeigt den Verlauf der Stahldehnungen ϵ^{II}_a und ϵ_{am} für den auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Balken im Stadium II.

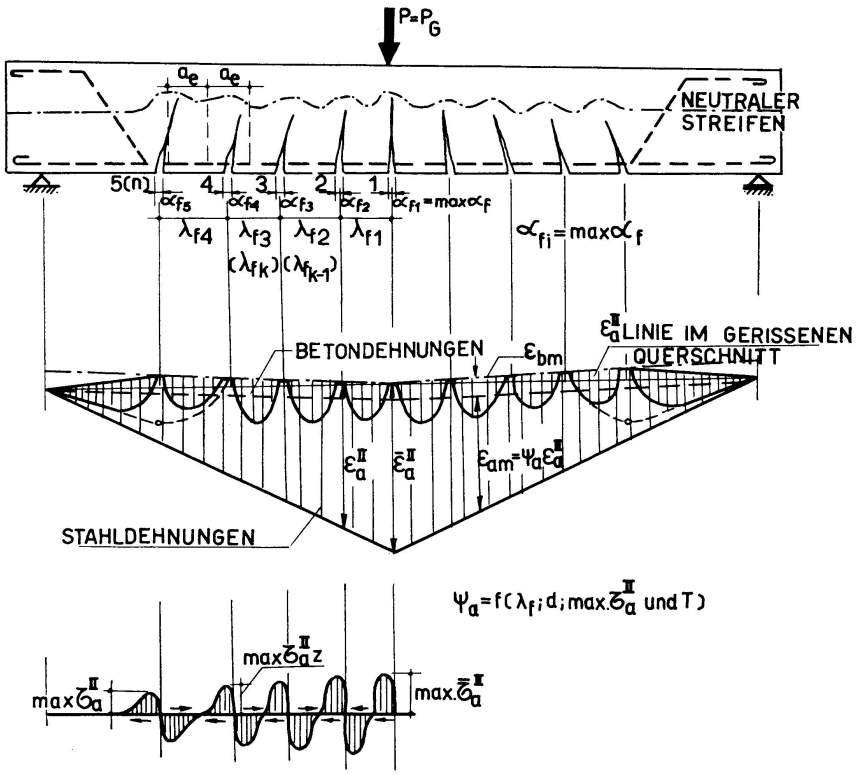


Fig. 4.

Die Rissweite wird getrennt für einen beliebigen Riss (k), für den Riss in Balkenmitte (1) und für den letzten Riss (n), der unter der Gebrauchslast auftritt, bestimmt.

Im allgemeinen wird die Rissweite von der Bedingung abgeleitet dass die Summe von Rissweite und Dehnung des benachbarten Betons gleich sei mit der Stahldehnung über die gleiche Länge.

a) Rissweite für einen beliebigen Riss (k)

$$\alpha_{f,k} = \tfrac{1}{2}(\epsilon_{am,k} - \epsilon_{tm,k})(\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1}). \tag{28}$$

Bei Vernachlässigung der elastischen Verformungen des Betons zwischen den Rissen und mit der Bezeichnung

$$\psi_{a,k} = \frac{\epsilon_{am,k}}{\bar{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{a,k}}, \qquad \bar{\epsilon}^{\mathrm{II}}_{a,k} = \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,k}}{E_a} \tag{29}$$

erhält man:

$$\boxed{\alpha_{f,k} = \psi_{a,k} \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,k}}{E_a} \frac{1}{2}(\lambda_{f,k} + \lambda_{f,k-1})}, \tag{30}$$

wobei $\psi_{a,k}$ das Zusammenwirken zwischen dem gezogenen Beton und der Bewehrung berücksichtigt.

Für die Bestimmung der Werte von $\psi_{a,k}$ wird der tatsächliche Verlauf von $\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_a$ (Fig. 5) durch einen polygonalen ersetzt. So kann geschrieben werden:

$$\psi_{a,k} = \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,k} + \bar{\sigma}^{\mathrm{I}}_{am,k}}{2\,\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,k}}. \tag{31}$$

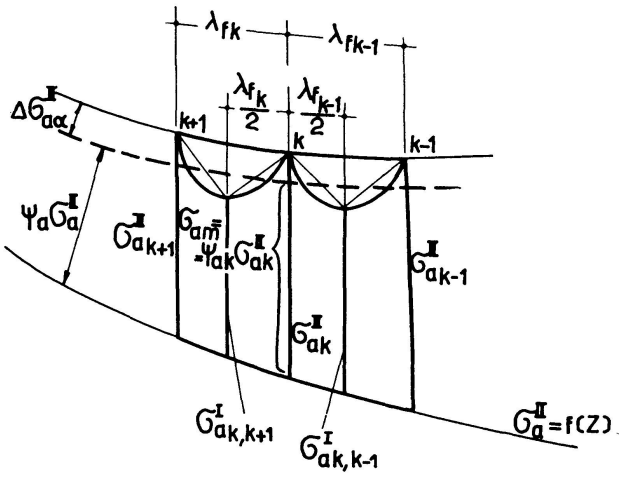


Fig. 5.

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\psi_{a,k} = 1 - \beta \frac{\dfrac{A_{bt}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,k}}}{A_a} \frac{R_t}{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,k}}. \tag{32}$$

In der Gleichung (32) wurde die Bezeichnung:

$$\bar{\beta} = \frac{0{,}85}{4} \frac{\bar{\tau}^{\mathrm{II}}_{am,k}}{\bar{\tau}^{\mathrm{I}}_{am,k}} \tag{33}$$

benützt. Für den Wert $\bar{\beta}$ wurden auf Grund der Versuche folgende Gleichungen aufgestellt:

— für Rundstahl (OB 38)

$$\bar{\beta} = 0{,}2\,(1-0{,}6\,V)\left[\frac{0{,}1}{s_n}(s_n - z_k) + 0{,}9\right], \tag{34}$$

— für Profilstahl (PC)

$$\bar{\beta} = 0{,}3\,(1-0{,}5\,V)\left[\frac{0{,}38}{s_n}(s_n - z_k) + 0{,}65\right] \tag{35}$$

mit den Bezeichnungen:

$$s_n = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} + \cdots + \lambda_{f,n}, \tag{36}$$

$$z_k = \lambda_{f,1} + \lambda_{f,2} + \cdots + \lambda_{f,k} \tag{37}$$

und V das Verhältnis zwischen der Dauerlast und der Gesamtlast.

b) Rissweite für den Riss in Balkenmitte (1)

$$\boxed{\alpha_{f,1} = \psi_{a,1} \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,1}}{E_a} \lambda_{f,1}}\,. \tag{38}$$

Die Grössen $\psi_{a,1}$ und $\bar{\beta}$ werden aus den Beziehungen (32), (34) und (35) bestimmt.

c) Rissweite für den letzten Riss (n)

Die Weite dieses Risses hat den kleinsten Wert und kann aus der Beziehung:

$$\boxed{\alpha_{f,n} = \psi_{a,n} \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n}}{E_a} \left(\lambda_{a,n} + \frac{1}{2}\lambda_{f,n-1}\right)}\,, \tag{39}$$

wobei $\lambda_{a,n}$ die aktive Länge der Bewehrung in der Nachbarschaft des letzten Risses darstellt (Fig. 6), bestimmt werden.

Aus Fig. 6a ist ersichtlich, dass der Wert $\lambda_{a,n}$ durch Gleichsetzen des Abfalls der Beanspruchung ΔM_a auf der Länge $\lambda_{a,n}$ mit dem $M_{b,c}$-Wert im Stadium I bestimmt werden kann.

$$\Delta M_a = M^{\mathrm{I}}_{b,c}. \tag{40}$$

Dabei sind:

$$\Delta M_a = \int_0^{\lambda_{a,n}} z\,\tau_{as}\,ds \cong u\,\lambda_{a,n}\,z^{\mathrm{II}}_{a,n}\,\omega_1 \max \tau_a \tag{41}$$

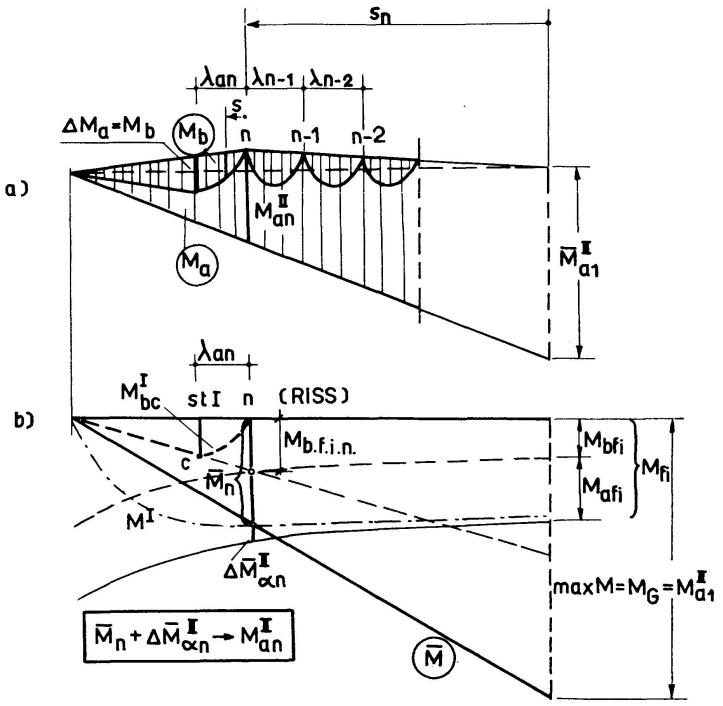


Fig. 6.

und $M^{\mathrm{I}}_{b,c}$, für den Fall eines linearen Momentenverlaufs:

$$M^{\mathrm{I}}_{b,c} = \frac{M_{bfi,n}}{\frac{l}{2} - s_n}\left(\frac{l}{2} - s_n - \lambda_{a,n}\right). \tag{42}$$

Wird in (42) $M_{bfi,n}$ ersetzt und anschliessend (42) und (41) in (40) eingesetzt, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\lambda_{f,n-1} - \left(\frac{l}{2} - s_n\right)}{\lambda_{f,n-1} + \left(\frac{l}{2} - s_n\right)}, \tag{43}$$

mit:

$$\lambda_{f,n-1} = \beta_f \frac{A_{bt}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,n}}. \tag{44}$$

Auf gleiche Weise erhält man für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\lambda_{a,n} = \frac{\frac{l}{2} - s_n}{2\lambda_{f,n-1}}\left[\sqrt{\left(\frac{l}{2} - s_n\right)^2 + 4\lambda^2_{f,n-1}} - \left(\frac{l}{2} - s_n\right)\right]. \tag{45}$$

Der Wert $\psi_{a,n}$ wird genauso wie $\psi_{a,k}$ bestimmt:

$$\psi_{a,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n-1}}{4\,\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n}} + \frac{n}{2}\bar{\gamma}\frac{W^{\mathrm{II}}_{a,n}}{W_{b,id}} - \bar{\beta}\frac{\frac{A_{bt}}{\sin \alpha^{\mathrm{I}}_{m,n}}}{A_a}\frac{R_t}{\bar{\sigma}^{\mathrm{II}}_{a,n}}\right). \tag{46}$$

Die Art der Belastung wird durch $\bar{\gamma}$ erfasst, uzw. gilt:

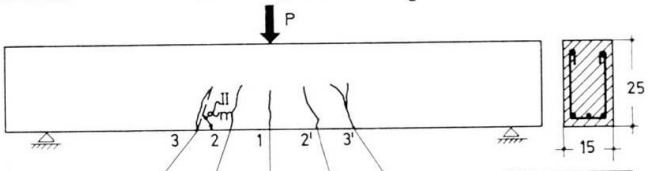
— für eine Einzellast in Feldmitte:

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{2\,\lambda_{a,n}}{l}, \tag{47}$$

— für eine gleichförmig verteilte Last:

$$\bar{\gamma} = 1 - \left(\frac{2\,\lambda_{a,n}}{l}\right)^2. \tag{48}$$

BALKEN A-01 B 250 · OL 38 · $\mu = 0{,}010 \cdot \mu_{tA} = 0{,}0047 \cdot \frac{\mu}{d} = 0{,}00835$



LAST-STUFE	3P (tf)	RISSÖFFNUNG 1/100mm					$\Sigma\alpha_f$ (1/100mm)
6	1.50		5	5	2		12
7	2,00	6	7	7	7	4	31
8*	2,50	8	9	10	9	9	45
9	3,00	8	10	12	9	9	48
10	3,50	10	11	20	9	9	59
11	4.00	11	11	150	10	9,5	191,5
12	4,65	11	11	400	10	10	442

* GEBRAUCHSLAST

St. Ia RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,0	0,8	0,81	0,9	1,0
	THEORETISCH [4]	1,049	0,885	0,75	0,885	1,049
	Δ%	– 4,6	– 9,6	+ 8,0	+ 1,7	– 4,6

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8

α_m^{II} (Grade)	VERSUCH	70°	72°	87°	81°	65°	
	THEORETISCH [4]	60°	61°30'	90°	61°30'	60°	
	Δ%	+ 16,6	+ 18,1	– 3,3	+ 31,5	+ 8,3	
λ_f (cm)	VERSUCH		13,5	11,6	13,0	12,8	$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}29$ tfm
	THEORETISCH [GL · 16]		13,05	12,65	12,65	13,05	
	Δ%		+3,5	– 8,3	+ 2,8	– 1,9	
G_a^{II} kg/cm²	THEORETISCH [GL · 3]	1590	1810	1875	1810	1590	
α_f (1/100) mm	VERSUCH	8	9	10	9	9	
	THEORETISCH [GL · 21]	7,04	9,45	9,85	9,45	7,04	
	Δ%	+ 13,6	– 4,8	– 1,5	– 4,8	+27,8	

St. III BRUCHZUSTAND

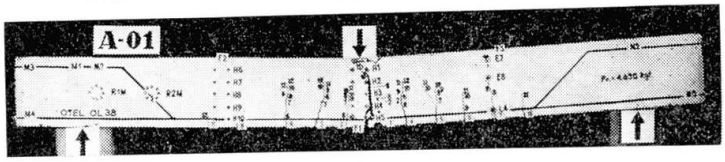


Fig. 7a.

Weiter sind:

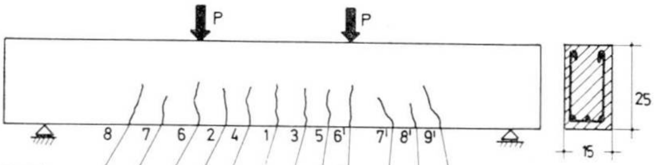
$$W_{a,n}^{II} = A_a z_{a,n}^{II}, \tag{49}$$

$$W_{b,id} = \frac{I_{b,id}}{Y_{bt}} \tag{50}$$

und $\bar{\beta}$ folgt aus (34) und (35) mit $s_n = z_k$.

* * *

BALKEN B-01 B 228 · OL 38 · μ = 0,01 μ_{1A} = 0,0047 · $\frac{\mu}{d}$ = 0,00835



RISSÖFFNUNG 1/100 mm

LAST-STUFE	3P (tf)	8	7	6	2	4	1	3	5	6'	7'	8'	9'	Σ (1/100 mm)
5	2,2													
6	2,5		2	3	3	3	3	3	3	3	3	3		29
7	3,0	3	5	8	7	8	8	8	8	8	8	8	3	82
8 *	3,75	7	8	13	9	10	12	13	12	13	10	10	6	123
9	4,75	7	9	13	10	15	13	13	14	13	10	10	7	134
10	5,75	7	9	13	10	25	13	13	14	13	10	10	8	145
11	6,80	8	10	13	11	280	14	13	15	13	11	10	8	406

* GEBRAUCHSLAST

RISSBILDUNGSZUSTAND

St. Ia

Mf (tfm)	VERSUCH	1,25 0,9	⟵ 0.7 ⟶	0,95 1,0	1,2
	THEORETISCH [4]	1,21 0,88	⟵ 0,73 ⟶	0,88 1,21	–
	Δ%	+3,3 +2,3	+2,7	+8,0 −17,4	–

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8

α_m^{II} (GRADE)	VERSUCH	64° 72°	⟵ M = konst-90° ⟶	60° 55°	
	THEORETISCH [4]	56° 58°	⟵ 90° ⟶	58° 56°	
	Δ%	+14,3 +24,2	⟵ ±0,00 ⟶	+3,5 −1,8	
λ_f (cm)	VERSUCH		⟵ λ_{fm} = 11,7 ⟶		
	THEORETISCH [GL-16]	14,1 13,3	⟵ λ_{fm} = 12,25 ⟶	13,3 14,1	
	Δ%		⟵ −4,5 ⟶		
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL-3]	1355 1720	⟵ 1825 ⟶	1720 1355	–
$\mathcal{L}_f$ (1/100 mm)	VERSUCH	7 8 13	⟵ α_{tm} 11,2 ⟶	13 10 10	6
	THEORETISCH [GL-21]	6,5 10 11,3	⟵ α_{fm} = 10,9 ⟶	11,3 10 6,5	–
	Δ%	+7,7 −20,0 +15	⟵ 2,8 ⟶	+15 0 +54	–

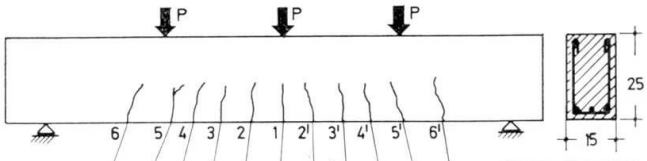
St. III BRUCHZUSTAND

Fig. 7b.

Aus den obigen Ausführungen ist es ersichtlich, dass die Rissweite unter Gebrauchslast über die Länge des Balkens unterschiedlich ist, u. zw. im allgemeinen am grössten in Feldmitte und am kleinsten im Schnitt n. Um die so berechneten Rissweiten mit den Normwerten vergleichen zu können wird der Mittelwert gebildet, der folgender Beziehung genügen muss:

$$\alpha_{f_M} \leqq \text{zul}\, \alpha_f \,. \tag{51}$$

BALKEN C-01 B 194.0L 38 · $\mu = 0{,}01 \cdot \mu_A = 0{,}0047 \frac{\mu}{d} = 0{,}00835$



LAST-STUFE	3P (tf)	RISSÖFFNUNG 1/100 mm												$\Sigma \alpha_f$ (1/100mm)
6	2			2	2	2	2	2	2					12
7	2,5			3	3	4	4	4	4	2	2			26
8	3,0	2	3	4	4	6	7	7	6	4	4	3		50
9 *	3,75	4	6	6	6	8	9	9	8	6	6	5		73
10	5,0	5	6	6	8	10	18	12	9	8	6	5		93
11	6,0	5	6	7	8	12	25	15	10	8	6	5		107
12	6,6	5	7	8	9	14	260	20	10	9	7	6		355

* GEBRAUCHSLAST

St. I-a RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,0	1,0	0,83	0,83	0,665	0,665	0,665	0,83	0,83	0,83	1,0
	THEORETISCH [4]	1,08	0,97	0,827	0,80	0,745	0,695	0,745	0,80	0,827	0,97	1,08
	Δ %	−7,4	+3,1	+0,4	+3,8	−10,7	−4,3	−10,7	+3,8	+0,4	−16,5	−7,4

St. II GEBRAUCHSZUSTAND C=1,8

α_m^{II} (GRADE)	VERSUCH	60°	75°	80°	80°	87°	90°	90°	85°	85°	75°	62°30'
	THEORETISCH [4]	55°30'	73°30'	76°	79°	80°30'	90°	80°30'	79°	76°	73°30'	55°30'
	Δ %	+8,1	+2,0	+5,3	+1,3	+8,1	0	+11,8	+7,6	+11,8	+2,0	+12,6
λ_f (cm)	VERSUCH		12,7	12	12	11	11,2	10,2	11,7	10,2	13,0	12,7
	THEORETISCH [GL. 16]		13,65	12,7	12,45	12,18	12,05	12,05	12,18	12,45	12,7	13,65
	Δ %		−0,7	−5,5	−3,6	−9,7	−7,1	−15,4	−3,9	−18,1	−2,4	−7,0
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL. 3]	1260	1390	1495	1605	1710	1795	1710	1605	1495	1390	1260
α_f (1/100) mm	VERSUCH	4	6	6	6	8	9	9	8	6	6	5
	THEORETISCH [GL. 21]	5,35	7,5	7,9	8,4	8,85	9,3	8,85	8,4	7,9	7,5	5,35
	Δ %	−25,2	−20	−24	−28,6	−9,6	−3,2	+1,7	−4,8	−24	−20	−4,8

$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}22$ tfm

St III BRUCHZUSTAND

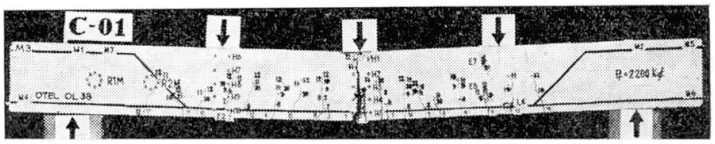
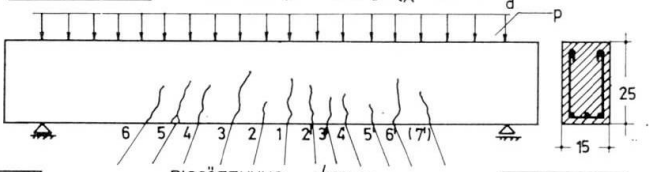


Fig. 7c.

In den Fig. 7a—7d sind für vier Balken mit verschiedener Belastung die Rissbilder, die Bruchbilder, die gemessenen Rissweiten wie auch die berechneten Rissabstände und Rissweiten angegeben.

BALKEN D-01 B 220 · 0L 38 · $\mu = 0{,}010 \cdot \mu_{tA} = 0{,}0065$ $\frac{\mu}{d} = 0{,}00835$



LAST-STUFE	P = pl (tf)	RISSÖFFNUNG 1/100mm												$\Sigma \alpha_f$ (1/100mm)
5	1,5													
6	2,0						2				2			4
7	3,0				3		4	3	3	3	4			20
8	4,5	2	4	4	6	4	6	6	6	6	6	3	3	56
9*	5,5	4	7,5	7	8	8	8	7	8	8	7,5	6,5	4,5	84
10	6,5	4	8	7	12	9	10	8	8	8	8	7	5	94
11	8,0	5	8	8	50	10	12	9	9	9	9	8	5	142
12	10	6	10	9	150	12	12	12	10	9	9	9	6	254

* GEBRAUCHSLAST

St I-a RISSBILDUNGSZUSTAND

M_f (tfm)	VERSUCH	1,12	1,12	0,9	0,75	1,0	0,65	0,75	0,75	0,65	1,12	1,12
	THEORETISCH [4]	1,18	0,95	0,82	0,75	0,71	0,7	0,71	0,75	0,82	0,95	1,18
	Δ%	−5,1	+18	+9,8	0	+41	−7,2	+5,6	0	−2,08	+18	−5,1

St.II GEBRAUCHSZUSTAND C = 1,8

α_m^{II} (Grade)	VERSUCH	60°	60°	73°	75°	82°	90°	87°	87°	85°	61°	51°		
	THEORETISCH [4]	55°	59°	65°	72°	79°	90°	79°	72°	65°	59°	55°		
	Δ%	+9,1	+1,7	+17,3	+4,2	+3,8	0	+10,1	+20,8	+30,8	+3,4	+7,3		
λ_f (cm)	VERSUCH		13	16	14,5	9	10	11	9	13	11	12	13,8	
	THEORETISCH [GL·16]		13,75	12,9	12,4	12,1	12,0	12,0	12,1	12,4	12,9	13,0	—	
	Δ%		−5,8	+24	+16,9	+25,6	+16,7	−8,3	+25,6	+4,8	+14,7	−7,7	—	
G_a^{II} (kgf/cm²)	THEORETISCH [GL·3]	1299	1478	1598	1685	1730	1740	1730	1685	1598	1478	1299		
α_f (1/100) mm	VERSUCH		4	7,5	7,0	8	8	8	7	8	8	7,5	6,5	4,5
	THEORETISCH [GL·21]		5,86	8,22	8,6	8,9	8,92	8,95	8,92	8,9	8,6	8,22	5,86	—
	Δ%		−31,8	−8,8	−18,6	−10,1	−10,3	−10,6	−21,5	−10,1	−7,0	−8,8	+10,9	—

$M_G = \frac{M_B}{C} = 1{,}39$ tfm

St III BRUCHZUSTAND

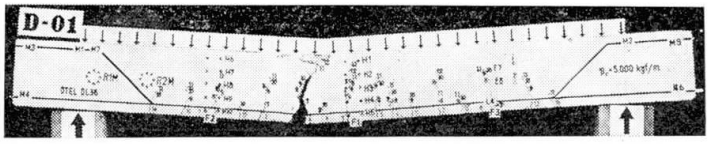


Fig. 7d.

3. Schlussfolgerungen

Die theoretischen Ausführungen können zusammen mit den Versuchsergebnissen einige Klärungen bezüglich der Rissbildung bei Stahlbetonbalken mit Biegung und Querkraft bringen. Davon seien erwähnt:

1. Bei Biegung mit Querkraft hängt der Rissabstand und die Rissweite von der Gestaltung des Balkens (Art der Bewehrung, Verhältnis $\frac{M}{T h_0}$ usw.) ab.

2. Die Kennwerte λ_f und α_f für Balken mit Biegebruch können nicht mit den entsprechenden Formeln für reine Biegung bestimmt werden, wie dies von den gültigen Vorschriften [6], [10], [11] und [12] zugelassen wird, da die erhaltenen Werte im allgemeinen von Versuchen nicht bestätigt sind. Die in diesem Aufsatz abgeleiteten Gleichungen (23), (30), (38) und (39) liefern, mit einer mittleren Abweichung von $\pm 15\%$, zuverlässige Vergleichswerte.

3. Die Untersuchungen ergaben, dass der Rissabstand hauptsächlich von folgenden Parametern abhängt:

— Durchmesser der Zugbewehrung;
— Prozentsatz der Längs- und Querbewehrung;
— Oberflächenbeschaffenheit der Bewehrungsstäbe;
— Verhältnis $\frac{M}{T h_0}$ (das die Lage und die mittlere Neigung der Risse bestimmt);
— Betondeckung;
— Belastungsschema;
— Betonqualität.

4. Die Rissweite wird von den obigen Parametern, zu welchen die folgenden hinzukommen, bestimmt:

— Art der Belastung (kurzzeitig statisch, dynamisch usw.);
— Stahlspannung in der Längsbewehrung (σ_a^{II}) wie auch in der Querbewehrung (σ_{al}^{II});
— Stahlqualität.

5. Ist die Bedingung:

$$T \leqq b\, h_0\, R_t \tag{43}$$

erfüllt und das Verhältnis $\frac{\mu\%}{d}$ grösser als die in Tafel 1 angegebenen Werte, so ist es nicht notwendig den Grenzzustand der Rissöffnung zu berücksichtigen, ausgenommen die Fälle wenn Impermeabilität verlangt wird.

Tafel 1

Stahlqualität	$zul\ \alpha_f = 0{,}1$ mm	$zul\ \alpha_f = 0{,}2$ mm	$zul\ \alpha_f = 0{,}3$ mm
OB-38	0,5	0,4	0,3
PC	0,55	0,45	0,35

Bezeichnungen

A_a	Querschnitt der Längszugbewehrung.
a	Abstand vom Schwerpunkt der Zugbewehrung zum Zugrand des Balkens.
a_t	Abstand zwischen den Stäben der Querbewehrung, längs der Balkenachse gemessen.
b	Breite des Querschnitts.
d	Durchmesser der Längsbewehrung.
E_a	Elastizitätsmodul des Stahls.
E_b	Elastizitätsmodul des Betons.
h	Balkenhöhe.
$h_0 = (h - a')$	Nutzhöhe.
M_z	Biegemoment.
M_{fi}	Aufnehmbares Rissmoment im Schrägschnitt.
M_a; M_a^{II}	Momentenanteil der Zugbewehrung im allgemeinen bzw. im Rissschnitt, Stadium II.
M_{at}	Momentenanteil der Querbewehrung nach der Rissbildung.
$n = \frac{E_a}{E_b}$	Verhältnis der E-Moduli von Stahl und Beton.
$R_t = 3{,}5 \frac{M}{b h^2}$	Betonzugfestigkeit.
T_z	Querkraft.
u	Umfang der Zugstäbe.
W_{id}	Ideeller Widerstandsmodul des Betonquerschnitts bezogen auf die Zugfaser des Querschnitts (im Stadium I).
$W_a^{\mathrm{II}} = A_a Z_a^{\mathrm{II}}$	Widerstandsmodul der Längsbewehrung im Stadium II.
X; X^{I}; X^{II}	Höhe der Betondruckzone im allgemeinen, im Stadium I und im Stadium II.
z^{II}	Hebelarm der inneren Kräfte im Stadium II.
z	Abszisse eines beliebigen Querschnitts.
α_m; α_m^{I}; α_m^{II}	Mittlere Neigung der Risse im allgemeinen, bei ihrem Auftreten (im Stadium Ia), beziehungsweise im Stadium II.
α_f	Rissweite in der Höhe der Zugbewehrung.
β_f; $\bar{\beta}$	Unterschiedliche Koeffizienten für die Berechnung von λ_f und α_f.
β_t	Neigung der Zugresultante für die Querbewehrung.
$\delta = \frac{h_0}{h}$	Bezogene Nutzhöhe des Balkenquerschnittes.
λ_f	Rissabstand bei Biegung mit Querkraft.
λ_a	Aktive Länge der Bewehrung beim Auftreten der geneigten Risse bei Biegung mit Querkraft.
ω_1	Vollheitsgrad des τ_a-Diagramms.

ψ_a	Koeffizient der das Zusammenwirken des Zugbetons und der Zugbewehrung zwischen den Rissen kennzeichnet.
φ	Neigung der Schrägrissnormalen.
$\mu = \frac{A_a}{b\,h_0}$; $\mu_1 = \frac{A_a}{b\,h}$	Bewehrungsgrade der Längsbewehrung.
σ_b'	Betonzugspannung.
σ_a; σ_a^{I}; σ_a^{II}	Zugspannung in der Längsbewehrung im allgemeinen, im Stadium I, im Stadium II.
τ_{as}; τ_{am}	Haftspannung im Schnitt mit der Abszisse s; Mittelwert der Haftspannung.
τ_{am}^{II}; τ_{am}^{II}	Mittlere Haftspannung im Stadium II, beziehungsweise im Gebrauchszustand.

Literatur

1. C. Avram: Curs de beton armat partea II-a. Calculul şi alcătuirea elementelor de construcţii, Litografia Învăţămîntului Timişoara, 1955.
2. C. Avram, I. Deutsch, I. Filimon, A. Mihăescu ş. a.: Espacement et ouverture des fissures des éléments prismatiques en béton armé soumis à la torsion pure, Documentation préliminaire, 11e Session plénière CEB Bruxelles, Octobre 1966.
3. I. Deutsch: Contribuţii la studiul fisurării elementelor de beton armate solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare (Teză de doctorat) I.P.T., 1970.
4. I. Deutsch: Contributions to the analysis of cracking in reinforced concrete members subjected to bending an Shear. CEB, Commission «Effort Tranchant» Paris, Mars, 1971.
5. I. Deutsch: Teoria formării şi apatiţiei fisurilor înclinate la elementele de beton armat solicitate la încovoiere cu forţă tăietoare. Buletinul IPT, seria Construcţii, nr. 2, 1970.
6. F. Leonhardt: Rapport sur la Proposition de modification du chapitre R.4–22 «Effort Tranchant des Recommandations Internationales Unifiées CEB». Documentation préliminaire 11e Session plénière CEB, Bruxelles, Octobre 1966.
7. H. Lossier und I. Faury: La fissuration du béton armé Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
8. R. L'Hermite: Le comportement du béton autour des armatures. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1944, mars.
9. M. M. Adam: Fissuration des réservoirs en béton armé. Paris, Annales I.T.B.T.P., 1963, mai-juin.
10. STAS 8000 – 1967 Bucureşti.
11. NITU 3 – 49 Moscova.
12. DIN 1045.
13. CP 114.

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die Theorie der Rissbildung und -öffnung unter Gebrauchslasten, für den Fall der auf Biegung mit Querkraft beanspruchten Stahlbetonbauteile. Ausgehend von der allgemeinen Theorie der Rissbildung, von Ergebnissen eigener Versuche und den Untersuchungen verschiedener Forscher, werden Formeln aufgestellt, die dann anzuwenden sind, wenn ein Biegebruch vorauszusehen ist. Bauteile, die durch Schubbruch versagen, werden in einer anderen Arbeit behandelt.

Der Rissabstand und die Rissweite im Gebrauchszustand können mit genügender Genauigkeit aus den Formeln (23), (30), (38) und (39) berechnet werden. Auf Grund der theoretischen und Versuchsergebnisse konnten die Empfehlungen im Absatz «Schlussfolgerungen» gegeben werden.

Summary

The theory of formation, outset and width of cracks under service loads in reinforced concrete members subjected to bending and shear, is analysed in this paper. Design relationships for reinforced concrete members subjected to bending and shear (provided failure occurs by bending) are derived, based on the general theory of formation and outset of cracks and on the author's experimental results. The case when failure occurs by shear will form the subject of a further paper.

The spacing and width of cracks under service loads can be determined with sufficient accuracy by using relationships (23), (30), (38) and (39). A set of recommendations for practical design, based on the author's theoretical and experimental results, is given in the chapter entitled "Conclusions".

Résumé

L'article est consacré à la théorie de la formation, apparition et largeur des fissures dans les éléments en béton armé, sollicités à la flexion à effort tranchant, soumises aux charges de service. Sur la base de la théorie générale de la formation et apparition des fissures, compte tenu aussi des résultats expérimentaux obtenus par l'auteur, on déduit des formules pour le calcul pratique des éléments en béton armé sollicités à la flexion à effort tranchant (en supposant que la ruine se produise par flexion). Le cas où la ruine est causée par l'effort tranchant fera l'objet d'un article ultérieur.

L'espacement et la largeur des fissures sous les charges de service peuvent être déterminés avec une précision suffisante à l'aide des formules (23), (30), (38) et (39). Dans le chapitre intitulé «Conclusions», on donne des recommandations pour les practiciens, basées sur les résultats théoriques et expérimentaux obtenus par l'auteur.