Quelques applications de la méthode des bandes finies

Autor(en): **Szilagyi, Gy.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **34 (1974)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26288

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Quelques applications de la méthode des bandes finies

Einige Anwendungen der Finite-Strip-Methode

Some Applications of the Finite Strip Method

GY. SZILAGYI

Premier assistant, Université Technique de Budapest, Hongrie. Année académique 1972–1973, assistant boursier, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique

1. Introduction

Pendant les dernières années, plusieurs méthodes aptes au calcul des structures à l'aide des ordinateurs ont été élaborées. Les méthodes où les propriétés particulières des structures sont prises en considération sont plus économiques du point de vue de la capacité et du temps de machine que les méthodes générales. En revanche, plus une méthode est spécialisée moins son domaine d'application est vaste. Il faut donc considérer simultanément ces deux aspects quand on choisit la méthode de calcul.

Parmi les méthodes de calcul élastique des structures particulières, la méthode des bandes finies est l'une des plus connues; son domaine d'application est relativement large surtout dans le calcul des ponts et des toitures. On peut résumer l'essentiel de cette méthode comme suit. La structure est divisée en bandes par un ensemble de lignes parallèles que nous appellerons «lignes nodales». Les déplacements de chaque bande sont exprimées à l'aide d'une fonction contenant des constantes inconnues et qui satisfont les conditions:

a) aux limites aux extrémités de la bande;

b) de compatibilité et d'équilibre à l'intérieur de la bande;

c) de compatibilité entre les bandes, c'est-à-dire sur les lignes nodales; ces dernières conditions peuvent être satisfaites partiellement, comme c'est le cas dans la méthode des éléments finis.

En exprimant les conditions d'équilibre des lignes nodales, on obtient un système d'équations linéaires contenant les constantes inconnues des fonctions

de déplacement des bandes. Un choix avantageux de l'expression de ces fonctions simplifie considérablement le système d'équations qui peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes simples.

La méthode des bandes finies est donc la combinaison d'une méthode analytique et de la méthode des éléments finis du type déplacement.

Jusqu'à présent, la méthode des bandes finies a été élaborée pour les types de bandes suivantes:

1. Bandes de plaque et bandes de disque[1]) de forme rectangulaire [1], [2].
2. Bandes de plaque et bandes de disque de forme de segment circulaire [3], [4]. A propos de ces bandes, il faut mentionner que, dans les calculs numériques, les coques minces peuvent être décomposées en éléments plans qui se comportent à la fois comme des plaques et des disques.
3. Bande de coques de la forme d'une partie de la surface latérale d'un cône tronqué [4].

Les conditions d'appui aux extrémités des types de bandes cités ci-dessus sont les suivantes: les plaques sont simplement appuyées et les disques sont supportés par des diaphragmes infiniment rigides dans leur plan et infiniment souples perpendiculairement à leur plan.

Comme on le comprendra dans la suite de l'article, on peut, à l'aide de ces bandes, calculer les structures orthotropes dont une projection perpendiculaire aux lignes nodales est un rectangle ou un segment circulaire, et dont les bords parallèles aux lignes nodales peuvent être appuyés de façon quelconque. De telles structures sont, hormis des plaques et des disques, certains ponts en caisson, voiles plissés et coques cylindriques que nous appelons structures «plaque-disque».

La méthode des bandes finies est développée pour des structures qui ont, outre les appuis d'extrémités, des appuis élastiques, intermédiaires ou ponctuels et qui peuvent être raidies par des diaphragmes élastiques intermédiaires [5a].

Dans cette publication, nous proposons, pour les structures continues, une nouvelle solution plus économique qui donne la possibilité de calculer les structures dont les conditions d'appui aux extrémités sont différentes de celles qui sont citées ci-dessus. En outre, nous traitons l'application de la méthode des bandes finies dans le cas des déformations initiales (changement de températures, précontrainte, etc.). Nous employons les notations du calcul matriciel.

---

[1]) Dans la présente publication, les plaques minces fléchies qui sont chargées perpendiculairement à leur plan sont appelées «plaques» et les plaques minces qui sont chargées dans leur plan «disques».

2. Calcul des structures continues et encastrées

Dans ce paragraphe, nous traitons le calcul des structures continues en considérant d'abord le cas des plaques, des disques, et, pour terminer, celui des structures à plaques-disques. Par raison de simplicité, nous exposerons toujours la méthode dans le cas simple d'une structure à deux portées.

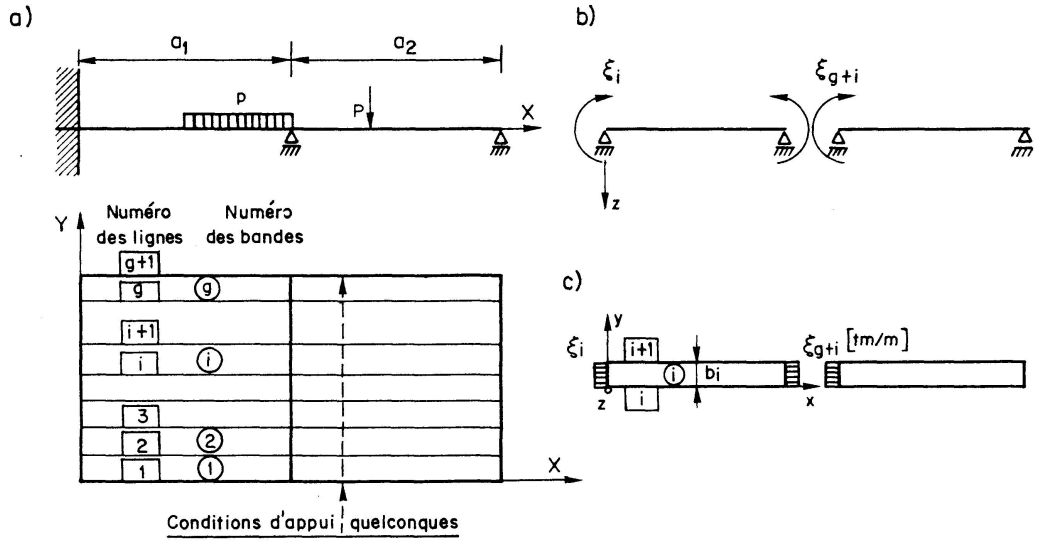

Fig. 1.

A la fig. 1a, on peut voir une plaque continue rapportée au système de coordonnées (X, Y) et divisée en g bandes. Cette plaque est encastrée à l'extrémité $X=0$, continue au-dessus d'un appui simple en $X=a_1$ et simplement appuyée à l'extrémité $X=a_1+a_2$. Les bords $Y=$ const. peuvent avoir des conditions aux limites quelconques.

Nous résolvons la structure par la méthode aux forces à l'aide du système de référence composé de plaques à une portée simplement appuyées aux extrémités $X=$ const. (fig. 1b); les inconnues hyperstatiques sont des couples répartis que nous pouvons remplacer par des systèmes de couples uniformément répartis par bande si ces dernières sont suffisamment étroites. Nous montrons la $i^{\text{ième}}$ bande du système de référence à la fig. 1c; à l'extrémité $x=0$, l'inconnue hyperstatique est le système de couples uniformément répartis ξ_i et à l'extrémité $x=a_1$ celui des paires de couples ξ_{g+i} (1b et 1c).

Le système d'équations de compatibilité exprime la nullité des déplacements à l'endroit des coupures:

$$\underset{(2g,\,2g)}{\mathbf{A}^{(p)}} \cdot \underset{(2g,\,1)}{\boldsymbol{\xi}} + \underset{(2g,\,1)}{\boldsymbol{a}_0^{(p)}} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\xi}$ est composé des inconnues dont le nombre est $2g$ pour notre problème si la plaque est divisée en g bandes. Les termes a_{ik} de la matrice $\mathbf{A}^{(p)}$ et $a_{i0}^{(p)}$ du vecteur $\boldsymbol{a}_0^{(p)}$ désignent respectivement le déplacement à l'endroit

de la $i^{\text{ième}}$ coupure dû à la $k^{\text{ième}}$ inconnue hyperstatique unitaire et le déplacement dû aux charges extérieures. Ces déplacements sont des rotations absolues à l'endroit $X=0$ et des rotations relatives à l'endroit $X=a_1$. Toutes ces rotations varient selon la largeur de chaque bande; cependant si ces dernières sont suffisamment étroites, nous pouvons nous limiter à calculer la valeur moyenne par bande. Les indices supérieurs (p) font allusion au fait qu'il s'agit d'un problème de plaque.

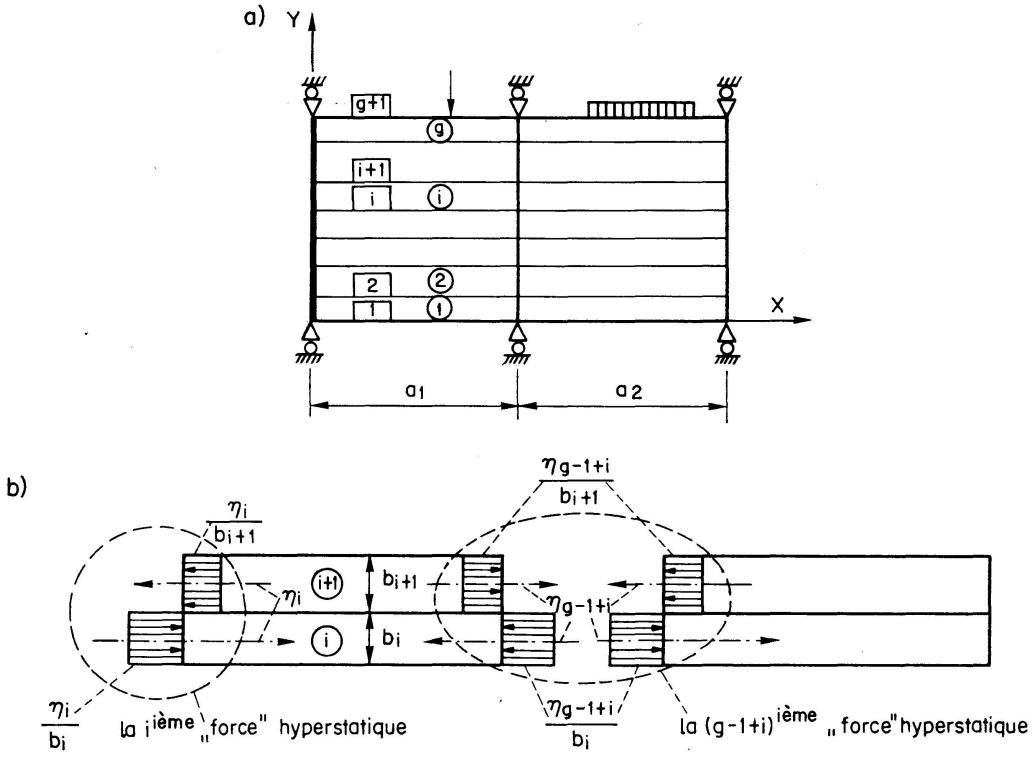

Fig. 2.

A la fig. 2a, nous montrons un disque continu divisé en g bandes. Nous supposons que, par portée, la résultante de la charge dans la direction X est égale à zéro. Nous verrons au paragraphe 4 que cette hypothèse est nécessaire; rappelons que cette restriction est acceptable dans la plupart des problèmes pratiques. Dans le cas des ponts, elle correspond aux problèmes où il n'y a pas de forces de freinage.

L'extrémité $X=0$ du disque est supportée par un diaphragme infiniment rigide à la fois dans son plan et perpendiculairement à celui-ci et dont la translation n'est empêchée que dans la direction Y. Les réactions de direction X doivent donc être nulles et l'extrémité $X=0$ du disque doit rester droite. Aux abscisses $X=a_1$ et $X=a_1+a_2$, le disque est supporté par des diaphragmes infiniment rigides dans leur plan mais infiniment souples perpendiculairement à celui-ci; en $X=a_1$, le disque est continu. Les bords $Y=$ const. peuvent avoir des conditions d'appui quelconques.

Pour la solution par la méthode aux forces, nous prenons un système de

référence qui est composé de disques à une portée. Ces disques sont supportés par des diaphragmes infiniment rigides dans leur plan et infiniment souples perpendiculairement à celui-ci. En conséquence de la supposition relative aux forces extérieures dans la direction X, les inconnues hyperstatiques doivent, elles aussi, constituer des systèmes dont la résultante dans la direction X est égale à zéro. On peut imaginer plusieurs types d'inconnues qui satisfont à cette condition. Pour garder la répartition uniforme des forces selon la largeur de chaque bande, comme nous l'avons fait dans le cas des plaques, nous utilisons des forces hyperstatiques généralisées qu'on peut voir à la fig. 2b. Chacune d'elles agit sur deux bandes à la fois. La $i^{\text{ième}}$ inconnue agit à l'extrémité $X=0$ de la $i^{\text{ième}}$ et de la $i+1^{\text{ième}}$ bande et son intensité par bande est η_i/b_i et η_i/b_{i+1}; si b_i et b_{i+1} sont les largeurs des bandes en question. La résultante de cette inconnue est un couple composé de deux forces de grandeur η_i. A l'extrémité $X=a_1$ des bandes i et $i+1$ agit la $(g-1+i)^{\text{ième}}$ inconnue dont la résultante est une paire de couple. Puisqu'à l'endroit de chaque coupure $X=$ const. de la structure, il y a $g-1$ inconnues hyperstatiques pour notre problème, le système d'équations de compatibilité a la forme suivante:

$$\underset{(2g-2,\,2g-2)}{\mathbf{A}^{(d)}} \cdot \underset{(2g-2,\,1)}{\boldsymbol{\eta}} + \underset{(2g-2,\,1)}{\boldsymbol{a}_0^{(d)}} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Si les bandes sont suffisamment étroites, nous pouvons toujours calculer à l'aide de la valeur moyenne des déplacements dans la direction X des extrémités des bandes.

Le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ est composé des inconnues. La signification des termes de la matrice $\mathbf{A}^{(d)}$ et du vecteur $\boldsymbol{a}_0^{(d)}$ est semblable à celle de la formule (1). Le déplacement à «l'endroit i» est la différence de la translation absolue de l'extrémité de la $i^{\text{ième}}$ et de la $i+1^{\text{ième}}$ bande, si i est plus petit que g (c'est le cas de l'extrémité $X=0$) tandis qu'il est la différence de la translation relative de l'extrémité de la $i^{\text{ième}}$ et de la $i+1^{\text{ième}}$ bande, si i est plus grand que $g-1$. Nous entendons par translation relative de la $i^{\text{ième}}$ bande la translation de l'extrémité de la bande dans la 2e portée par rapport à l'extrémité de la même bande dans la première portée.

Dans le cas où les sections perpendiculaires à l'axe X sont celles de la fig. 3, on peut idéaliser la structure par des bandes chargées dans leur plan et perpendiculairement à celui-ci, c'est-à-dire par des bandes de coque mince, simultanément bandes de disque et de plaque. Si la vue en plan de ces structures est la même qu'aux fig. 1a et 2a et comporte g bandes le nombre des inconnues

Fig. 3.

et la dimension de la matrice carrée **A** est $4g-2$. Cette dernière est une matrice pleine parce que les couples ξ_i causent, eux aussi, des différences de translation relative $a^{(d)}$ et que les couples η_i causent des rotations $a^{(p)}$.

Si l'on peut résoudre les structures de référence ci-dessus dans le cas des charges et des forces hyperstatiques, l'analyse des structures continues et encastrées (fig. 1, 2) est possible par la méthode aux forces.

Dans les chapitres suivants, nous traitons les bandes rectangulaires de plaque et de disque soumises aux charges, aux déformations initiales et aux forces agissant aux extrémités de la bande. Nous rappelons que les publications précédentes ne traitent que les bandes soumises aux charges qui agissent sur l'intérieur de la bande ou sur ses bords, c'est-à-dire sur les lignes.

3. Bandes de plaques rectangulaires

A la fig. 4, nous considérons la $i^{\text{ième}}$ bande d'une plaque limitée par les lignes nodales i et $i+1$ et dont la longueur, la largeur et l'épaisseur sont respectivement a, b et h. Le système de coordonnées locales est (x, y, z).

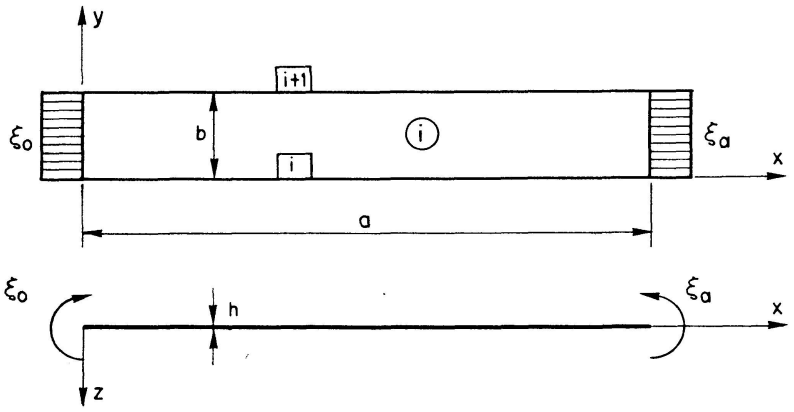

Fig. 4.

Les hypothèses de calcul sont les suivantes:

1. Le matériau de la plaque est linéairement élastique, orthotrope; les plans de symétrie d'élasticité sont perpendiculaires aux axes x, y et z respectivement.
2. Les caractéristiques du matériau sont constantes par bandes.
3. Les hypothèses de la théorie des plaques minces avec petites déformations sont valables.
4. Les charges et les déformations initiales ne varient pas selon la largeur de la bande; cette supposition simplifie le calcul et donne une bonne approximation si la largeur de la bande est suffisamment petite. Remarquons qu'on pourrait établir toute la méthode de calcul sans faire cette approximation.

Les conditions aux limites citées au premier paragraphe s'écrivent comme ceci:

$$\text{en } x = 0 \text{ ou } x = a, \; w = 0 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\text{en } y = 0, && w = w_i(x) \text{ et } \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_i(x), \\ &\text{en } y = b, && w = w_j(x) \text{ et } \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_j(x) \end{aligned} \tag{4}$$

où $w = w(x, y)$ est la flèche de la bande, son sens positif étant celui de l'axe z; $w_i(x)$ et $\theta_i(x)$, $w_j(x)$ et $\theta_j(x)$ sont les flèches et les rotations parallèles à l'axe x de la $i^{\text{ième}}$ et de la $j^{\text{ième}}$ ligne respectivement.

La fonction de flèche de la $i^{\text{ième}}$ bande est supposée de la forme suivante:

$$w = \boldsymbol{c}^* \sum_{m=1}^{M} \boldsymbol{w}_m \sin k_m x, \tag{5}$$

où $$\boldsymbol{c}^* = [L_1, L_2, L_3, L_4], \quad k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \boldsymbol{w}_m = \begin{bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{bmatrix}$$

avec

$$L_1 = 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3},$$

$$L_2 = y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2},$$

$$L_3 = \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3},$$

$$L_4 = \frac{y^3}{b^2} - \frac{y^2}{b}.$$

M étant le nombre des coefficients de Fourier pris en considération.

Les termes du vecteur $\boldsymbol{w}_m$ sont des inconnues dont la signification physique est l'amplitude du $m^{\text{ième}}$ harmonique de la fonction de flèche et de rotation des lignes adjacentes à la bande.

La fonction (5) satisfait les conditions (3) et (4). Il ne reste à satisfaire que les conditions d'équilibre des lignes dont on peut déterminer les constantes inconnues qui se trouvent dans la formule (5). Pour appliquer la condition d'équilibre générale des systèmes élastiques, c'est-à-dire le principe du minimum de l'énergie potentielle totale en fonction du vecteur $\boldsymbol{w}_m$ des inconnues, il est nécessaire d'introduire les formules suivantes.

Dans la théorie des plaques minces, on utilise les courbures dans deux directions orthogonales et la distorsion en tant que déformations généralisées.

Les déformations totales $\boldsymbol{\varrho}_T$ sont toujours composées de déformations initiales (p.e. effet thermique) et élastiques

$$\boldsymbol{\varrho}_T = \boldsymbol{\varrho}_0 + \boldsymbol{\varrho}. \tag{6}$$

Les déformations totales exprimées à l'aide de la fonction de flèche (5) s'écrivent:

$$\boldsymbol{\varrho}_T = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial w\, \partial y} \end{bmatrix} = \sum_{(m)} \mathbf{S}_m \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \boldsymbol{w}_m. \tag{7}$$

Dans cette expression

$$\mathbf{S}_m = \langle \sin k_m x,\ \sin k_m x,\ \cos k_m x \rangle\ ^{2}), \qquad \mathbf{Q}_m = \langle k_m^2,\ -1,\ -2k_m \rangle,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^* \\ \boldsymbol{c}^{*\prime\prime} \\ \boldsymbol{c}^{*\prime} \end{bmatrix}.$$

Les signes prime et seconde signifient la première et la deuxième dérivée selon y.

Pour faire l'addition selon la formule (6), on doit développer les courbures initiales en séries de Fourier sinusoïdales et les distrosions initiales en série cosinusoïdale comme suit:

$$\boldsymbol{\varrho}_0 = \sum_{(m)} \mathbf{S}_m \boldsymbol{\varrho}_{0m}. \tag{8}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\varrho}_{0m}$ contient les coefficients de Fourier des fonctions de déformations initiales.

A l'aide des déformations élastiques, on peut exprimer les moments par unité de longueur que nous utilisons comme contraintes généralisées:

$$\boldsymbol{m} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varrho}. \tag{9}$$

Le vecteur $\boldsymbol{m}$ est composé des moments fléchissants et du moment de torsion

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}$$

tandis que la matrice $\mathbf{D}$ est égale à la matrice de rigidité de la loi de Hooke du matériau orthotrope en état plan de contraintes, multipliée par $h^3/12$.

La charge qui agit à la surface de la bande doit être développée en série sinusoïdale:

$$p(x) = \sum_{(m)} p_m \sin k_m x. \tag{10}$$

---

[2]) Par le symbole $\langle\ \rangle$ nous désignons les matrices diagonales.

Il en est de même du vecteur des charges linéiques agissant sur les lignes:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_m \sin k_m x \tag{11}$$

avec $$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_i(x) \\ n_i(x) \\ q_j(x) \\ n_j(x) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_m = \begin{bmatrix} q_{im} \\ n_{im} \\ q_{jm} \\ n_{jm} \end{bmatrix}.$$

$q(x)$ et $n(x)$ sont les forces réparties et les couples répartis dont le plan est perpendiculaire à l'axe x, les indices i ou j désignent la ligne où la charge agit. Les coefficients de Fourier sont désignés par l'indice m. Le vecteur des déplacements correspondants à celui des charges q s'écrit:

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} w_i(x) \\ \theta_i(x) \\ w_j(x) \\ \theta_j(x) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Les systèmes de couples uniformément répartis qui agissent sur les extrémités $x=0$ et $x=a$ de la bande (voir à la fig. 4 leur sens positif) sont désignés par ξ_0 et ξ_a.

Les rotations des extrémités $x=0$ et $x=a$ de la bande s'expriment à partir de la fonction de flèche (5) selon:

$$\Phi_0(y) = \boldsymbol{c}^* \sum_{(m)} \boldsymbol{w}_m k_m, \qquad \Phi_a(y) = \boldsymbol{c}^* \sum_{(m)} \boldsymbol{w}_m k_m (-1)^m. \tag{13}$$

Après ces formules, on peut exprimer l'énergie potentielle totale de la $i^{\text{ième}}$ bande:

$$\Pi = \tfrac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \boldsymbol{m}^* \boldsymbol{\varrho}\, dx\, dy - \int_0^b \int_0^a w\, p\, dx\, dy - \int_0^a \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{q}\, dx - \int_0^b (\xi_0 \Phi_0 - \xi_a \Phi_a)\, dy. \tag{14}$$

Les valeurs des inconnues qui satisfont la condition d'équilibre minimisent l'énergie potentielle. Le système

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{w}_m^*} = 0 \quad (m = 1, 2 \ldots M) \tag{15}$$

contient $4M$ équations. Cependant, si l'on exécute les opérations de la formule (14) en employant les formules (5) à (13), grâce à l'orthogonalité des séries de Fourier, le système (15) se décompose en systèmes d'équation dont le $m^{\text{ième}}$ ne contient que les quatre inconnues du vecteur $\boldsymbol{w}_m$. La forme de ces systèmes à quatre inconnues est la suivante:

$$\mathbf{K}_m^{(p)} \boldsymbol{w}_m + \boldsymbol{t}_m^{(p)} = \mathbf{0}, \tag{16}$$

où $\mathbf{K}_m$ est la matrice de rigidité de la $i^{\text{ième}}$ bande,

$\boldsymbol{t}_m^{(p)}$ est le vecteur de charges

que l'on peut calculer comme suit:

$$\mathbf{K}_m^{(p)} = \int_0^b \mathbf{A}^* \mathbf{Q}_m \mathbf{D} \mathbf{Q}_m \mathbf{A}\, dy, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{t}_m^{(p)} = -\int_0^b \mathbf{A}\, dy\, \mathbf{Q}_m \mathbf{D} \varrho_{0m} - p_m \int_0^b \boldsymbol{c}\, dy - \boldsymbol{q}_m - \frac{2}{a} k_m \{\xi_0 - \xi_a(-1)\} \int_0^b \boldsymbol{c}\, dy. \tag{18}$$

A l'aide de la formule (16) de chaque bande, on peut établir le système d'équation pour toute la plaque. Si le nombre de lignes nodales est f, on doit M fois résoudre un système à $2f$ inconnues.

Nous remarquons que l'addition des termes qui contiennent les couples ξ dans les formules (14), (18) influence la valeur des inconnues du vecteur $\boldsymbol{w}_m$ de la même façon que si l'on ajoutait à la fonction de flèche (15) développée en série de Fourier une autre série de Fourier dont la deuxième dérivée selon x converge aux endroits infiniment proches des extrémités $x=0$ et $x=a$, vers ξ_0 et ξ_a lorsque M tend vers l'infini. La même idée a été utilisée dans les publications [8] et [9].

4. Bandes de disques rectangulaires

A la fig. 5, nous considérons la $i^{\text{ième}}$ bande d'un disque. Les notations sont semblables à celles de la fig. 4.

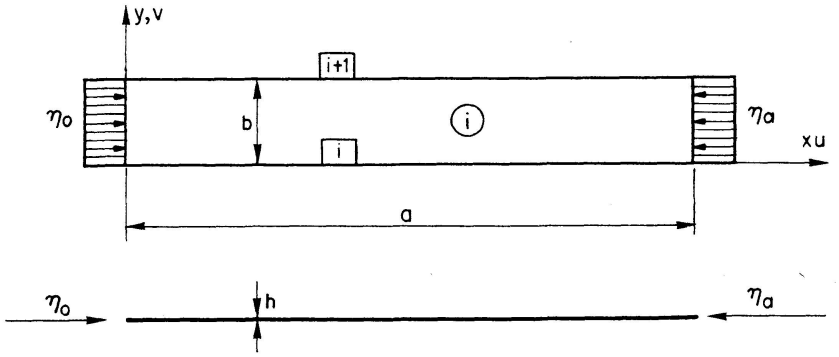

Fig. 5.

Nous conservons la première et la deuxième hypothèse citée au début du troisième paragraphe et nous leur ajoutons les deux autres hypothèses supplémentaires suivantes:

3. Les contraintes et les déformations ne varient pas selon l'épaisseur de la bande.
4. Quant aux charges et aux déformations initiales, nous reprenons l'hypothèse 4 du troisième paragraphe moyennant le complément suivant. Dans la publication [2], la charge longitudinale (direction x) qui agit sur chaque bande est supposée être en équilibre; le traitement du présent paragraphe donne la possibilité de calculer l'influence des charges longitudinales qui sont en équilibre sur tout le disque et qui ne seraient pas en équilibre bande par bande.

La loi de Hooke du matériau orthotrope en état plan de contraintes s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{19}$$

ou plus en détail:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{1-\mu_x\mu_y} & \dfrac{\mu_x E_x}{1-\mu_x\mu_y} & 0 \\ \dfrac{\mu_y E_y}{1-\mu_x\mu_y} & \dfrac{E_y}{1-\mu_x\mu_y} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

σ_x, σ_x et τ_{xy} sont les contraintes normales et de cisaillement,
ϵ_x, ϵ_y et γ_{xy} sont les dilatations et le glissement,
E_x, E_y et μ_x, μ_y sont les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson dans les directions x et y,
G est le module de cisaillement.

Les conditions aux limites citées au premier paragraphe sont:

$$\text{en } x = 0 \text{ ou } x = a, \quad v = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_x = \epsilon_x + \mu_x \epsilon_y = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\text{en } y = 0, && u = u_i \text{ et } v = v_i, \\ &\text{en } y = b, && u = u_j \text{ et } v = v_j, \end{aligned} \tag{21}$$

où $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ sont les fonctions de translation de la bande dans les directions x et y,
u_i, v_i et u_j, v_j sont celles des lignes nodales i et j.

Les fonctions de translation de la $i^{\text{ième}}$ bande sont supposées de la forme suivante:

$$u = \sum_{m=0}^{M} (\Lambda_1 u_{im} + \Lambda_2 u_{jm}) \cos k_m x, \tag{22}$$

$$v = \sum_{m=1}^{M} (\Lambda_1 v_{im} + \Lambda_2 v_{jm}) \sin k_m x \tag{23}$$

avec $$\Lambda_1 = 1 - \frac{y}{b} \quad \text{et} \quad \Lambda_2 = \frac{y}{b}.$$

u_{im}, u_{jm}, v_{im}, v_{jm} sont des inconnues dont la signification physique est l'amplitude du $m^{\text{ième}}$ harmonique des fonctions de translation des lignes adjacentes à la bande.

Pour atteindre l'objectif avancé dans l'hypothèse 4, il faut prendre en considération le zéro$^{\text{ième}}$ terme des séries de Fourier cosinusoïdales, comme indiqué dans la formule (22). On en trouvera la preuve dans l'analyse des formules (28) et (34). Pour les séries sinusoïdales, ce terme est identiquement nul.

Les fonctions (22) et (23) peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{G}_m \mathbf{N} \boldsymbol{e}_m \tag{24}$$

avec $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}_m = \langle \cos k_m x, \sin k_m x \rangle$,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} u_{im} \\ v_{im} \\ u_{jm} \\ v_{im} \end{bmatrix},$$

Les déformations totales sont la somme des déformations initiales et élastiques:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{25}$$

Les déformations totales exprimées à l'aide des fonctions de translations s'écrivent:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{S}_m \mathbf{H}_m \boldsymbol{e}_m, \tag{26}$$

si $$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} -k_m \Lambda_1 & 0 & -k_m \Lambda_2 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & 0 & \Lambda_2 \\ \Lambda_1 & k_m \Lambda_1 & \Lambda_2 & k_m \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

De même que précédemment dans le paragraphe 3, les déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, le vecteur $\boldsymbol{p}$ des charges agissant sur la surface de la bande et le vecteur $\boldsymbol{\varkappa}$ des charges linéiques agissant sur les lignes doivent être développés en séries de Fourier selon

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{S}_m \boldsymbol{\varepsilon}_{0m} \tag{27}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{0m} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x0m} \\ \epsilon_{y0m} \\ \gamma_{xy0m} \end{bmatrix}$, qui est le vecteur des coefficients de Fourier des fonctions de déformations initiales,

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x(x) \\ p_y(x) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{G}_m \boldsymbol{p}_m, \tag{28}$$

où $\boldsymbol{p}_m = \begin{bmatrix} p_{xm} \\ p_{ym} \end{bmatrix}$ est composé de coefficients de Fourier des fonctions de charges,

$$\boldsymbol{\varkappa} = \sum_{m=0}^{M} \boldsymbol{\Gamma}_m \boldsymbol{\varkappa}_m, \tag{29}$$

où $$\boldsymbol{\Gamma}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\varkappa}_m = \begin{bmatrix} q_{ixm} \\ q_{iym} \\ q_{jxm} \\ q_{jym} \end{bmatrix}.$$

Dans les termes du vecteur $\varkappa_m$, le premier indice désigne la ligne où la charge agit, le deuxième indice donne sa direction et le troisième indique qu'il s'agit de coefficients de Fourier. Pour l'expression (28), la formule donnant le zéro$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier cosinusoïdal s'écrit:

$$p_{x0} = \frac{1}{a}\int_0^a p_x(x)\,dx$$

et montre que ce coefficient est nul si le système p_x est en équilibre.

Le vecteur des translations qui correspond au vecteur des charges $\varkappa$ est:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Les forces uniformément réparties qui agissent sur les extrémités $x=0$, et $x=a$ de la bande (fig. 5) sont désignées par η_0 et η_a.

On peut calculer la translation dans la direction x des extrémités $x=0$ et $x=a$ de la bande selon les formules

$$\begin{aligned} u_0(y) &= \sum_{m=0}^{M} (\Lambda_1 u_{im} + \Lambda_2 u_{jm}), \\ u_a(y) &= \sum_{m=0}^{M} (\Lambda_1 u_{im} + \Lambda_2 u_{jm})(-1)^m. \end{aligned} \tag{31}$$

L'énergie potentielle totale de la $i^{\text{ième}}$ bande s'exprime par:

$$\Pi = \frac{h}{2}\int_0^b\int_0^a \boldsymbol{\sigma}^*\,\boldsymbol{\varepsilon}\,dx\,dy - \int_0^b\int_0^a \boldsymbol{u}^*\,\boldsymbol{p}\,dx\,dy - \int_0^a \boldsymbol{\beta}^*\,\boldsymbol{\varkappa}\,dx - \int_0^b (\eta_0 u_0 - \eta_a u_a)\,dy. \tag{32}$$

La condition d'équilibre s'écrit:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{e}_m^*} = 0 \quad (m = 0, 1, 2 \ldots M) \tag{33}$$

et conduit aux sytèmes d'équations à quatre inconnues:

$$\mathbf{K}_m^{(d)}\,\boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{t}_m^{(d)} = \mathbf{0}, \tag{34}$$

où $\mathbf{K}_m^{(d)} = h\int_0^b \mathbf{H}_m^*\,\mathbf{B}\,\mathbf{H}_m\,dy,$

$$\boldsymbol{t}_m^{(d)} = -h\int_0^b \mathbf{H}_m^*\,dy\,\mathbf{B}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{0m} - \int_0^b \mathbf{N}^*\,dy\,\boldsymbol{p}_m - \boldsymbol{\varkappa}_m - \frac{b}{a}[\eta_0 - \eta_a(-1)^m]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si $m=0$, l'équation (34) montre que v_{im} et v_{jm} sont identiquement égaux à zéro et devient:

$$h\,G\frac{1}{b}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i0}\\ u_{j0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_{ix0}\\ t_{jx0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{35}$$

La matrice des coefficients de cette équation est singulière. Cependant, on peut la transformer de telle façon qu'elle contienne les translations relatives

$$\Delta u_i = u_{i0}-u_{j0}. \tag{36}$$

Si nous introduisons la notation

$$\gamma_i=\frac{h_i G_i}{b_i} \tag{37}$$

pour la $i^{\text{ième}}$ bande, le zéro$^{\text{ième}}$ système d'équation d'un disque composé de g bandes prend la forme suivante:

$$\begin{bmatrix}\gamma_1 & & & & \\ -\gamma_1 & \gamma_2 & & & \\ & -\gamma_2 & \gamma_3\cdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & \gamma_{g-1} & & \\ & & -\gamma_{g-1} & \gamma_g & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\\ \Delta u_3\\ \vdots\\ \Delta u_{g-1}\\ \Delta u_g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_{1x0}\\ t_{2x0}\\ t_{3x0}\\ \vdots\\ t_{(g-1)x0}\\ t_{gx0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{38}$$

A l'aide des translations relatives Δu_i, on peut simplement calculer les déplacements figurant dans l'équation (2).

5. Algorithme des structures plaque-disque

A l'aide des équations (16) et (34) on peut établir le système d'équations de la bande «plaque-disque» en tenant compte du fait que le comportement de la bande en tant que plaque est indépendant de son comportement en tant que disque comme il résulte de la théorie des plaques minces.

Le système d'équations d'équilibre de la bande «plaque-disque» peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_m^{(d)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_m^{(p)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_m\\ \boldsymbol{w}_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_m^{(d)}\\ \boldsymbol{t}_m^{(p)}\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ou dans une forme plus concise:

$$\mathbf{K}_m\,\boldsymbol{d}_m+\boldsymbol{t}_m=\mathbf{0} \tag{39}$$

Dans le cas des structures «plaque-disque», on a quatre inconnues par ligne nodale.

En ce qui concerne la construction de l'équation d'ordre zéro du type (38), remarquons que s'il y a une ou plusieurs parties fermées dans la section (fig. 3a),

il faut compléter le système par des équations qui expriment la continuité des déformations des parties fermées.

Les étapes de notre programme pour le calcul des structures continues sont les suivantes:

1. Entrée des données et calculs préliminaires.
2. Calcul du système de référence (§ 2) par portée.
   - 2.1. Composition du vecteur des charges (les cas de charges sont soit les charges extérieures soit les forces «hyperstatiques» unitaires).
   - 2.2. Composition de la matrice de rigidité de la portée considérée de la structure.
   - 2.3. Résolution du système d'équations.
   - 2.4. Calcul des déplacements des extrémités des bandes.
   - 2.5. Composition et résolution du système d'équations d'ordre zéro (formule (38)).
   - 2.6. Calcul des coefficients pour la méthode aux forces (équations (1) et (21)).
3. Résolution du système d'équations de la méthode aux forces.
4. Calcul du système de référence par portée; chaque portée est sollicitée simultanément par les charges extérieures et les «forces» hyperstatiques.
   - 4.1. Composition du vecteur de charges.
   - 4.2. Composition de la matrice de rigidité de la portée.
   - 4.3. Résolution du système d'équation.
   - 4.4. Calcul des déplacements et des éléments de réduction souhaités.
5. Impressions.

6. Exemples numériques

Dans ce paragraphe, nous traitons quelques exemples numériques et nous les comparons aux résultats de la littérature.

6.1. Le premier problème est une plaque carrée de dimensions 10×10 m, simplement appuyée au contour (fig. 6). On a un changement de température variant linéairement selon l'épaisseur de la plaque; la différence entre la température des surfaces inférieure et supérieure étant 20° C, la répartition de température est uniforme dans les directions X et Y. Les autres données sont les suivantes:

Epaisseur $h = 0{,}3$ m, coefficient de Poisson $\mu = 1/6$, rigidité $E h^3/12(1-\mu^2) = 6400$ tm, coefficient de dilatation thermique $\alpha = 0{,}000012$.

Nous divisons la plaque en dix bandes dans la direction Y. Dans le tableau 1, nous donnons la comparaison de nos résultats avec ceux de MAULBETSCH [6].

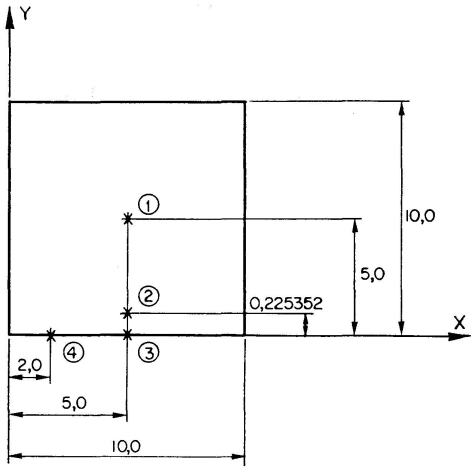

Fig. 6.

Tableau 1

		Maulbetsch	A	B	C	D
1	m_x	−2,4889	−2,4925	−2,4925	−2,4940	−2,4940
	m_y	−2,4889	−2,3527	−2,4316	−2,4409	−2,4673
2	m_x	−4,7908	—	—	−4,7848	−4,7889
	m_y	−0,1870	—	—	−0,1180	−0,1445
3	m_x	−4,9778	−4,8003	−4,8855	−4,8939	−4,9200
4	m_x	−4,9778	−4,6810	−4,8240	−4,8354	−4,8796
	m_{xy}	−3,23	−3,1151	−3,1316	−3,1334	−3,1360

Dans les solutions A et B, chaque bande a la même largeur, tandis que dans C et D les bandes de bords sont plus étroites que les autres et elles ont une largeur de 0,225352 m. Le nombre des termes de Fourier pris en considération est 20 dans la solution A, 40 dans la B et C, 60 dans D[3]). On voit que dans les problèmes de déformations initiales, il faut beaucoup plus de termes de Fourier (40 à 60) que dans le cas des charges extérieures [1], [2] et que la solution avec des bandes de bords plus étroites est plus précise (cf. solutions B et C, toutes les deux avec 40 termes de Fourier). En outre, on peut remarquer que le calcul avec le même nombre de termes de Fourier donne de meilleurs résultats pour certains éléments de réductions (p.e. m_x aux points 1 ou 2) que pour d'autres (p.e. m_y au point 1, m_{xy} au point 4). Cette constation est applicable au cas des charges extérieures.

6.2. Le deuxième problème est une plaque continue à deux portées. On peut voir les dimensions et les cas de charges aux figures 7a et 8a. Les autres données sont les suivantes: épaisseur $h = 0{,}2$ m, coefficient de Poisson $\mu = 1/5$, rigidité $E h^3/12\,(1-\mu^2) = 10000$ tm.

[3]) Grâce à la symétrie du problème, les termes pairs sont nuls.

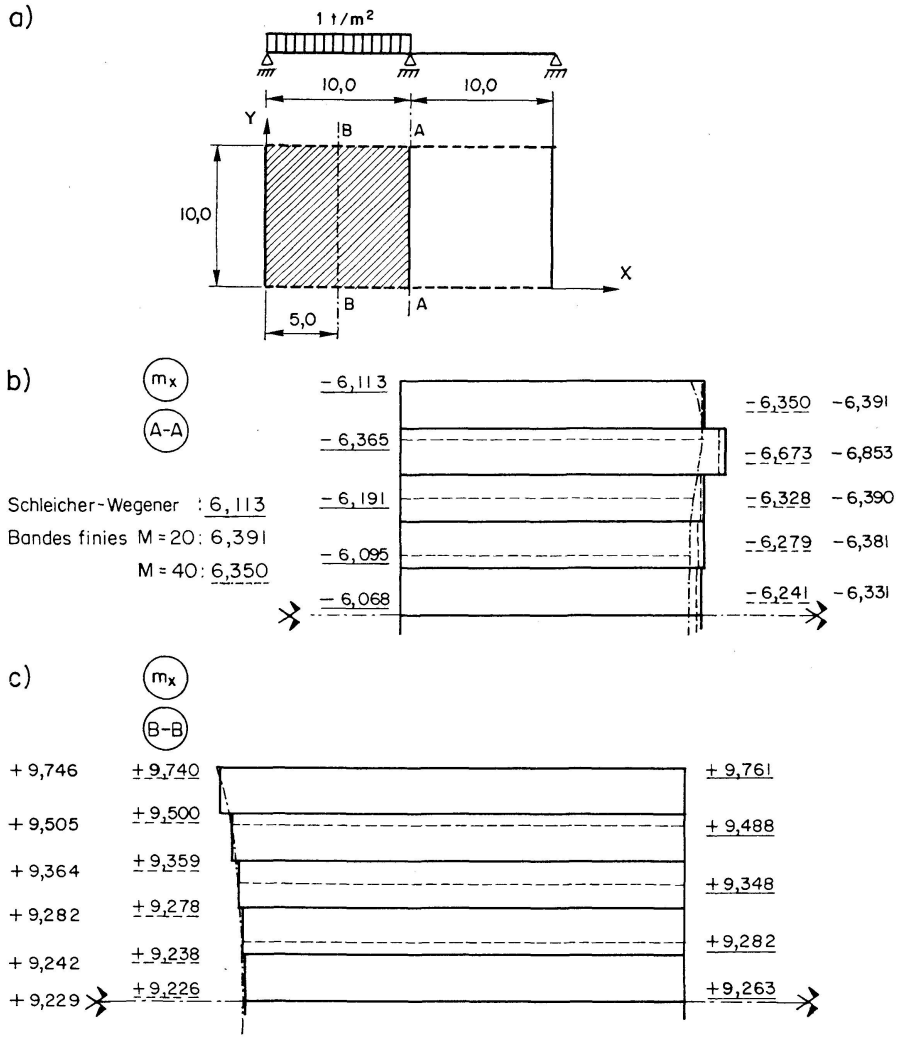
a)
1 t/m²
10,0
10,0
Y
B
A
10,0
X
B
A
5,0
b)
mx
A-A
Schleicher-Wegener : 6,113
Bandes finies M = 20: 6,391
M = 40: 6,350
-6,113
-6,365
-6,191
-6,095
-6,068
-6,350
-6,391
-6,673
-6,853
-6,328
-6,390
-6,279
-6,381
-6,241
-6,331
c)
mx
B-B
+9,746
+9,740
+9,505
+9,500
+9,364
+9,359
+9,282
+9,278
+9,242
+9,238
+9,229
+9,226
+9,761
+9,488
+9,348
+9,282
+9,263

Fig. 7.

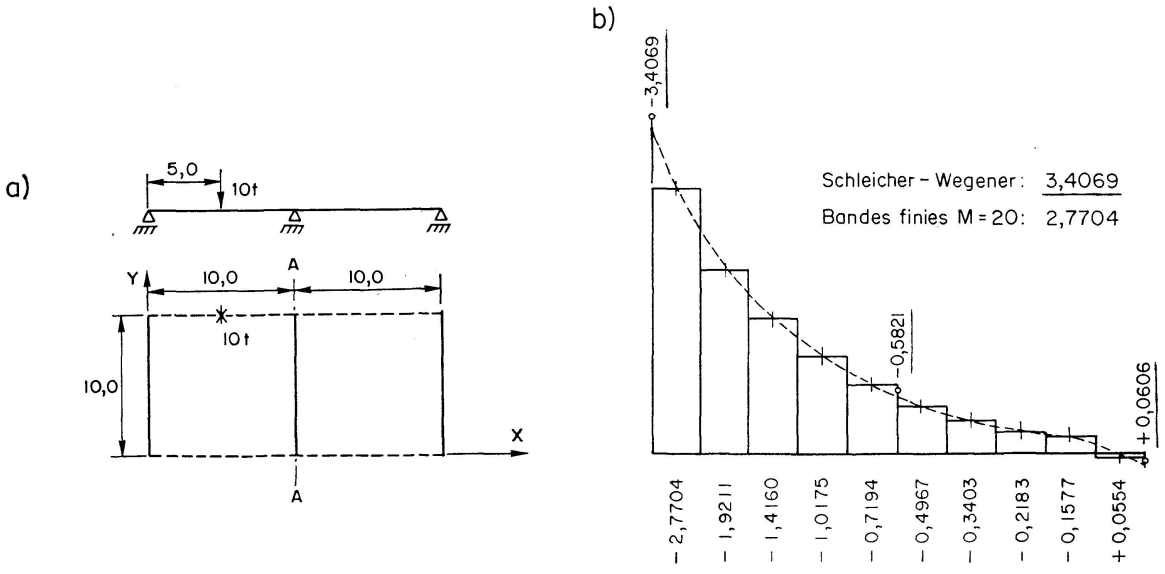
a)
5,0
10t
Y
10,0
A
10,0
10t
10,0
X
A
b)
-3,4069
Schleicher - Wegener: 3,4069
Bandes finies M = 20: 2,7704
-0,5821
+0,0606
-2,7704
-1,9211
-1,4160
-1,0175
-0,7194
-0,4967
-0,3403
-0,2183
-0,1577
+0,0554

Fig. 8.

Nous avons divisé la plaque en six bandes de même largeur, car les expériences du calcul montrent que les système d'équations (1) de la méthode aux forces donne de meilleurs résultats, si les bandes ont la même largeur ou si la différence entre les largeurs de deux bandes voisines n'est pas importante.

Aux figures 7 et 8, les résultats des deux cas de charges sont comparés avec ceux de SCHLEICHER et WEGENER [7].

Examinons d'abord le cas de la charge uniformément répartie. Dans la section $B-B$, il n'y a que de très petites différences entre les moments m_x obtenus avec 20 et 40 termes de Fourier, et ils sont très proches de ceux de SCHLEICHER. Dans la section $A-A$, la différence des résultats obtenus avec 20 et 40 termes est plus grande, mais elle reste partout inférieure à 2%. Les moments de la méthode des bandes finies sont de 2 à 5% plus grands que ceux de SCHLEICHER, calculés par la méthode des différences finies.

6.3. Le troisième problème est un pont en caisson à deux portées. Les dimensions de la structure, la charge et la division en bandes, sont montrées aux figures 9a et 9b, le coefficient de Poisson est $\mu = 1/6$, et le module d'élasticité $E = 4\,000\,000$ lb. ft.$^{-2}$.

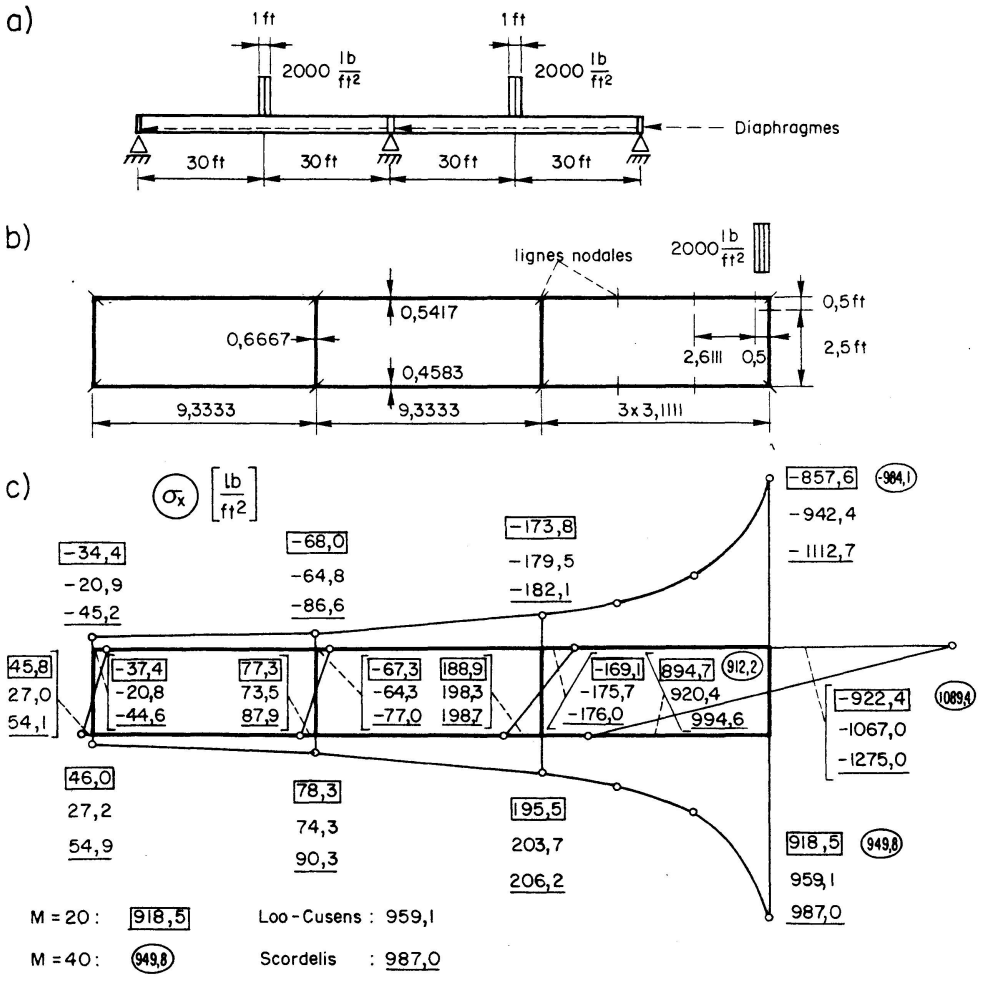

Fig. 9.

Le même problème, avec la même division en bandes, a été calculé par Loo et CUSENS [5a] à l'aide d'une autre version de la méthode des bandes finies. Ils ont comparé leurs résultats avec ceux de Scordelis. A la fig. 9c, nous donnons la comparaison des contraintes longitudinales σ_x de la section chargée en y ajoutant nos résultats obtenus avec 20 et 40 termes de Fourier. Ces deux derniers ne diffèrent sensiblement qu'à proximité de la charge; par conséquent, plus loin de la charge nous ne donnons que les résultats obtenus avec 20 termes. On voit que nos résultats sont généralement plus proches des résultats analytiques de Scordelis que ceux de Loo et Cusens , bien que ces derniers aient pris en considération 100 termes de Fourier dont la moitié était nuls à cause de la symétrie du problème.

7. Conclusions

Une méthode de calcul par bandes finies a été proposée pour les structures du type «plaque-disque. Cette méthode est plus économique que celle de la publication [5a], mais elle ne permet pas de prendre en considération des appuis verticaux élastiques ou des appuis ponctuels.

En outre la présente publication traite le calcul des structures «plaque-disque» soumises aux déformations initiales, comme p.e. l'effet thermique ou la précontrainte.

En utilisant les mêmes principes que ceux exposés ci-avant, on pourrait généraliser la méthode au calcul des structures continues courbes «plaque-disque».

8. Remerciements

L'élaboration de la méthode traitée dans cet article a commencé à la Chaire de Mécanique de l'Université Technique de Budapest. La programmation et l'application ont eu lieu à la Chaire de Stabilité des Constructions de la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique) dont l'auteur apprécie le support financier.

L'auteur remercie le Prof. M. Save de la possibilité qu'il lui a donnée d'effectuer le présent travail, ainsi que de ses précieux conseils.

Il remercie également M. Prayez, assistant, qui a fait la plus grande partie du travail pénible de la programmation.

References

1. CHEUNG, Y. K.: Finite strip method analysis of elastic slabs. Proc. ASCE, EM 6, Dec. 1968, p. 1365–1378.
2. CHEUNG, Y. K.: Folded plate structure by finite strip method. Proc. ASCE, ST 12, Dec. 1969, p. 2963–2979.
3. CHEUNG, Y. K.: The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks. Mémoires AIPC, Vol. 29 (1969), N° 2, p. 41–52.

4. CHEUNG, M. S. and CHEUNG, Y. K.: Analysis of curved box girder bridges by finite strip method. Mémoires AIPC, Vol. 31 (1971), N° 1, p. 1–19.
5. Developments in bridge design and construction. Edited by K. C. Rockey, F. L. Bannister, H. R. Evans. Crosby Lockwood & Son Hol., London, 1971.
   a) LOO, Y. C., CUSENS, A. R.: Developments of the finite strip method in the analysis of bridge decks, p. 53–72.
   b) SCORDELIS, A. C.: Analytical solutions for box girder bridges, p. 200–216.
6. MAULBETSCH, F. L.: Thermal stresses in plates. Journal of Applied Mechanics. Vol. 2 (1935), p. A 141–A 146.
7. SCHLEICHER, C., WEGENER, B.: Durchlaufende schiefe Platten. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1968.
8. WILDE, P.: The general solution for a rectangular orthotropic plate expressed by double trigonometric series. Archiwum Mechaniki Stosowanej. Vol. 10 (1958), p. 747 to 754.
9. SZILAGYI, GY.: Analysis of skew anisotropic plates by the small parameter method. Periodica Polytechnica, Civ. Eng., Vol. 14 (1970), p. 193–207.

Résumé

L'auteur traite le développement de la méthode des bandes finies pour le calcul des structures continues et encastrées dont les éléments sont chargés dans leur plan et perpendiculairement à celui-ci (voiles plissés, voiles cylindriques, ponts en caisson, etc.). En outre, il donne l'application de la méthode dans le cas des déformations initiales (p. e. changement de température, précontrainte). Des exemples numériques illustrent la précision de la méthode développée qui se montre plus efficace que les versions proposées jusque maintenant.

Zusammenfassung

Der Autor behandelt die Entwicklung der Finite-Strip-Methode zur Berechnung durchlaufender und eingespannter Konstruktionen, deren Elemente in ihrer Ebene und senkrecht zu dieser belastet sind (Faltwerke, zylindrische Schalen, Kastenträgerbrücken usw.). Ausserdem zeigt er die Anwendung der Methode für den Fall von Anfangsdeformationen (z. B. Temperaturänderung, Vorspannung). Numerische Beispiele erläutern die Genauigkeit der Methode, die sich erfolgreicher erweist als die bisher vorgeschlagenen Versionen.

Summary

The author deals with the development of the Finite strip method for the calculation of continuous and encastred structures the elements of which are loaded in their plane and vertically to it (folded plates, cylindrical shells, box girder bridges, etc.). Moreover he shows the application of the method for the case of initial deformations (e. g. temperature change, prestressing). Numerical examples illustrate the precision of the method which proves more efficient than the until now proposed versions.