Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 16 (1974)

Artikel: Zur wirklichkeitsnahen numerischen Bestimmung der zeitabhängigen Krümmung von Stahlbetonstützen

Autor: Sparowitz, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur wirklichkeitsnahen numerischen Bestimmung der zeitabhängigen Krümmung von Stahlbetonstützen

A Realistic Numerical Computation of the time dependent Curvature of Reinforced Concrete Columns

Contribution à l'analyse numérique réaliste de la courbure de colonnes en béton en fonction du temps

L. SPAROWITZ
Dipl. Ing.
Institut für Stahlbeton- und Massivbau
Technische Hochschule Graz
Graz, Oesterreich

1. EINFUEHRUNG

Als grundlegende Voraussetzung für eine wirklichkeitsnahe Traglastberechnung von Stahl- und Spannbetondruckstäben ist das zeitabhängige Verformungsverhalten des Verbundquerschnittes anzusehen. Die vorliegende Methode ist durch ihren sehr allgemeinen Aufbau vor allem für vergleichende theoretische Untersuchungen geeignet. Sie wird hier für beliebige einfach symmetrische Querschnittsform und gerade Biegung dargestellt, lässt sich jedoch auch auf unsymmetrische Querschnitte und zweiachsige Momentenbeanspruchung (schiefe Biegung) erweitern. Das Bild 1 zeigt die zeitabhängige Spannungsumlagerung und die dadurch bedingte Aufteilung der Gesamtbetondehnungen in Langzeit- und die schraffierten Kurzzeitanteile.

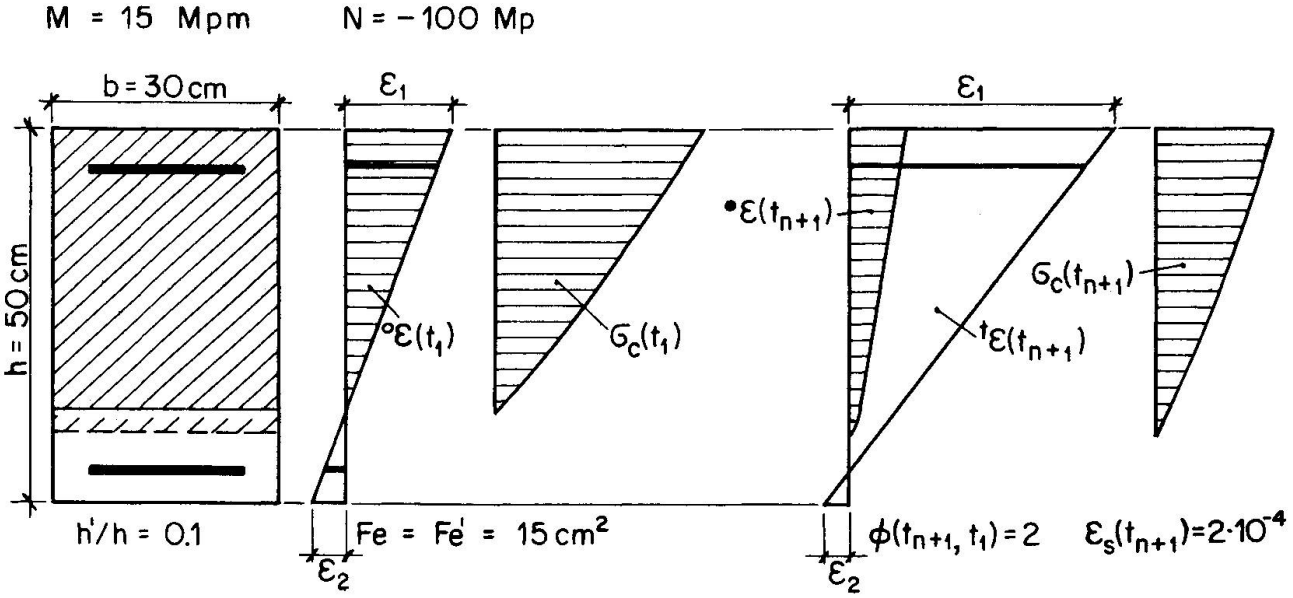

Bild 1: Zeitabhängige Spannungsumlagerung im Stahlbetonquerschnitt

2. GENERELLES VORGEHEN ZUR ERMITTLUNG DER KRUEMMUNG

Die iterative numerische Ermittlung der Krümmung K erfolgt mittels einer "räumlichen Regula Falsi" [1]. In den Achsrichtungen der Grundrissebene seien die beiden unbekannten Randdehnungen $-\varepsilon_1$ und ε_2, in der dritten Richtung die Differenz aus äusserem (aktivem) und innerem (reaktivem) Biegemoment aufgetragen (Bild 2). Dadurch entsteht eine räumliche Fläche, da jedem Wertepaar $-\varepsilon_1$ und ε_2 ein Wert $\Delta M = M_a - M_r$ zugeordnet ist. Trägt man weiters an Stelle von ΔM die Differenz aus äusserer und innerer Normalkraft auf, so entsteht eine zweite räumliche Fläche ΔN. Das Bild 4 zeigt eine Schichtenliniendarstellung derartiger Raumflächen ΔN und ΔM. Die Spuren dieser Flächen in der Grundrissebene $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ schneiden sich in einem Punkt A, dessen Koordinaten ε_1 und ε_2 die gesuchten Randdehnungen darstellen, für die sowohl $\Delta M = M_a - M_r = 0$ als auch $\Delta N = N_a - N_r = 0$ ist, für die also Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Schnittlasten besteht.

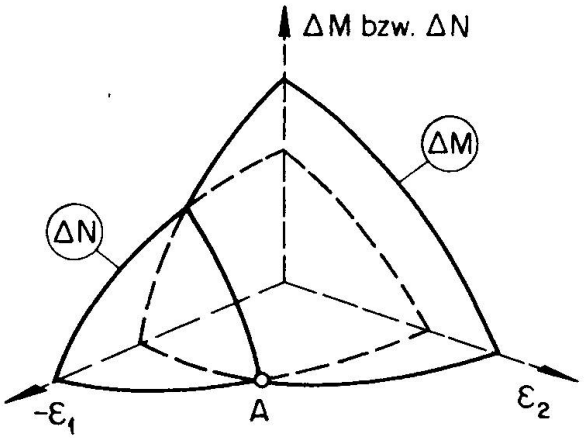

Bild 2

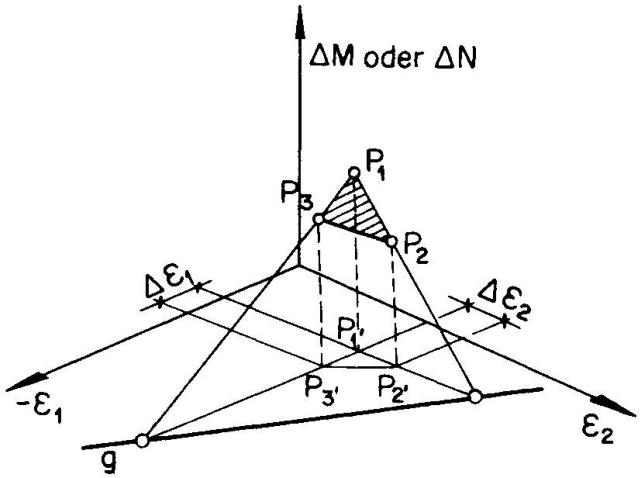

Bild 3

Ausgehend von Näherungswerten für ε_1 und ε_2, erhält man durch deren Variation je drei Punkte P_1, P_2, P_3 für ΔM bzw. ΔN, durch die je eine Ebene gelegt werden kann (Bild 3). Diese Ebenen ersetzen näherungsweise Tangentialebenen an die beiden Raumflächen ΔM und ΔN. Jede der beiden Tangentialebenen schneidet die Grundrissebene $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ in einer Geraden g. Der Schnittpunkt der beiden Geraden liefert ein verbessertes Wertepaar ε_1 und ε_2. Dieses ersetzt die Grundrisskoordinaten jenes Punktes P, für den die relative Abweichung $\Delta M/M_a$ oder $\Delta N/N_a$ am grössten ist. Nun kann ein neues Tangentialebenenpaar aufgespannt werden, das einen verbesserten Schnittpunkt A in der $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$-Ebene liefert. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die absoluten Werte ΔM und ΔN (innerhalb der Abbruchgenauigkeit) genügend gegen Null gehen. Damit sind zu den vorgegebenen Schnittlasten M_a und N_a jene beiden Randdehnungen ε_1 und ε_2 gefunden, für die sich innere und äussere Schnittkräfte im Gleichgewicht befinden. Die gesuchte Querschnittskrümmung ergibt sich zu $K = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/h$.

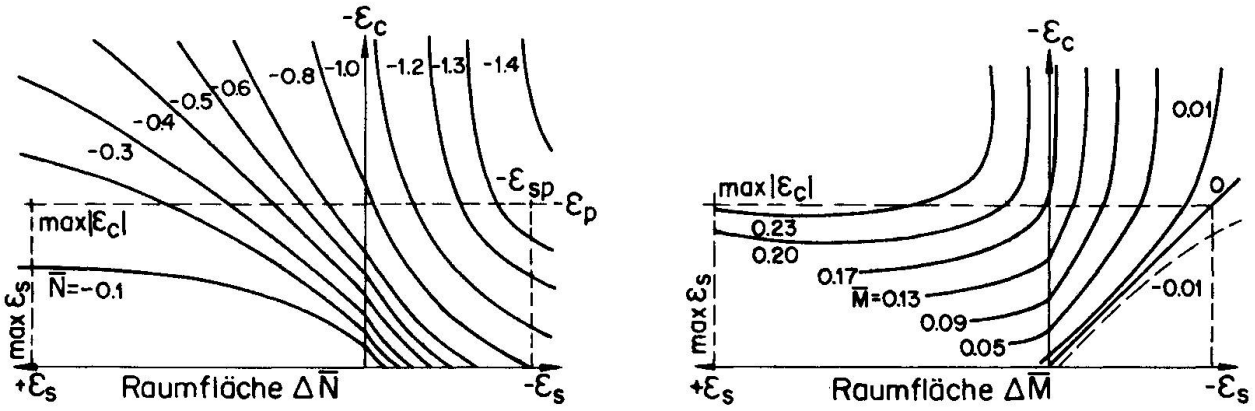

Bild 4

3. BERECHNUNG DER INNEREN SCHNITTLASTEN

Bei der Krümmungsberechnung nach Abschnitt 2 sind für ein bestimmtes Wertepaar ε_1 und ε_2 die inneren Schnittgrössen N_r und M_r erforderlich:

$$N_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_c \cdot b \cdot dy + \Sigma A_s \cdot \sigma_s \ , \quad M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_c \cdot b \cdot y \cdot dy + \Sigma A_s \cdot \sigma_s \cdot y_s \qquad (1)$$

Zur numerischen Berechnung der Integrale in (1) nach Simpson wird der Betonquerschnitt diskretisiert (Bild 5a). Unter der Voraussetzung eben bleibender Querschnitte setzt sich das Gesamtdehnungsbild aus Kurz- und Langzeitdehnungen (Bild 1, Bild 5b) zusammen.

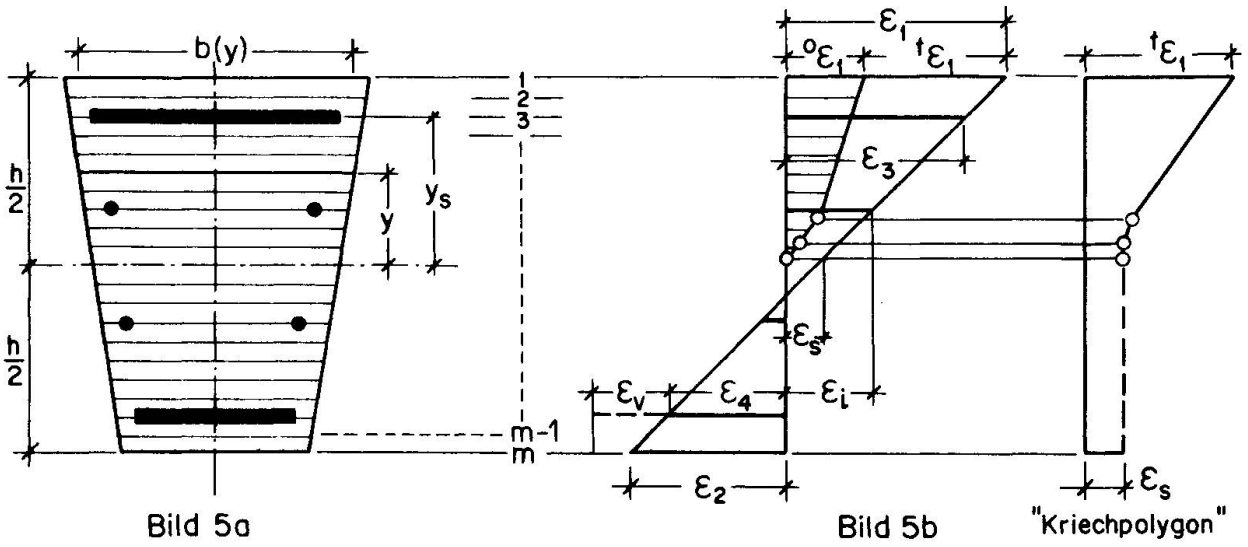

Bild 5a Bild 5b

Nur der elastische Anteil der Kurzzeitverformung liefert die Betonspannungen in (1), wogegen für den Stahl selbstverständlich die Gesamtdehnung massgebend ist. Die Berechnung der elastischen Kurzzeitdehnungen durch Abziehen der plastischen Kurzzeitverformung und der Langzeitverformungen vom Geamtdehnungsbild wird im Abschnitt 5 dargestellt.

4. DIE ZEITLICHE KRUEMMUNGSAENDERUNG

Das hier vorausgesetzte lineare Kriechen ist meist gegeben, wenn die ständige Last höchstens den mit dem vorgesehenen Sicherheitsfaktor reduzierten Kurzzeitlasten entspricht. Zur Ermittlung der zeitabhängigen Querschnittskrümmung wird der zeitliche Verformungsablauf diskretisiert. Innerhalb eines sog. "plastischen Intervalles" wird die kriecherzeugende Spannung konstant gehalten. Durch kriechbedingte Spannungsumlagerungen im Querschnitt vom Beton auf den Stahl würden die Betonspannungen innerhalb eines Intervalles abnehmen. Bei Stahlbetonstützen nehmen jedoch die Verformungsmomente infolge Kriechen zu, wodurch gegenläufig Betonspannungen aufgebaut werden. Dadurch liefert die Annahme konstanter Spannungen innerhalb eines Intervalles bereits für eine geringe Anzahl von Kriechintervallen gute Ergebnisse.

Nach jedem plastischen Intervall können die äusseren Schnittlasten verändert werden (Theorie 2. Ordnung und/oder Relaxation). Danach werden gemäss Abschnitt 2 die Randdehnungen ε_1 und ε_2 berechnet, für die Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Schnittlasten besteht. Aus den so erhaltenen elastischen Dehnungen kann nach Abschnitt 5 die plastische Verformung am Ende des nächsten Kriechintervalles bestimmt werden. Man berechnet also alternierend aus elastischen Verformungen plastische und danach entsprechend Theorie 2. Ordnung neue elastische Dehnungen.

Die Langzeitverformungen werden im sog. "Kriechvektor" gespeichert. Befindet sich der Querschnitt im Zustand II, so erhält das "Kriechpolygon" (Bild 5b) nach jedem plastischen Intervall einen weiteren Knick. Dadurch ist auch der Verlauf der Kurzzeitdehnungen im Bereich der zeitabhängigen Nullinienverschiebung nicht linear.

5. DIE BESTIMMUNG DER BETONSPANNUNGEN

5.1 Kurzzeitverformungen

Das Bild 6 stellt das σ-ε-Diagramm für eine mit σ_0 vorbelastete Querschnittsfaser dar. Der schraffierte Bereich entspricht den plastischen Kurzzeitstauchungen. Eine Erhöhung der Spannung (σ_1) bewirkt ein Anwachsen des plastischen Verformungsanteiles, wogegen dieser bei Abnahme der Spannung (σ_2) unverändert bleibt. Es muss daher stets in jeder betrachteten Querschnittsfaser der aus allen Vorbelastungen resultierende maximale Wert ${}^0\varepsilon_{pl0}$ bekannt sein. Er wird in der numerischen Berechnung auf den "plastischen Kurzzeitvektor" $\{EPO\}_m$ abgespeichert. Die plastische Kurzzeitverformung ist auch vom Belastungsalter (Festigkeitszunahme und "Versprödung") und der Belastungsgeschwindigkeit ("rasches Anfangskriechen") beeinflusst. Dieser Tatsache kann man durch zeitabhängiges Verändern des σ-ε-Diagrammes Rechnung tragen. Vereinfachend werden jedoch allgemein in den Normen mittlere σ-ε-Diagramme für Kurzzeitbelastungen angegeben.

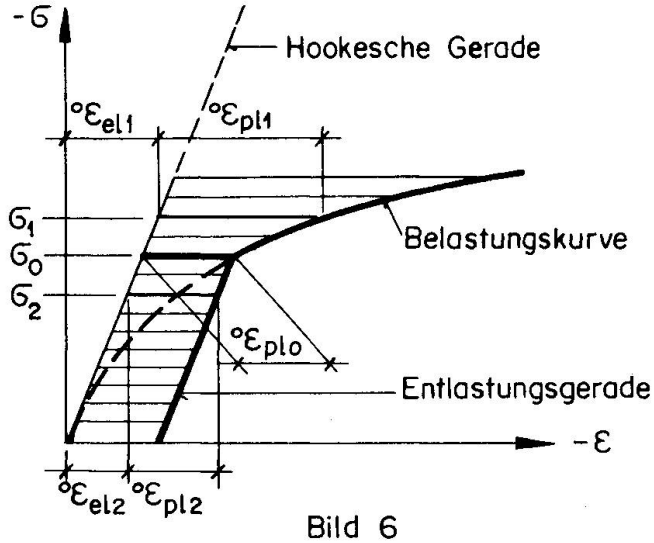

Bild 6

5.2 Langzeitverformungen

Aus der Integralgleichung für stetige Belastungsänderungen [3]

$$\varepsilon_{ges}(t_k) = {}^0\varepsilon_{el}(t_1)\cdot[1+\phi(t_k,t_1)] + \int_{t_i=t_2}^{t_i=t_k} \frac{\partial\,{}^0\varepsilon_{el}(t_i)}{\partial t_i}\cdot[1+\phi(t_k,t_i)]\cdot dt_i + \varepsilon_s(t_k)$$

erhält man durch Auswertung für mehrere konstante Belastungsstufen den plastischen Anteil der Langzeitverformung

$${}^t\varepsilon_{pl}(t_k) = {}^0\varepsilon_{el}(t_1)\cdot\phi(t_k,t_1) + \sum_{t_i=t_2}^{t_i=t_{k-1}} \Delta\,{}^0\varepsilon_{el}(t_i)\cdot\phi(t_k,t_i) + \varepsilon_s(t_k) \qquad (1)$$

Setzt man in (1) für $\Delta\,{}^0\varepsilon_{el}(t_i) = {}^0\varepsilon_{el}(t_i) - {}^0\varepsilon_{el}(t_{i-1})$ so ergibt sich

$${}^t\varepsilon_{pl}(t_k) = \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_{k-1}} {}^0\varepsilon_{el}(t_i)\cdot[\phi(t_k,t_i)-\phi(t_k,t_{i+1})] + \varepsilon_s(t_k) \qquad (2)$$

In [3] wird die verzögert elastische Verformung in den Kriechzahlen ϕ berücksichtigt. Erfasst man sie jedoch getrennt [2], so ändern sich die Kriechzahlen in (2).

$${}^t\varepsilon_{el}(t_k) = \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_{k-1}} {}^0\varepsilon_{el}(t_i)\cdot[0{,}4\cdot\Phi(t_{i+1}-t_i)]\cdot[1-\Phi(t_k-t_i)] \qquad (3)$$

Der jeweils erste Ausdruck in eckiger Klammer baut die verzögert elastische Verformung auf, der zweite bewirkt die elastische Rückverformung. Die Gleichungen (2) und (3) lassen sich zusammenfassen:

$${}^t\varepsilon(t_k) = {}^t\varepsilon_{el}(t_k) + {}^t\varepsilon_{pl}(t_k) = \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_{k-1}} {}^0\varepsilon_{el}(t_i)\cdot\Delta\phi(t_i,t_k) + \varepsilon_s(t_k) \qquad (4)$$

$$\Delta\phi(t_i,t_k)=[0{,}4\cdot\Phi(t_{i+1}-t_i)]\cdot[1-\Phi(t_k-t_i)]+[\phi(t_k,t_i)-\phi(t_k,t_{i+1})] \quad (5)$$

t_k durchläuft die Werte t_2 bis t_{n+1}, t_i die Werte t_1 bis t_n. Die in (4) erforderlichen elastischen Kurzzeitdehnungen werden, für die m-Querschnittsfasern (Bild 5a) angewendet, zur Matrix $[EEO]_{mxn}$ zusammengefasst, während die Vektoren $\{\Delta\phi(t_k)\}_{k-1}$ für $t_k=t_2$ bis t_{n+1} eine rechte Dreiecksmatrix belegen. Der Vektor der Langzeitdehnungen zur Zeit t_k ergibt sich zu:

$$\{EL\}_m = [EEO]_{mx(k-1)}\cdot\{\Delta\phi(t_k)\}_{k-1}$$

5.3 Die Betonspannung in einer Querschnittsfaser zur Zeit t_k

Durch Abziehen der Langzeitdehnungen ${}^t\varepsilon$ von der Gesamtdehnung ε_{ges} erhält man die Kurzzeitdehnung ${}^0\varepsilon$ (Bild 7). Das σ-ε-Diagramm für Kurzzeitbelastung stellt den nichtlinearen Zusammenhang

$$\sigma_c = f({}^0\varepsilon) \qquad [\text{z.B. } \sigma_c = \beta_c\cdot\frac{{}^0\varepsilon}{\varepsilon_\beta}\cdot(2-\frac{{}^0\varepsilon}{\varepsilon_\beta})] \quad (6)$$

dar, woraus sich die plastische Kurzzeitverformung ${}^0\varepsilon_{pl}$ errechnen lässt

$${}^0\varepsilon_{pl} = {}^0\varepsilon-\sigma_c/E_c \qquad [\text{z.B. } {}^0\varepsilon_{pl} = \frac{1}{2}\frac{{}^0\varepsilon^2}{\varepsilon_\beta}]$$

Durch Vergleich mit ${}^0\varepsilon_{plo}$ erhält man folgende Fallunterscheidungen:

a) $|{}^0\varepsilon_{pl}|>|{}^0\varepsilon_{plo}|$: Spannungszunahme (Bild 7). Wenn gemäss Abschnitt 2 Gleichgewicht gefunden ist, wird {EPO} korrigiert.

b) $|{}^0\varepsilon_{pl}|<|{}^0\varepsilon_{plo}|$: Spannungsrelaxation (Bild 8). Die Betonspannung ist neu zu berechnen: $\sigma_c = E_c({}^0\varepsilon-{}^0\varepsilon_{plo})$

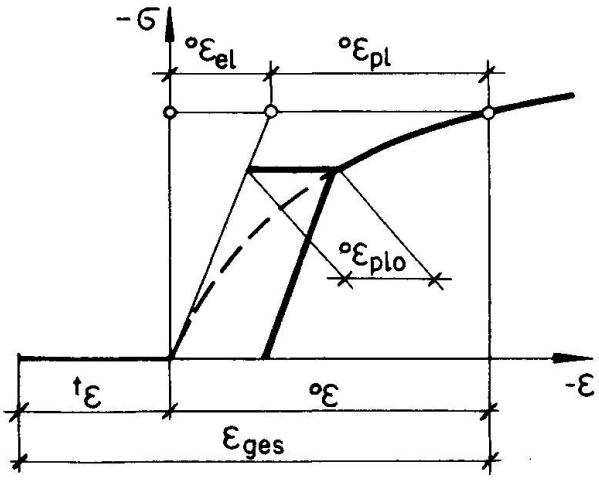

Bild 7

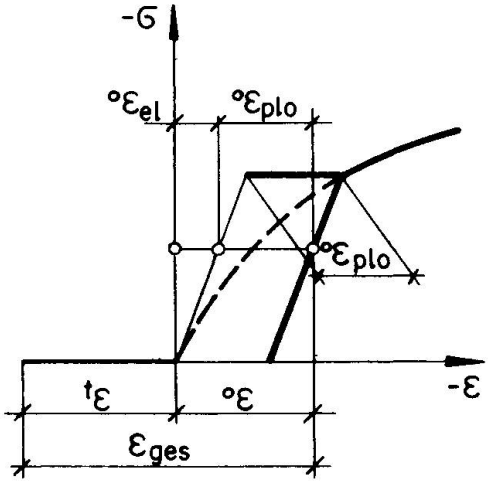

Bild 8

5.4 Vereinfachungen

Gelingt es, die Zeitintervalle $(t_{i+1}-t_i)$ für i=1,2,..n so zu wählen, dass alle Elemente $\Delta\phi(t_i,t_k)\neq 0$ gleich gross werden, so lässt sich die Gleichung (4) wie folgt schreiben:

$$^{t}\varepsilon(t_k) = \Delta\phi\cdot \sum_{t_i=t_1}^{t_i=t_{k-1}} {}^{0}\varepsilon_{el}(t_i) + \varepsilon_s(t_k)$$

In diesem Fall genügt zur Berechnung der Langzeitverformungen der Vektor $\{EL\}_m = \{\Delta\phi\cdot\Sigma^{0}\varepsilon_{el}(t_i)\}_m$. Die Matrizen $[EEO]_{mxn}$ und $[\Delta\phi]_{nxn}$ können entfallen.

Wird der Beton näherungsweise als nichtlinear elastisches Material angesehen, so erhält man die Betonspannungen stets aus Gleichung (6). Alle weiteren Ueberlegungen im Abschnitt 5.3 und der plastische Kurzzeitvektor {EPO} werden dann unnötig.

Bezeichnungen

M_a	äusseres (aktives) Moment
M_r	inneres (reaktives) Moment
N_a	äussere (aktive) Normalkraft
N_r	innere (reaktive) Normalkraft
K	Krümmung
$^{0}\varepsilon$	Kurzzeitverformung des Betons
$^{t}\varepsilon$	Langzeitverformung des Betons
$^{0}\varepsilon_{el}(t_i)$	elastische Kurzzeitdehnung zur Zeit t_i
$^{0}\varepsilon_{pl}(t_i)$	plastische Kurzzeitdehnung zur Zeit t_i
$^{t}\varepsilon_{el}(t_i)$	elastische Langzeitdehnung zur Zeit t_i
$^{t}\varepsilon_{pl}(t_i)$	plastische Langzeitdehnung zur Zeit t_i
$^{0}\varepsilon_{plo}$	maximale Dehnung einer Faser aus allen Vorbelastungen
t	wirksame Zeit
$\phi(t_k,t_i)$	Kriechzahl für das Zeitintervall t_i bis t_k
$\Phi(t_k-t_i)$	Beiwert, der den zeitlichen Verlauf der verzögert elastischen Verformung berücksichtigt ($o<\Phi<1$ ist nur von t_k-t_i abhängig)
$\varepsilon_s(t_k)$	Schwinddehnung bis zur Zeit t_k
ε_1	gesamte Dehnung am Druckrand
ε_2	gesamte Dehnung am Zugrand
ε_3	Dehnung der Druckbewehrung
ε_4	Dehnung der Zugbewehrung
ε_i	Dehnung der Stegbewehrung
ε_v	Vordehnung, falls es sich um Spannstahl handelt
σ_c	Betonspannung
σ_o	Betonspannung infolge der Vorbelastungen
β_c	Prismenfestigkeit des Betons
ε_β	absolut kleinste Betondehnung bei β_c
b	Breite eines Rechteckquerschnittes
h	Höhe eines Rechteckquerschnittes
$\bar{M}=M_r/\beta_c\cdot b\cdot h^2$	bezogenes Biegemoment (Rechteckquerschnitt)
$\bar{N}=N_r/\beta_c\cdot b\cdot h$	bezogene Normalkraft (Rechteckquerschnitt)
A_s	Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabes
m	Anzahl der betrachteten Querschnittsfasern
n	Anzahl der "Kriechintervalle"
ε_{ges}	Gesamtdehnung zur Zeit t_k

Literaturverzeichnis

[1] Jänike, J.: Nichtlineare Berechnung von Stabwerken. Eine Algol-Studie, VEB Verlag für Bauwesen, 1968.

[2] Rüsch, H., Jungwirth, D., Hilsdorf, H.: Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke. Beton- und Stahlbetonbau 1973, Heft 3,4,6.

[3] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton. Beton- und Stahlbetonbau 1967, Heft 10.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine numerisch iterative Methode zur wirklichkeitsnahen Bestimmung des zeitabhängigen Verformungsverhaltens von Stahl- und Spannbetonquerschnitten dargestellt. Beliebige elastische und plastische zeitabhängige Betoneigenschaften, eine vorgegebene Belastungsgeschichte und verschiedene Stahltypen können berücksichtigt werden. Während des zeitabhängigen Verformungsvorganges kann der Querschnitt vom ungerissenen Zustand in den gerissenen übergehen und umgekehrt.

SUMMARY

A numerical method by trial and error to compute the time dependent deformation behavior of reinforced- and prestressed concrete cross-sections is described. Arbitrary elastic and plastic time dependent concrete properties, a given loading history and different types of reinforcing steel can be considered. During the time dependent deformation process the cross-section can change from an uncracked state to a cracked one and conversely.

RESUME

On présente une méthode numérique itérative qui approche le comportement réel à la déformation en fonction du temps de sections en béton armé ou précontraint. On peut introduire dans le calcul toutes les caractéristiques élastiques et plastiques du béton en fonction du temps, l'"historique" de la charge, ainsi que différents types d'acier. Au cours du processus de déformation, la section peut passer de l'état non fissuré à l'état fissuré et vice-versa.