Principes de trigonométrie

Autor(en): **Isely, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel**

Band (Jahr): **13 (1882-1883)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88191

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PRINCIPES DE TRIGONOMÉTRIE

Par M. L. Iselv. fils, professeur.

Ce mémoire est destiné à faire suite à celui que nous avons eu l'honneur de publier dans le Bulletin de notre Société, tome XII, 3e cahier, pages 533-550.

Le plan, avons-nous vu, n'est en réalité qu'une portion de surface sphérique de rayon infiniment grand. Il est donc illogique d'enseigner la trigonométrie comme on l'a fait jusqu'à présent. Il n'y a pas deux trigonométries ; le triangle dont les côtés sont rectilignes n'est qu'une forme toute spéciale de celui qui est limité par des arcs de grands cercles.

Les formules relatives à la résolution des triangles plans doivent se déduire, de la première à la dernière, de celles qui se rapportent aux triangles sphériques. Ce fait est indiscutable ; plusieurs géomètres de renom l'ont établi sur des bases certaines à la suite de longues et laborieuses recherches qu'il n'est pas permis d'ignorer. Aussi nous semble-t-il urgent de montrer de quelle manière il faut procéder pour que l'enseignement de la trigonométrie au sein de nos écoles réponde aux exigences de la science contemporaine.

Tout cours rationnel et bien conçu devrait se diviser, selon nous, en deux parties essentiellement distinctes : la première comprendrait l'exposition et la démonstration des formules goniométriques fondamentales et ne comporterait aucune innovation. On continuerait donc à faire voir, en se fondant sur des considérations de géométrie élémentaire, que :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\text{ , etc., etc.}$$

La seconde partie aurait tout particulièrement trait à la résolution des triangles. C'est ici que les changements se présenteraient en foule. Les triangles sphériques, grâce à leurs propriétés bien connues, donnent lieu à *quinze* formules fondamentales qu'il est facile d'établir directement, au moyen de la théorie des projections entre autres. Ces diverses expressions trigonométriques se divisent tout naturellement en quatre groupes principaux, dont les représentants typiques sont les suivants :

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$

$$\cot a\sin b = \cos b\cos C + \sin C\cot A$$

De ces quinze égalités primordiales on peut, par de simples transformations de calcul, en tirer quantité d'autres concernant aussi bien les triangles quelconques que les triangles rectangles. Bornons-nous à rappeler les expressions des angles en fonction des côtés et réciproquement, les formules de Delambre-Gauss, les analogies de Néper et les dix relations obtenues en faisant dans les précitées $A = 90^{o}$.

En introduisant dans ces diverses expressions le rayon R d'une sphère, rayon qui n'est pas égal à l'unité, on est conduit à de nouvelles égalités qui fournissent celles de la trigonométrie rectiligne, si l'on a soin d'y faire $R = \infty$.

Soient deux sphères concentriques ayant respectivement pour rayons *1* et R. Tout angle trièdre ayant son sommet au centre commun de ces sphères rencontrera leurs surfaces suivant deux triangles dont les angles seront égaux et les côtés en relations faciles à obtenir. On sait, en effet, que les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons. Il en résulte immédiatement que l'on aura, dans le cas considéré, la suite de rapports égaux :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{R}$$

a, b, c désignant les longueurs des côtés du triangle fait sur la surface de la sphère de rayon unité, et a', b', c' étant les éléments correspondants de l'autre triangle. On pourra donc écrire :

$$a = \frac{a'}{R}, \qquad b = \frac{b'}{R}, \qquad c = \frac{c'}{R}$$

ou vice versa :

$$a' = aR, \quad b' = bR, \quad c' = cR$$

Il suit de là que :

$$R \sin a = a' \frac{\sin a}{a}$$

$$R \sin b = b' \frac{\sin b}{b}$$

$$R \sin c = c' \frac{\sin c}{c}$$

et de même :

$$R \operatorname{tang} a = a' \frac{\operatorname{tang} a}{a}$$

$$R \operatorname{tang} b = b' \frac{\operatorname{tang} b}{b}$$

$$R \operatorname{tang} c = c' \frac{\operatorname{tang} c}{c}$$

Supposons maintenant que R, croissant indéfiniment, les côtés a', b', c' conservent des longueurs finies. Les valeurs précédentes tendront vers des limites qu'il est aisé de déterminer. Ce sont les suivantes :

$$\lim a = \lim \left(\frac{a'}{R} \right)_{R=\infty} = 0,$$

$$\lim b = \lim \left(\frac{b'}{R} \right)_{R=\infty} = 0,$$

$$\lim c = \lim \left(\frac{c'}{R} \right)_{R=\infty} = 0;$$

$$\lim (R \sin a) = \lim \left(a' \frac{\sin a}{a} \right)_{a=0} = a',$$

$$\lim(R\operatorname{tang} a) = \lim\left(a' \frac{\operatorname{tang} a}{a}\right)_{a=0} = a' \text{ , etc.}$$

Appliquons ce que nous venons de voir aux quinze formules qui concernent les triangles sphériques quelconques. Soit d'abord la suite de rapports égaux :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

ou :

$$\frac{R\sin a}{\sin A} = \frac{R\sin b}{\sin B} = \frac{R\sin c}{\sin C}$$

Ces fractions deviendront, si R augmente indéfiniment :

$$\frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C}$$

Les côtés a', b', c' sont alors rectilignes, donc : *dans tout triangle plan, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Passons maintenant au groupe de formules, qui a pour représentant typique :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

ou :

$$1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = \left(1 - 2\sin^2\frac{b}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right) + \sin b \sin c \cos A$$

d'où, en effectuant les calculs et changeant tous les signes,

$$2\sin^2\frac{a}{2} = 2\sin^2\frac{b}{2} + 2\sin^2\frac{c}{2} - 4\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2} - \sin b \sin c \cos A$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par la quantité R^2 ; il viendra :

$$2\left(R\sin\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(R\sin\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(R\sin\frac{c}{2}\right)^2$$
$$-\frac{4}{R^2}\left(R\sin\frac{b}{2}\right)^2\left(R\sin\frac{c}{2}\right)^2 - R\sin b\, R\sin c\cos A$$

d'où, en faisant tendre R vers l'infini,

$$\frac{a'^2}{2} = \frac{b'^2}{2} + \frac{c'^2}{2} - b'c'\cos A,$$

ou enfin :

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c'\cos A$$

on aurait de même :

$$b'^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c'\cos B,$$
$$c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos C$$

formules qui indiquent que dans tout triangle rectiligne, le *carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés moins deux fois le produit de ces mêmes côtés répété par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Les relations de troisième espèce deviennent :

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\left(1 - 2\sin^2\frac{a}{2}\right)$$
$$\cos B = -\cos A\cos C + \sin A\sin C\left(1 - 2\sin^2\frac{b}{2}\right)$$
$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\left(1 - 2\sin^2\frac{c}{2}\right)$$

Considérons de plus près l'une de ces trois expressions, la dernière par exemple. Il sera toujours possible de la mettre sous la forme :

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \left[1 - \frac{2}{R^2} \left(R \sin \frac{c}{2} \right)^2 \right]$$

et si l'on fait tendre R vers l'infini :

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

donc :

$$\cos C = -\cos (A + B) = \cos \left[180^\circ - (A + B) \right]$$

Il suit de là que :

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

c'est-à-dire :

$$A + B + C = 180^\circ$$

Ainsi, comme la géométrie élémentaire nous l'a déjà appris, *la somme des angles intérieurs d'un triangle plan est constamment égale à deux droits.*

Reste à examiner les formules fondamentales de quatrième espèce. Considérons la première, par exemple :

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin a \sin C \cot A$$

ou encore,

$$\left(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2} \right) R \sin b = R \sin a \left(1 - 2 \sin^2 \frac{b}{2} \right) \cos C + R \sin a \sin C \cot A$$

$$\left(1 - \frac{2}{R^2} R^2 \sin^2 \frac{a}{2} \right) R \sin b = R \sin a \left(1 - \frac{2}{R^2} R^2 \sin^2 \frac{b}{2} \right) \cos C + R \sin a \sin C \cot A$$

R augmentant indéfiniment, il viendra :

$$b' = a' (\cos C + \sin C \cot A)$$

ou :

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\sin A \cos C + \sin C \cos A}{\sin A} = \frac{\sin(A + C)}{\sin A}$$

Mais nous venons de voir que

$$A + B + C = \pi$$

par conséquent,

$$A + C = \pi - B$$

$$\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$$

On a donc, en définitive :

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

formule déjà trouvée.

Les triangles sphériques rectangles donnent lieu à dix égalités qui servent à leur résolution. On les obtient en faisant dans les formules relatives aux triangles quelconques A, par exemple, égal à 90°. On trouve de la sorte :

$\cos a = \cos b \cos c$	$\operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} B$
$\sin b = \sin a \sin B$	$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C$
$\sin c = \sin a \sin C$	$\cos a = \cot B . \cot C$
$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C$	$\cos B = \sin C \cos b$
$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B$	$\cos C = \sin B \cos c$

Chacune de ces expressions, transformée convenablement, conduit à une propriété importante du triangle rectiligne rectangle. Nous nous bornerons, pour ne pas allonger inutilement cette communication, à citer les propositions auxquelles on arrive en traitant, comme nous l'avons fait précédemment, les formules ci-dessus, suivant leur rang.

1° Le carré de l'hypoténuse équivaut à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. (Théorème de Pythagore).

2° Un côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé.

3° Un côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.

4° Un côté de l'angle droit est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.

5° Les deux angles aigus sont complémentaires.

Les théorèmes relatifs à la résolution des triangles plans doivent donc être envisagés comme de simples corollaires de ceux qui se rapportent à la résolution des triangles sphériques.

Les dix formules qui précèdent et qui concernent les triangles rectangles offrent un grand avantage : c'est de se prêter toutes au calcul par logarithmes. Il n'en est malheureusement pas de même des relations établies entre les éléments d'un triangle quelconque, à l'exception de celles qui expriment que les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. C'est pourquoi on a cherché à les rendre propres au calcul logarithmique.

Soit, par exemple, l'expression fondamentale :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Elle donne tout d'abord :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

valeur qui, substituée dans les formules :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \text{ et } \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

permet de déterminer l'angle A, au moyen de la relation générale :

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

p désignant le demi-périmètre du triangle considéré.

Cette expression peut aussi s'écrire :

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{R\sin(p-b)\,R\sin(p-c)}{R\sin p\,R\sin(p-a)}},$$

et si R augmente indéfiniment,

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p'-b')(p'-c')}{p'(p'-a')}}$$

p' étant égal à

$$\frac{a'+b'+c'}{2}$$

On fait usage de ces valeurs de $\operatorname{tang}\frac{A}{2}$ lorsqu'il s'agit de résoudre un triangle quelconque connaissant les longueurs de ses côtés. On a entre autres recours à la dernière dans tous les cas où le triangle en question est tracé sur la surface d'une sphère de rayon infini, c'est-à-dire sur un plan.

Voyons pour terminer ce que deviennent les formules de Delambre-Gauss et les analogies de Néper dans l'hypothèse d'une sphère de rayon infiniment grand. Nous ne mentionnerons, parmi ces diverses relations au nombre de huit, que celles qui conduisent à de nouveaux résultats.

Soient donc les deux formules de Delambre :

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{R\sin\frac{a-b}{2}}{R\sin\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}=\frac{R\sin\frac{a+b}{2}}{R\sin\frac{c}{2}}.$$

Pour le plan, ces relations deviennent ;

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{a'-b'}{c'}$$

et

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{a'+b'}{c'}$$

Des quatre analogies de Néper, la suivante seule fournit un résultat quelque peu différent de ceux que nous avons trouvés jusqu'ici. Soit :

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}=\frac{R\sin\frac{a-b}{2}}{R\sin\frac{a+b}{2}}$$

Si R tend vers l'infini, nous savons déjà que les produits $R\sin\frac{a-b}{2}$ et $R\sin\frac{a+b}{2}$ deviennent respec-

tivement $\frac{a'-b'}{2}$ et $\frac{a'+b'}{2}$. Il s'ensuit que l'on peut poser :

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{a'-b'}{a'+b'}$$

ou, en remarquant que :

$$\frac{C}{2}=90^{\circ}-\frac{A+B}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}=\frac{a'-b'}{a'+b'}$$

Les considérations qui précèdent montrent jusqu'à l'évidence qu'il y a encore beaucoup à faire dans le domaine si vaste et si fécond de la trigonométrie. Selon nous, l'enseignement de cette science est loin d'avoir revêtu sa forme définitive. Les mathématiques ont accompli ces derniers temps de tels progrès et ont pris une telle extension qu'il n'est possible de les étudier d'une manière un peu complète qu'à la condition d'en abréger les opérations et d'en simplifier les méthodes. Les découvertes des géomètres modernes nous en fournissent les moyens et ces moyens se nomment *infini*, *imaginaire*, *dualité*. Il n'y a qu'à vouloir s'en servir en faisant fi de l'esprit de routine, ce fléau de l'enseignement. Souvenons-nous que la science avance et qu'elle devient tôt ou tard insaisissable pour celui qui ne s'applique pas à la suivre pas à pas.