**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles

**Band:** 17 (1880-1881)

**Heft:** 85

**Artikel:** Théorie mathématique du prix des terres et de leur rachat par l'état

**Autor:** Walras, Léon

**Kapitel:** V: Du rachat des terres par l'état : variation de la somme due pendant la période d'amortissement

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-259354

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

## V

### *Du rachat des terres par l'Etat. Variation de la somme due pendant la période d'amortissement.*

22. Après la question de savoir si l'amortissement au moyen du fermage est possible, c'est-à-dire si la courbe de la somme restant due en fonction des années écoulées coupe l'axe horizontal, une question très importante aussi est de savoir si la somme empruntée augmente par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement, c'est-à-dire si la courbe est croissante avant d'être décroissante. Pour traiter cette question de la manière la plus complète, reprenons l'équation [19]

$$A_n = A(1+i)^n - a\,\frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z};$$

et faisons-y successivement $n = 0, 1, 2, 3$ et $4$, il viendra successivement

$$A_0 = A,$$

$$A_1 = A(1+i) - a,$$

$$A_2 = A(1+2i+i^2) - a\,\frac{1+2i+i^2-1-2z-z^2}{i-z}$$

$$= A(1+2i+i^2) - a\,[2+(i+z)],$$

$$A_3 = A(1+3i+3i^2+i^3) - a\,\frac{1+3i+3i^2+i^3-1-3z-3z^2-z^3}{i-z}$$

$$= A(1+3i+3i^2+i^3) - a\,[3+3(i+z)+(i^2+iz+z^2)],$$

$$A_4=(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)-a\,\frac{1+4i+6i^2+4i^3+i^4-1-4z-6z^2-4z^3-z^4}{i-z}$$

$$=(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)-a[4+6(i+z)+4(i^2+iz+z^2)+(i^3+i^2z+iz^2+z^3)].$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$\alpha=i+z\,,$$

$$\beta=i^2+iz+z^2=i\alpha+z^2\,,$$

$$\gamma=i^3+i^2z+iz^2+z^3=i\beta+z^3\,,$$

$$\delta=i^4+i^3z+i^2z^2+iz^3+z^4=i\gamma+z^4\,,$$

il vient

$$A_0=A\,,$$

$$A_1=A\,(1+i)-a\,,$$

$$A_2=A\,(1+2i+i^2)-a\,(2+\alpha)\,,$$

$$A_3=A\,(1+3i+3i^2+i^3)-a\,(3+3\alpha+\beta)\,,$$

$$A_4=A\,(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)-a\,(4+6\alpha+4\beta+\gamma).$$

Si on se reporte à la loi du développement du binome de Newton, celle du développement de notre formule devient évidente, et il est clair que, si on pose

$$\varkappa=i^{n-1}+i^{n-2}z+i^{n-3}z^2+\ldots+z^{n-1}\,,$$

$$\lambda=i^n+i^{n-1}z+i^{n-2}z^2+\ldots+z^n=i\varkappa+z^n\,,$$

$$\mu=i^{n+1}+i^nz+i^{n-1}z^2+\ldots+z^{n+1}=i\lambda+z^{n+1}\,,$$

$$\nu=i^{n+2}+i^{n+1}z+i^nz^2+\ldots+z^{n+2}=i\mu+z^{n+2}\,,$$

il vient

$$A_n = A\left[1+\frac{n}{1}i+\frac{n(n-1)}{1.2}i^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}i^3+\ldots+i^n\right]$$

$$-a\left[\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\beta+\ldots+\varkappa\right],$$

$$A_{n+1}=A\left[1+\frac{n+1}{1}i+\frac{(n+1)n}{1.2}i^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}i^3+\ldots+i^{n+1}\right]$$

$$-a\left[\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2}\alpha+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\beta+\ldots+\lambda\right],$$

$$A_{n+2}=A\left[1+\frac{n+2}{1}i+\frac{(n+2)(n+1)}{1.2}i^2+\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}i^3+\ldots+i^{n+2}\right]$$

$$-a\left[\frac{n+2}{1}+\frac{(n+2)(n+1)}{1.2}\alpha+\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}\beta+\ldots+\mu\right],$$

$$A_{n+3}=A\left[1+\frac{n+3}{1}i+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}i^2+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}i^3+\ldots+i^{n+3}\right]$$

$$-a\left[\frac{n+3}{1}+\frac{(n+3)(n+2)}{1.2}\alpha+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}\beta+\ldots+\nu\right].$$

23. Cela posé, formons les différences premières $\Delta A_0 = A_1 - A_0$, $\Delta A_1 = A_2 - A_1$, $\Delta A_2 = A_3 - A_2$, $\Delta A_3 = A_4 - A_3 \ldots$ $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$, $\Delta A_{n+1} = A_{n+2} - A_{n+1}$, $\Delta A_{n+2} = A_{n+3} - A_{n+2}$, nous aurons

$$\Delta A_0 = Ai - a,$$

$$\Delta A_1 = A(i+i^2) - a(1+\alpha),$$

$$\Delta A_2 = A(i+2i^2+i^3) - a(1+2\alpha+\beta),$$

$$\Delta A_3 = A(i+3i^2+3i^3+i^4) - a(1+3\alpha+3\beta+\gamma),$$

. . . . . .

$$\Delta A_n = A\left[i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \ldots + i^{n+1}\right]$$

$$-a\left[1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta + \ldots + \lambda\right],$$

$$\Delta A_{n+1} = A\left[i + \frac{n+1}{1} i^2 + \frac{(n+1)n}{1.2} i^3 + \ldots + i^{n+2}\right]$$

$$-a\left[1 + \frac{n+1}{1}\alpha + \frac{(n+1)n}{1.2}\beta + \ldots + \mu\right],$$

$$\Delta A_{n+2} = A\left[i + \frac{n+2}{1} i^2 + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2} i^3 + \ldots i^{n+3}\right]$$

$$-a\left[1 + \frac{n+2}{1}\alpha + \frac{(n+2)(n+1)}{1.2}\beta + \ldots + \nu\right].$$

Pour que, dès le début, les différences premières ne soient pas positives, il faut que l'on n'ait pas

$$A_1 - A_0 = \Delta A_0 = Ai - a > 0,$$

soit

$$i > \frac{a}{A}.$$

Et, en effet, il est évident que : — *Si le taux de l'intérêt net est supérieur au taux initial du fermage, la somme empruntée*

*pour l'achat de la terre doit augmenter par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement.*

Si, comme nous l'avons fait (19), on représente par une courbe continue les variations discontinues de la somme restant due à la fin de chaque année, la condition $i \gtrless \frac{a}{A}$ correspond à la double circonstance d'une courbe croissante ou d'une courbe décroissante à son point de départ A. La condition $i = \frac{a}{A}$ correspond à la circonstance d'une courbe cessant d'être croissante pour devenir décroissante à son point de départ, c'est-à-dire à la circonstance d'un point de maximum en A, comme cela a lieu dans le cas de la courbe AN (Fig. 2) du 1er tableau de Gossen, où $a = 4000$, $A = 100000$, et où, par conséquent, $\frac{a}{A} = 0.04 = i$.

Si l'on veut qu'à un moment donné, la somme due cesse de s'accroître, il faut poser généralement

$$\Delta A_n = 0,$$

soit

$$A\left[i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \ldots + i^{n+1}\right]$$

$$- a\left[1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \ldots + \lambda\right] = 0,$$

d'où l'on tire successivement

$$A = a \frac{1 + \frac{n}{1} \alpha + \frac{n(n-1)}{1.2} \beta + \ldots + \lambda}{i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \ldots i^{n+1}}$$

$$= a \frac{1 + \frac{n}{1}(i+z) + \frac{n(n-1)}{1.2}(i^2 + iz + z^2) + \ldots + (i^n + \ldots + z^n)}{i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \ldots + i^{n+1}}$$

$$= \frac{a}{i} \left[ 1 + z \frac{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\beta + \ldots + \varkappa}{1 + \frac{n}{1} i + \frac{n(n-1)}{1.2} i^2 + \ldots + i^n} \right]$$

$$= \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}$$

$$= \frac{a}{i(1+i)^n} \times \frac{i(1+i)^n - z(1+z)^n}{i-z}.$$

24. On reconnaît les équations [1] et [2] de prix normal dans lesquelles la durée de la plus-value $m$ est remplacée par le nombre d'années $n$ après lequel il n'y a plus d'excédant du montant des intérêts à payer sur le montant du fermage à recevoir. En y réfléchissant, on se convainc en effet que : — *Le prix normal d'une terre est celui qui, augmenté des intérêts capitalisés et diminué des fermages capitalisés, se trouve égal, quand finit la durée de la plus-value de la rente, au rapport du fermage au taux du revenu net*, de manière à ce qu'il n'y ait ni bénéfice ni perte à faire pour celui qui aurait acheté la terre lors de l'apparition de la plus-value et la revendrait lors de la cessation de cette plus-value. Et cette considération aurait pu nous faire trouver d'une manière plus simple l'équation ci-dessus d'égalité du montant des intérêts à celui du fermage, qui est aussi celle du prix normal.

Au bout de $m$ années, la somme due est

$$A_m = A(1+i)^m - a \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z};$$

les intérêts à payer s'élèvent donc alors à

$$\left[A(1+i)^m - a\,\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z}\right] i\,;$$

tandis que, d'autre part, le fermage à recevoir s'élève alors à

$$a\,(1+z)^m.$$

Pour qu'il n'y ait pas, à ce moment, accroissement de la somme due, ou pour que le prix soit prix normal, il faut que le fermage à recevoir suffise aux intérêts à payer, ou que

$$\left[A(1+i)^m - a\,\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z}\right] i = a\,(1+z)^m\,,$$

ou que, conformément à notre théorème,

$$A(1+i)^m - a\,\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} = a\,\frac{(1+z)^m}{i}\,.$$

Or, de cette équation, on tire l'équation [2] de la manière suivante :

$$A(1+i)^m = a\left[\frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i-z} + \frac{(1+z)^m}{i}\right]$$

$$= a\,\frac{i(1+i)^m - i(1+z)^m + i(1+z)^m - z(1+z)^m}{i(i-z)}$$

$$= \frac{a}{i} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}\,;$$

$$A = \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z}\,.$$

25. Si l'on pose

$$A = a \frac{1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta + \ldots + \lambda}{i + \frac{n}{1} i^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^3 + \ldots + i^{n+1}}$$

$$= \frac{a}{i} \times \frac{1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta + \ldots + \lambda}{(1+i)^n},$$

alors $\Delta A_{n+1}$ devient

$$\frac{a}{i} \times \frac{1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta + \ldots + \lambda}{(1+i)^n} \times i(1+i)^{n+1}$$

$$- a\left[1 + \frac{n+1}{1}\alpha + \frac{(n+1)n}{1.2}\beta + \ldots + \mu\right]$$

$$= a\left[1 + \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta + \ldots + \lambda\right](1+i)$$

$$- a\left[1 + \frac{n+1}{1}\alpha + \frac{(n+1)n}{1.2}\beta + \ldots + \mu\right]$$

$$= a\left[1 - 1 + \frac{n-(n+1)}{1}\alpha + \frac{n(n-1)-(n+1)n}{1.2}\beta + \ldots - \mu\right.$$

$$\left. + i + \frac{n}{1}\alpha i + \frac{n(n-1)}{1.2}\beta i + \ldots + \lambda i\right]$$

$$= a\left[-\alpha - \frac{n}{1}\beta - \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma - \ldots - \mu\right.$$

$$\left. + (\alpha - z) + \frac{n}{1}(\beta - z^2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(\gamma - z^3) + \ldots + (\mu - z^{n+1})\right]$$

$$= - a \left[ z + \frac{n}{1} z^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} z^3 + \ldots + z^{n+1} \right]$$

$$= - az (1+z)^n.$$

Cette quantité étant essentiellement négative, quand $z$ est positif, il s'ensuit, comme on pouvait le prévoir, que : — *Dès que la somme due a cessé d'augmenter par emprunts nouveaux, elle commence à diminuer par amortissement.*

26. Formons maintenant les différences secondes $\Delta^2 A_0 = (A_2 - A_1) - (A_1 - A_0)$, $\Delta^2 A_1 = (A_3 - A_2) - (A_2 - A_1)$, $\Delta^2 A_2 = (A_4 - A_3) - (A_3 - A_2)$ ... $\Delta^2 A_n = (A_{n+2} - A_{n+1}) - (A_{n+1} - A_n)$, $\Delta^2 A_{n+1} = (A_{n+3} - A_{n+2}) - (A_{n+2} - A_{n+1})$, nous aurons

$$\Delta^2 A_0 = A i^2 - a\alpha,$$

$$\Delta^2 A_1 = A (i^2 + i^3) - a (\alpha + \beta),$$

$$\Delta^2 A_2 = A (i^2 + 2i^3 + i^4) - a (\alpha + 2\beta + \gamma),$$

. . . . . .

$$\Delta^2 A_n = A \left[ i^2 + \frac{n}{1} i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} i^4 + \ldots + i^{n+2} \right]$$

$$- a \left[ \alpha + \frac{n}{1} \beta + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma + \ldots + \mu \right],$$

$$\Delta^2 A_{n+1} = A \left[ i^2 + \frac{n+1}{1} i^3 + \frac{(n+1)n}{1.2} i^4 + \ldots + i^{n+3} \right]$$

$$- a \left[ \alpha + \frac{n+1}{1} \beta + \frac{(n+1)n}{1.2} \gamma + \ldots + \nu \right].$$

Pour que, dès le début, les différences premières, étant d'ailleurs positives, ne soient pas croissantes, c'est-à-dire

pour que les différences secondes ne soient pas positives, il faut que l'on n'ait pas

$$(A_2 - A_1) - (A_1 - A_0) = \Delta^2 A_0 = Ai^2 - a\alpha = Ai^2 - a(i+z) > 0,$$

soit

$$i > \frac{az}{Ai - a}.$$

Ainsi : — *Si le taux de l'intérêt net est supérieur au rapport de l'accroissement initial du fermage à l'excédant initial des intérêts à payer sur le fermage à recevoir, les augmentations annuelles de la somme due sont croissantes avant d'être décroissantes.*

Si, comme nous l'avons fait (19), on représente par une courbe continue les variations discontinues de la somme restant due à la fin de chaque année, la condition $i \gtrless \frac{az}{Ai - a}$ correspond à la double circonstance d'une courbe convexe ou concave par rapport à l'axe horizontal à son point de départ A. La condition $i = \frac{az}{Ai - a}$ correspond à la circonstance d'une courbe cessant d'être convexe pour devenir concave par rapport à l'axe horizontal à son point de départ, c'est-à-dire à la circonstance d'un point d'inflexion en A. C'est ce qui a lieu quand on pose

$$Ai^2 = a\,(i + z),$$

et qu'on en tire

$$A = a\,\frac{i+z}{i^2},$$

comme le fait Gossen pour obtenir son prix limite (4). Ainsi la condition posée par Gossen « que l'Etat ne se trouve pas

en perte *(wenn des Staat keinen Schaden haben soll)* pour la première année » ne signifie pas, comme on aurait pu le croire, « qu'il n'y ait pas d'excédant de la somme due la 2e année sur la somme due la 1re année, » ce qui impliquerait que

$$A = \frac{a}{i},$$

comme dans le cas de son 1er tableau et de la courbe AN, mais bien « que l'excédant ne soit pas plus grand pour la seconde année que pour la première, ou, pour mieux dire, que ces deux excédants soient égaux. » Ce prix limite de Gossen $A = a\frac{i+z}{i^2} = \frac{a}{i} + \frac{az}{i^2}$ n'est pas non plus le prix $A = a\frac{1}{i-z}$ auquel l'amortissement devient impossible et pour lequel la courbe ne vient plus couper l'axe horizontal. C'est le prix pour lequel les excédants cessent de croître et commencent à décroître. Si Gossen avait appliqué rigoureusement sa condition dans son 2e tableau, il aurait dû supposer $\frac{A}{a} = \frac{0.04+0.01}{0.04^2} = 31.25$, et en faisant $A = 100\,000$ faire $a = \frac{100\,000}{31.25} = 3\,200$. Alors il aurait eu la courbe AN″ au lieu de la courbe AN′ qu'il a eue en supposant $a = \frac{100\,000}{30} = 3\,333.33$. La première courbe aurait eu son point d'inflexion en A et son point de maximum en M″, tandis que la seconde a son point d'inflexion en K′ et son point de maximum en M′.

Si l'on voulait qu'à un moment donné l'excédant cessât de s'accroître, il faudrait poser généralement

$$\Delta^2 A_n = 0,$$

soit

$$A\left[i^2+\frac{n}{1}i^3+\frac{n(n-1)}{1.2}i^4+\ldots+i^{n+2}\right]$$

$$-a\left[\alpha+\frac{n}{1}\beta+\frac{n(n-1)}{1.2}\gamma+\ldots+\mu\right]=0,$$

d'où l'on tirerait successivement

$$A=a\frac{\alpha+\frac{n}{1}\beta+\frac{n(n-1)}{1.2}\gamma+\ldots+\mu}{i^2+\frac{n}{1}i^3+\frac{n(n-1)}{1.2}i^4+\ldots i^{n+2}}$$

$$=a\frac{(i+z)+\frac{n}{1}(i^2+iz+z^2)+\frac{n(n-1)}{1.2}(i^3+i^2z+iz^2+z^3)+\ldots+(i^{n+1}+\ldots+z^{n+1})}{i^2+\frac{n}{1}i^3+\frac{n(n-1)}{1.2}i^4+\ldots+i^{n+2}}$$

$$=\frac{a}{i}\left[1+\frac{z}{i}\times\frac{1+\frac{n}{1}\alpha+\frac{n(n-1)}{1.2}\beta+\ldots+\lambda}{1+\frac{n}{1}i+\frac{n(n-1)}{1.2}i^2+\ldots+i^n}\right]$$

$$=\frac{a}{i}\left[1+\frac{z}{i}\left[1+z\frac{\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha+\ldots+\varkappa}{1+\frac{n}{1}i+\frac{n(n-1)}{1.2}i^2+\ldots+i^n}\right]\right]$$

$$=\frac{a}{i}+\frac{az}{i^2}+\frac{az^2}{i^2(1+i)^n}\times\frac{(1+i)^n-(1+z)^n}{i-z}$$

$$=\frac{a}{i^2(1+i)^n}\times\frac{i^2(1+i)^n-z^2(1+z)^n}{i-z}.$$

27. Cette équation est dans un rapport intéressant avec la précédente relative aux différences premières.

Supposons d'abord deux prix d'achat, l'un A tel que la différence première soit nulle après $n$ années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z},$$

et l'autre A′ tel que ce soit la différence seconde qui soit nulle après $n$ années, conformément à l'équation

$$A' = \frac{a}{i} + \frac{az}{i^2} + \frac{az^2}{i^2(1+i)^n} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z};$$

on voit tout de suite que

$$A' = \frac{a}{i} + \frac{Az}{i},$$

formule curieuse mais qu'il n'importe pas d'approfondir ici.

Supposons à présent un seul et même prix d'achat tel que la différence première soit nulle après $m$ années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z},$$

et que la différence seconde soit nulle après $k$ années, conformément à l'équation

$$A = \frac{a}{i^2(1+i)^k} \times \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i-z}.$$

On a, dans ces conditions,

$$\frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i-z} = \frac{a}{i^2(1+i)^k} \times \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i-z},$$

$$\frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{(1+i)^m} = \frac{i^2(1+i)^k - z^2(1+z)^k}{i(1+i)^k},$$

$$i^2(1+i)^{m+k} - zi(1+i)^k(1+z)^m = i^2(1+i)^{m+k} - z^2(1+i)^m(1+z)^k,$$

$$i(1+z)^{m-k} = z(1+i)^{m-k},$$

$$\frac{i}{z} = \left(\frac{1+i}{1+z}\right)^{m-k},$$

$$(m-k)\log\frac{1+i}{1+z} = \log\frac{i}{z},$$

$$m-k = \frac{\log\frac{i}{z}}{\log\frac{1+i}{1+z}}:$$

d'où il suit que : — *Le nombre d'années qui s'écoule depuis le moment où l'excédant des intérêts à payer sur les fermages à recevoir cesse de s'accroître jusqu'à celui où il devient nul ne dépend que du taux de l'intérêt net et du taux d'accroissement du fermage.* Autrement dit, la distance horizontale du point d'inflexion au point de maximum des courbes est la même quel que soit le rapport du prix d'achat au fermage initial. Dans les deux courbes AN′, AN″, cette distance

$$k'm' = \text{ON est de } \frac{\log\frac{0.04}{0.01}}{\log\frac{1.04}{1.01}} = 47.36.$$

Cette distance $m-k$ du point d'inflexion au point de maximum dans les courbes AN, AN′, AN″ de la Fig. 2 est, comme on voit, la même que la distance $m-k$ du point d'inflexion au point de maximum dans les courbes AM, A′M′,

A'''M''' de la Fig. 1. Cette circonstance met dores et déjà en évidence l'identité des courbes d'amortissement et des courbes de variation du prix normal; mais nous laisserons cette identité de côté pour y revenir dans un instant.

28. Si l'on pose

$$A = a \frac{\alpha + \frac{n}{1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma + \ldots + \mu}{i^2 + \frac{n}{1}i^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}i^4 + \ldots + i^{n+2}}$$

$$= \frac{a}{i^2} \times \frac{\alpha + \frac{n}{1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma + \ldots + \mu}{(1+i)^n},$$

alors $\Delta^2 A_{n+1}$ devient

$$\frac{a}{i^2} \times \frac{\alpha + \frac{n}{1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma + \ldots + \mu}{(1+i)^n} \times i^2(1+i)^{n+1}$$

$$- a\left[\alpha + \frac{n+1}{1}\beta + \frac{(n+1)n}{1.2}\gamma + \ldots + \nu\right]$$

$$= a\left[\alpha + \frac{n}{1}\beta + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma + \ldots + \mu\right](1+i)$$

$$- a\left[\alpha + \frac{n+1}{1}\beta + \frac{(n+1)n}{1.2}\gamma + \ldots + \nu\right]$$

$$= a\left[\alpha - \alpha + \frac{n-(n+1)}{1}\beta + \frac{n(n-1)-(n+1)n}{1.2}\gamma + \ldots - \nu\right.$$

$$\left. + \alpha i + \frac{n}{1}\beta i + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma i + \ldots + \mu i\right]$$

$$= a\left[-\beta - \frac{n}{1}\gamma - \frac{n(n-1)}{1.2}\delta - \ldots - \nu\right.$$

$$\left. + (\beta - z^2) + \frac{n}{1}(\gamma - z^3) + \frac{n(n-1)}{1.2}(\delta - z^4) + \ldots + (\nu - z^{n+2})\right]$$

$$= -a\left[z^2 + \frac{n}{1}z^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}z^4 + \ldots + z^{n+2}\right]$$

$$= -az^2(1+z)^n.$$

Cette quantité étant essentiellement négative quand $z$ est positif, il s'ensuit que : — *Dès que l'excédant des intérêts à payer sur les fermages à recevoir a cessé de croître, il commence à décroître.*

## VI

### *Impossibilité de l'amortissement en cas de prix normal.*

29. La discussion de la formule [19] de la somme restant due en fonction des années écoulées

$$A_n = A(1+i)^n - a\,\frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i - z}$$

nous a fait reconnaître certaines conditions de rapport entre A et $a$ pour que l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage soit possible. Et, d'autre part, la discussion de la formule [1] ou [2]

$$A = \frac{a}{i} + \frac{az}{i(1+i)^m} \times \frac{(1+i)^m - (1+z)^m}{i - z}$$

$$= \frac{a}{i(1+i)^m} \times \frac{i(1+i)^m - z(1+z)^m}{i - z}$$