Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 21 (1885)
Heft: 93

Artikel: Mémoire sur le baromètre-levier de M. H. Dufour
Autor: Odin, A.-A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-260539

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXI. N° 93. 1885.

MÉMOIRE
SUR LE
BAROMÈTRE-LEVIER DE M. H. DUFOUR

PAR
A.-A. ODIN
élève de l'Ecole polytechnique fédérale.

Théorie du baromètre-levier, la température étant supposée constante.

Le baromètre-levier, inventé par M. Henri Dufour, professeur à l'Académie de Lausanne, se compose d'un tube en verre ABCD (Pl. IV, fig. 1) dont les branches AB et CD doivent être parfaitement parallèles, cylindriques et de même diamètre intérieur; la partie BC du tube peut avoir une forme quelconque. Etant fermé en D, ce tube, une fois plein de mercure, devient un baromètre et, si on le rend mobile dans le plan ABCD autour d'un point O, il est facile de voir que tout changement de pression fera passer du mercure d'une branche du tube dans l'autre et occasionnera un déplacement de l'appareil tout entier; ce déplacement peut être enregistré par une plume sur une feuille de papier se déroulant verticalement. L'expérience et le calcul montrent que le déplacement de la plume n'est pas proportionnel à la variation de la pression atmosphérique qui l'a produit, ce qui devrait avoir lieu pour que le baromètre-levier donnât des indications commodes à interpréter; ce défaut se laisse corriger en faisant agir sur le baromètre un poids par l'intermédiaire d'un fil coudé, ainsi que nous le décrirons plus bas. Pour arriver à comprendre et à calculer cette disposition, il est nécessaire que nous recherchions quel moment de rotation doit agir sur le baromètre dans chacune de ses positions, pour rendre les déplacements de la plume proportionnels aux changements de pression.

Pour atteindre le but que nous nous proposons, nous pouvons supposer les colonnes de mercure dans les branches AB et CD remplacées par des fils pesants, inflexibles et infiniment minces

(Pl. IV, fig. 2). Supposons que la pression atmosphérique agissant en un moment donné soit la pression moyenne et que le tube prenne la position représentée dans la figure 2. Soit β l'angle que forment les branches principales AB, CD avec la verticale et G le centre de gravité de tout l'appareil. Celui-ci ne peut être en équilibre que sous l'action d'un moment de rotation parfaitement déterminé M_0 dont la valeur est :

$$M_0 = Qg \sin \gamma.$$

Supposons maintenant que la pression diminue; le mercure tendra à monter dans le tube AB et à descendre dans le tube CD, ce qui fera tourner l'appareil de gauche à droite; il prendra alors, après quelques oscillations, une position d'équilibre représentée dans la figure 3 et faisant avec la position primitive un angle φ. Les branches AB et CD étant supposées de même diamètre intérieur, les longueurs $B_1 B_1'$ et $B_2 B_2'$ dont le mercure sera monté ou descendu sont égales; nous les représenterons par l et nous remarquerons que l s'annule en même temps que φ; $B_1 B_1'$ est une colonne de mercure ajoutée à l'appareil, tandis que $B_2 B_2'$ est une colonne de mercure retranchée. Soit q le poids du mercure par unité de longueur dans les branches AB et CD, et M le moment additionnel agissant sur le baromètre et destiné à produire la proportionnalité. On voit que l'équation des moments est :

$$- Qg \sin (\gamma + \varphi) + (b_1' + b_2') lq + M = o,$$

d'où

$$M = Qg \sin (\gamma + \varphi) - q (b_1' + b_2') l.$$

La figure 3 nous donnant les relations :

$$b_1' = - a_1 \sin \varphi + b_1 \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin (\beta + \varphi)$$

$$b_2' = - a_2 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi + \frac{l}{2} \sin (\beta + \varphi),$$

il s'ensuit que si l'on pose :

$$a_1 + a_2 = a$$
$$b_1 + b_2 = b,$$

la valeur de M devient :

$$(1) \quad M = Qg \sin (\gamma + \varphi) - q [- a \sin \varphi + b \cos \varphi + l \sin (\beta + \varphi)] l.$$

M est le moment additionnel dont l'action doit avoir la propriété de rendre les déplacements de la plume, ou mieux, les projections sur un plan horizontal de ces déplacements, proportionnels aux variations de pression qui les ont produits. En conséquence, si H_0 représente la pression moyenne, H la pression dans la nouvelle position du tube, on doit avoir pour toutes les pressions H :

$$H - H_0 = - c \sin \varphi.$$

c étant une constante positive (la pression doit diminuer pour que φ augmente). Mais :

$$H = - 2\, l \cos (\beta + \varphi) + a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

$$H_0 = a.$$

On doit donc avoir :

$$- 2\, l \cos (\beta + \varphi) + a \cos \varphi + b \sin \varphi - a = - c \sin \varphi$$

$$(2) \qquad l = \frac{(b + c) \sin \varphi - a (1 - \cos \varphi)}{2 \cos (\beta + \varphi)}.$$

En remplaçant l par cette valeur dans l'équation (1), on trouve l'expression de M en fonction de φ. Si l'on parvient donc, au moyen d'un artifice quelconque, à produire sur le tube un moment de rotation ayant pour chaque position de l'appareil la valeur donnée par la formule (1), on aura acquis la proportionnalité désirée ; on peut en outre régler l'amplification selon les besoins.

Ce problème n'a pu jusqu'à présent être résolu que d'une manière approximative, mais qui n'en est pas moins amplement suffisante dans la pratique. La solution est de M. Dufour, inventeur du baromètre-levier. Son procédé consiste à faire agir un poids sur un fil dont une extrémité est fixe et dont l'autre est adaptée au baromètre (Pl. IV, fig. 4). Le moment produit par ce système est aussi une fonction de φ ; cette fonction aura pour de petits angles φ la même valeur que M, si le poids et le fil sont calculés de manière que, pour la pression moyenne, soit pour $\varphi = 0$, les moments soient égaux, leurs premières et leurs secondes dérivées par rapport à φ soient respectivement égales. La première chose que nous ayons donc à faire est de calculer ces dérivées pour le moment M ; à cet effet, nous développerons cette fonction suivant les puissances croissantes de φ.

En faisant $\beta = 0$, condition qui sera toujours assez exactement réalisée dans la pratique, nos formules deviennent :

$$(3) \quad M = Qg \sin(\gamma + \varphi) - q[-a \sin\varphi + b \cos\varphi + l \sin\varphi]\, l$$

$$(4) \qquad l = \frac{(b+c)\sin\varphi - a(1-\cos\varphi)}{2\cos\varphi}.$$

Nous développerons d'abord l en série, en nous arrêtant aux termes en φ^3 :

$$l = \frac{1}{2}\left[(b+c)\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{b+c}{6}\varphi^3\right]\left[1 + \frac{1}{2}\varphi^2\right]$$

$$l = \frac{b+c}{2}\varphi - \frac{a}{4}\varphi^2 + \frac{b+c}{6}\varphi^3 - \ldots..$$

Développons la seconde partie de M en série ; nous aurons après réductions :

$$-a \sin\varphi + b\cos\varphi + l\sin\varphi = b - a\varphi + \frac{c}{2}\varphi^2 - \frac{a}{12}\varphi^3 - \ldots..$$

$$(5) \qquad M = Qg\sin(\gamma+\varphi) - \frac{1}{2}qb(b+c)\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}qa\left(\frac{3}{2}b + c\right)\varphi^2 - \frac{1}{4}q\left[a^2 + (b+c)\left(\frac{2}{3}b + c\right)\right]\varphi^3 + \ldots..$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qg\cos(\gamma+\varphi) - \frac{1}{2}qb(b+c) +$$

$$+ qa\left(\frac{3}{2}b + c\right)\varphi - \frac{3}{4}q\left[a^2 + (b+c)\left(\frac{3}{2}b + c\right)\right]\varphi^2 + \ldots..$$

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2} = -Qg\sin(\gamma+\varphi) + qa\left(\frac{3}{2}b + c\right) -$$

$$- \frac{3}{2}q\left[a^2 + (b+c)\left(\frac{3}{2}b + c\right)\right]\varphi + \ldots..$$

Pour $\varphi = 0$, nous avons :

$$M_0 = Qg\sin\gamma$$

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = Qg\cos\gamma - \frac{1}{2}qb(b+c)$$

$$\left(\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right)_0 = -Qg\sin\gamma + qa\left(\frac{3}{2}b + c\right)$$

Si nous posons :

$$g \sin \gamma = y$$
$$g \cos \gamma = x,$$

ces valeurs deviennent :

$$M_0 = Qy$$
$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = Qx - \frac{1}{2} q\, b\, (b + c)$$
$$\left(\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right)_0 = Qy + q\, a \left(\frac{3}{2} b + c\right).$$

Le système servant à produire la proportionnalité demandée se compose, comme nous l'avons déjà dit, d'un fil ABC ayant un point fixe C et étant assujetti en A au tube barométrique (Pl. IV, fig. 4); en un point déterminé B du fil, est suspendu un poids P. P, regardé comme force, se laisse décomposer en deux autres forces P_1 et P_2, dont les directions sont celles des branches du fil AB et BC. Nous supposerons, pour le calcul, qu'il n'y ait aucun frottement, que les branches du fil soient sans poids et qu'elles ne puissent pas être déformées, quelles que soient les forces qui agissent sur elles; d'après ces hypothèses, P_2 n'a aucun effet, tandis que l'action de P_1 se reporte en A et exerce par conséquent sur le baromètre un moment de rotation :

$$M = P_1 D.$$

Pour transformer cette expression en une fonction de φ, nous pouvons utiliser la règle des sinus, relative aux triangles rectilignes; cette règle nous donne dans le cas actuel :

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{P_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{P_1}{\cos \beta}$$

$$P_1 = P \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Nous avons de plus :

$$D = L \cos(\alpha + \varphi),$$

d'où

$$M = PL \frac{\cos \beta \cos(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}. \tag{6}$$

Considérons la pression moyenne pour laquelle $\varphi = 0$ (Pl. IV, fig. 1); la force P_1 se décompose en deux forces dont l'une d'entre elles, P_1'', a pour seul effet de nuire à la sensibilité de l'appareil; nous obtiendrons donc les meilleurs résultats pratiques en construisant le système de telle sorte que pour $\varphi = 0$ on ait aussi $\alpha = 0$, car dans ce cas P_1'' sera aussi nul. Cette supposition faite, on a pour $\varphi = 0$:

$$M_0 = \mathrm{PL}\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

ou en posant :

$$\cot\mathrm{g}\,\beta = \mathrm{B}$$

$$M_0 = \mathrm{PLB}. \tag{7}$$

Maintenant que nous avons l'expression générale de M en fonction de φ, α, β, il nous faut chercher à exprimer $\frac{dM}{d\varphi}$ en fonction des mêmes variables φ, α, β.

Les longueurs L, l_1, l_2 étant constantes, α et β sont déterminés dès que φ est fixé, d'où nous voyons que α et β sont des fonctions de φ; la première opération à faire consiste donc à chercher les valeurs de $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, $\frac{d\beta}{d\varphi}$ en fonction de φ, α, β. Deux relations entre φ, α, β sont données par les deux équations suivantes qui expriment que les projections de la ligne brisée OABC sur l'horizontale et sur la verticale sont constantes, ce qui a nécessairement lieu, puisque les points O et C sont fixes :

$$\mathrm{L}\sin\varphi + l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta = \text{constante}.$$

$$\mathrm{L}\cos\varphi + l_1\sin\alpha - l_2\sin\beta = \text{constante}.$$

Différentions ces équations par rapport à φ :

$$\mathrm{L}\cos\varphi - l_1\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{d\varphi} - l_2\sin\beta\,\frac{d\beta}{d\varphi} = 0$$

$$-\mathrm{L}\sin\varphi + l_1\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{d\varphi} - l_2\cos\beta\,\frac{d\beta}{d\varphi} = 0.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, $\frac{d\beta}{d\varphi}$, nous avons :

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{L(\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi)}{l_1(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{L(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)}{l_2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{L\cos(\varphi - \beta)}{l_1\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{L\cos(\varphi + \alpha)}{l_2\sin(\alpha + \beta)}.$$

Nous poserons pour abréger :

$$\frac{L}{l_1} = m \qquad \frac{L}{l_2} = n,$$

ce qui nous donne pour les valeurs cherchées :

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = m\frac{\cos(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \tag{8}$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = n\frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \tag{9}$$

En utilisant ces valeurs, la formule (7) devient :

$$M = P\frac{L}{n}\cos\beta\frac{d\beta}{d\varphi},$$

équation qui, écrite sous la forme

$$M\,d\varphi = P\,l_2\cos\beta\,d\beta,$$

exprime que, dans notre système, le travail mécanique de la puissance est égal au travail mécanique de la résistance. En intégrant cette dernière équation, on a :

$$\int M\,d\varphi = P\,l_2\sin\beta. \tag{10}$$

Nous pourrions exprimer $\sin\beta$ en fonction de φ et de là tirer les trois premières dérivées de $\int M\,d\varphi$ par rapport à φ, lesquelles ne sont autre chose que les deux premières dérivées de M par rapport à φ; mais cette méthode conduit à des calculs

tout aussi compliqués que celle qui consiste à différentier directement l'équation :

$$6) \qquad M = \mathrm{PL}\,\frac{\cos\beta\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

C'est cette dernière méthode que nous emploierons. Une première différentiation donne :

$$\frac{dM}{d\varphi} = \mathrm{PL}\,\frac{\left[\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)\left(\begin{array}{l} -\sin\beta\cos(\varphi+\alpha)\,\dfrac{d\beta}{d\varphi} - \\ -\cos\beta\sin(\varphi+\alpha)\left(1+\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)\end{array}\right) - \\ -\cos(\alpha+\beta)\cos\beta\cos(\varphi+\alpha)\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}+\dfrac{d\beta}{d\varphi}\right)\end{array}\right]}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\,\mathrm{PL}\,\frac{\left[\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)\cos\beta\sin(\varphi+\alpha) + \\ +\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\left(\begin{array}{l}\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\sin(\varphi+\alpha) + \\ +\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\cos(\varphi+\alpha)\end{array}\right) + \\ +\dfrac{d\beta}{d\varphi}\left(\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cos(\varphi+\alpha) + \\ +\cos(\alpha+\beta)\cos\beta\cos(\varphi+\alpha)\end{array}\right)\end{array}\right]}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\,\mathrm{PL}\,\frac{\left[\begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)\cos\beta\sin(\varphi+\alpha) \\ +\,m\,\dfrac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta\cos(\varphi-\beta) + \\ +\,n\,\dfrac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\alpha\cos(\varphi+\alpha)\end{array}\right]}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\mathrm{PL}\left[\begin{array}{c} \dfrac{\cos\beta\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} + \\ +\dfrac{m\cos\beta\cos^2(\varphi-\beta)+n\cos\alpha\cos^2(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\alpha+\beta)}\end{array}\right]$$

Pour $\varphi = 0$ et $\alpha = 0$, on a :

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PL}\,\frac{m\cos^3\beta + n}{\sin^3\beta}$$

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PL}\left(m\,\mathrm{B}^3 + \frac{n}{\sin^3\beta}\right)$$

Remarquons que, pour la position moyenne du tube, on a, en faisant $\frac{\mathrm{L}}{f} = \mathrm{K}$:

$$(11) \qquad n = \frac{\mathrm{L}}{l_2} = \frac{\mathrm{L}}{\frac{f}{\cos\beta}} = \mathrm{K}\cos\beta.$$

Il s'ensuit que :

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PL}\left(m\,\mathrm{B}^3 + \mathrm{K}\,\frac{\cos\beta}{\sin^3\beta}\right)$$

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PLB}\left(m\,\mathrm{B}^2 + \frac{\mathrm{K}}{\sin^2\beta}\right)$$

mais :

$$\sin^2\beta = \frac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2\beta} = \frac{1}{1 + \mathrm{B}^2}$$

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PLB}\,[m\,\mathrm{B}^2 + \mathrm{K}\,(1 + \mathrm{B}^2)]$$

$$(12) \qquad \left(\frac{dM}{d\varphi}\right)_0 = -\,\mathrm{PLB}\,[\mathrm{K} + (m + \mathrm{K})\,\mathrm{B}^2].$$

Passons au calcul de $\frac{d^2M}{d\varphi^2}$; nous obtiendrons cette seconde dérivée en différentiant $\frac{dM}{d\varphi}$ que nous écrirons d'abord sous la forme abrégée :

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\,\mathrm{PL}\,(x + y)$$

en posant :

$$y = \frac{m\,u + n\,v}{t}$$

$$x = \frac{\cos\beta \sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$u = \cos\beta \cos^2(\varphi - \beta)$$
$$v = \cos\alpha \cos^2(\varphi + \alpha)$$
$$t = \sin^3(\alpha + \beta).$$

Nous aurons donc :

$$\frac{dM}{d\varphi} = -\,\mathrm{PL}\left(x + \frac{m\,u + n\,v}{t}\right)$$

$$(13)\quad \frac{d^2M}{d\varphi^2} = -\,\mathrm{PL}\left[\frac{dx}{d\varphi} + \frac{t\left(m\frac{du}{d\varphi} + n\frac{dx}{d\varphi}\right) - \frac{dt}{d\varphi}(m\,u + n\,v)}{t^2}\right]$$

Nous avons à former les expressions :

$$\frac{dx}{d\varphi};\ \frac{du}{d\varphi};\ \frac{dv}{d\varphi};\ \frac{dt}{d\varphi}$$

$$x = \frac{\cos\beta \sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta)\left\{\begin{array}{l} -\sin\beta \sin(\varphi + \alpha)\dfrac{d\beta}{d\varphi} + \\ +\cos\beta \cos(\varphi + \alpha)\left(1 + \dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right) \end{array}\right\} - \\ -\cos(\alpha + \beta)\cos\beta \sin(\varphi + \alpha)\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi} + \dfrac{d\beta}{d\varphi}\right) \end{array}\right\}}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta)\cos\beta \cos(\varphi + \alpha) + \\ +\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\left\{\begin{array}{l} \cos\beta \cos(\varphi + \alpha)\sin(\alpha + \beta) - \\ -\cos\beta \sin(\varphi + \alpha)\cos(\alpha + \beta) \end{array}\right\} - \\ -\dfrac{d\beta}{d\varphi}\left\{\begin{array}{l} \sin(\alpha + \beta)\sin\beta \sin(\varphi + \alpha) + \\ +\cos(\alpha + \beta)\cos\beta \sin(\varphi + \alpha) \end{array}\right\} \end{array}\right\}}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)\cos\beta\cos(\varphi+\alpha)+\\ +m\dfrac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta\sin(\beta-\varphi)-\\ -n\dfrac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)\end{array}\right\}}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{\cos\beta\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}-\frac{m}{2}\frac{\cos\beta\sin 2(\varphi-\beta)}{\sin^3(\alpha+\beta)}-\frac{n}{2}\frac{\cos\alpha\sin 2(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\alpha+\beta)}$$

$$u=\cos\beta\cos^2(\varphi-\beta)$$

$$\frac{du}{d\varphi}=-\sin\beta\cos^2(\varphi-\beta)\frac{d\beta}{d\varphi}-$$

$$-2\cos\beta\cos(\varphi-\beta)\sin(\varphi-\beta)\left(1-\frac{d\beta}{d\varphi}\right)$$

$$\frac{du}{d\varphi}=\cos(\varphi-\beta)\left[\begin{array}{c}-2\cos\beta\sin(\varphi-\beta)+\\ +\left(-\sin\beta\cos(\varphi-\beta)+2\cos\beta\sin(\varphi-\beta)\right)\dfrac{d\beta}{d\varphi}\end{array}\right]$$

$$\frac{du}{d\varphi}=\cos(\varphi-\beta)\left[\begin{array}{c}-2\cos\beta\sin(\varphi-\beta)+\\ +n\dfrac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\left(2\cos\beta\sin(\varphi-\beta)-\sin\beta\cos(\varphi-\beta)\right)\end{array}\right]$$

$$v=\cos\alpha\cos^2(\varphi+\alpha)$$

v s'obtient en changeant dans u, β en $-\alpha$; $\frac{dv}{d\varphi}$ s'obtiendra donc au moyen de $\frac{du}{d\varphi}$ par la même transformation, à la condition toutefois que $\frac{d\beta}{d\varphi}$ n'ait pas encore été remplacé par sa valeur; nous aurons donc :

$$\frac{dv}{d\varphi}=\cos(\varphi+\alpha)\left[\begin{array}{c}-2\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)\\ +\left(\sin\alpha\cos(\varphi+\alpha)+2\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)\right)\left(-\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)\end{array}\right]$$

$$\frac{dv}{d\varphi}=-\cos(\varphi+\alpha)\left[\begin{array}{c}2\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)+\\ +m\dfrac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\left(2\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)+\sin\alpha\cos(\varphi+\alpha)\right)\end{array}\right]$$

$$t = \sin^3(\alpha+\beta)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = 3\sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}+\frac{d\beta}{d\varphi}\right)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = 3\sin^2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\left[m\frac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}+n\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{3}{2}\sin 2(\alpha+\beta)\,[m\cos(\varphi-\beta)+n\cos(\varphi+\alpha)].$$

Comme nous n'avons pas besoin de la valeur générale de $\frac{d^2M}{d\varphi^2}$, mais seulement de $\left(\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right)_0$, nous ferons directement $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ dans les valeurs que nous venons de calculer, et nous aurons :

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_0 = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{m}{2}\frac{\cos\beta\sin 2\beta}{\sin^3\beta} = \mathrm{B}+m\mathrm{B}^2$$

$$u_0 = \cos^3\beta$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = \cos\beta\left[2\cos\beta\sin\beta+\frac{n}{\sin\beta}(-2\cos\beta\sin\beta-\sin\beta\cos\beta)\right]$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = 2\sin\beta\cos^2\beta - 3n\cos^2\beta$$

$$v_0 = 1$$

$$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)_0 = 0$$

$$t_0 = \sin^3\beta$$

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)_0 = \frac{3}{2}\sin 2\beta\,(m\cos\beta+n)$$

En substituant ces valeurs dans la formule (13), on a :

$$\left(\frac{d^2M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PL}\left\{\mathrm{B}+m\mathrm{B}^2+\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin^3\beta.m(2\sin\beta\cos^2\beta-3n\cos^2\beta)-\\ -\frac{3}{2}\sin 2\beta(m\cos\beta+n)(m\cos^3\beta+n)\end{array}\right\}}{\sin^6\beta}\right\}$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PL}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{B} + m\,\mathrm{B}^2 + \\ + m\,\dfrac{2\cos^2\beta - 3n\,\dfrac{\cos^2\beta}{\sin\beta}}{\sin^2\beta} - \\ -3\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\left(m\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + \dfrac{n}{\sin\beta}\right)\left(m\dfrac{\cos^3\beta}{\sin^3\beta} + \dfrac{n}{\sin^3\beta}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PL}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{B} + m\,\mathrm{B}^2 + \\ + m\left(2\,\mathrm{B}^2 - 3\,\dfrac{n\,\mathrm{B}^2}{\sin\beta}\right) - \\ -3\,\mathrm{B}\left(m\,\mathrm{B} + \dfrac{n}{\sin\beta}\right)\left(m\,\mathrm{B}^3 + \dfrac{n}{\sin^3\beta}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PL}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{B} + 3\,m\,\mathrm{B}^2 - 3\,m\,\mathrm{B}^2\,\dfrac{n}{\cos\beta}\,\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} - \\ -3\mathrm{B}\left(m\mathrm{B} + \dfrac{n}{\cos\beta}\,\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)\left(m\mathrm{B}^3 + \dfrac{n}{\cos\beta}\,\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\,\dfrac{1}{\sin^2\beta}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PL}\left[\begin{array}{c} \mathrm{B} + 3\,m\,\mathrm{B}^2 - 3\,m\,\mathrm{K}\,\mathrm{B}^3 - \\ -3\,\mathrm{B}\,(m\,\mathrm{B} + \mathrm{KB})\,[m\,\mathrm{B}^3 + \mathrm{KB}\,(1 + \mathrm{B}^2)] \end{array}\right]$$

$$\left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = -\mathrm{PLB}\left[\begin{array}{c} 1 + 3\,m\,\mathrm{B} - 3\,m\,\mathrm{KB}^2 - \\ -3\,\mathrm{B}^2\,(m + \mathrm{K})\,[(m + \mathrm{K})\,\mathrm{B}^2 + \mathrm{K}] \end{array}\right]$$

$$(14)\quad \left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0 = \mathrm{PLB}\left[\begin{array}{c} -1 - 3\,m\,\mathrm{B} + \\ +3\,\mathrm{K}\,(2m + \mathrm{K})\,\mathrm{B}^2 + 3\,(m + \mathrm{K})^2\,\mathrm{B}^4 \end{array}\right]$$

Les conditions à remplir pour que les moments M et M soient égaux dans le voisinage de la position moyenne sont :

$$\mathrm{M}_0 = M_0$$

$$\left(\frac{d\,\mathrm{M}}{d\varphi}\right)_0 = \left(\frac{d\,M}{d\varphi}\right)_0$$

$$\left(\frac{d^2\,\mathrm{M}}{d\varphi^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 M}{d\varphi^2}\right)_0$$

car si l'on représente les valeurs de M et de M par les ordonnées de deux courbes dont les valeurs correspondantes de φ

sont les abscisses, ces deux courbes s'osculeront au point dont l'abscisse est $\varphi = 0$; ces dernières équations sont donc les équations de condition qui doivent être satisfaites pour que les déplacements latéraux de la plume du baromètre soient proportionnels aux variations de pression qui les ont produits ; écrites explicitement, elles deviennent :

$$Qy = PLB$$

$$Qx - \frac{1}{2} q b (b + c) = - PLB [K + (m + K) B^2]$$

$$- Qy + q a \left(\frac{3}{2} b + c\right) =$$

$$= PLB [- 1 - 3 m B + 3 K (2 m + K) B^2 + 3 (m + K)^2 B^4]$$

En additionnant membre à membre la première et la troisième de ces équations, et en remplaçant PLB par Qy, on trouve :

$$q a \left(\frac{3}{2} b + c\right) = 3 Qy B [- m + K (2 m + K) B + (m + K)^2 B^3]$$

$$(15) \qquad Qy = \frac{q a \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right)}{B [- m + K (2 m + K) B + (m + K)^2 B^3]}$$

La deuxième équation de condition peut s'écrire sous la forme :

$$(16) \qquad Qx = \frac{1}{2} q b (b + c) - Qy [K + (m + K) B^2]$$

et la première :

$$(17) \qquad P = \frac{Qy}{LB}.$$

Il nous reste à voir de quelle manière ces formules peuvent être employées pour calculer les diverses parties d'un baromètre-levier bien conditionné.

a étant la pression moyenne, en millimètres de mercure, au lieu où doit fonctionner le baromètre, est par cela même donné. q est le poids de la colonne de mercure par unité de longueur ;

il devra être choisi comme pour un bon baromètre ordinaire, pour que, d'un côté, le ménisque n'ait pas une trop grande influence et que, d'un autre côté, l'appareil ne soit pas trop lourd. Afin que le mouvement du tube dépende le moins possible du fil, et qu'il soit provoqué par les plus petites variations de pression, il sera nécessaire de prendre b aussi grand que possible, c'est-à-dire aussi grand que les dimensions d'un appareil bien conditionné le permettent; b est donc aussi donné jusqu'à un certain point par les circonstances. Il en est de même de l'amplification de laquelle dépend directement c.

Afin de faciliter la construction du baromètre-levier, on forme celui-ci d'un tube coudé en quatre places différentes, et toujours à angle droit (Pl. IV, fig. 2); à la branche horizontale supérieure est adapté un curseur dont le poids, qui est calculé après la construction du tube, sert à régler la position du centre de gravité de l'appareil; celui-ci est suspendu au moyen d'un collier O que l'on peut fixer en un point quelconque du tube. Par un choix convenable du poids additionnel, de sa position et du point de suspension, on peut donc faire de telle sorte que le centre de gravité du baromètre ait des coordonnées x et y données d'avance, pourvu naturellement que ces coordonnées restent comprises entre certaines limites données par la pratique. Ceci pour montrer que l'on peut disposer, pour le calcul de l'instrument, des valeurs de Qx et de Qy. L. devra être choisi aussi grand que possible, afin que P soit aussi petit que possible; L sera donc parfaitement déterminé dès que le point de suspension sera lui-même fixé, car L ne sera autre chose que OE. Avant même d'avoir calculé exactement la position de O, on connaîtra L à quelques centimètres près, d'après la forme du tube. L'amplification étant aussi connue d'avance, il sera facile de calculer approximativement quelle sera la position extrême de F pour les pressions les plus faibles; on pourra donc savoir quelle devra être la valeur minima de f, et cette valeur minima devra être peu éloignée de la vraie valeur, car f doit être aussi petit que possible, afin que le moment de rotation exercé en E le soit également, ce qui est nécessaire, afin que le frottement au point de suspension soit, lui aussi, un minimum. f pourra donc être déterminé d'avance, de sorte que $K = \frac{L}{f}$ a une valeur bien déterminée.

Les quantités dont nous diposons sont donc m, B, Qx, Qy

lesquelles sont liées par les deux équations (15) et (16); on pourrait donc assujettir ces quatre quantités à deux nouvelles conditions ayant pour but une proportionnalité plus exacte, mais en vue de la sensibilité et de l'exactitude de l'appareil, il vaut mieux ne se laisser guider pour leur choix que par des considérations purement de pratique. Nous regarderons dès maintenant ces quantités comme connues.

Il nous reste à voir comment on peut déterminer, au moyen de Qx et Qy, le poids additionnel, sa position et la position du point de suspension (Pl. IV, fig. 3). Q est le poids de l'appareil, y compris le poids additionnel q; le poids de l'appareil seul est donc $Q - q$; soit G′ son centre de gravité; nous avons :

$$Qy = qY + (Q - q)\, y'$$
$$qY = Qy - (Q - q)\, y'.$$

Qy est donné par les formules, $Q - q$ s'obtient en pesant l'appareil, et y' se trouve facilement en le suspendant à un fil de manière à ce qu'il soit vertical; on pourra donc calculer qY et par là même q; Y devra être égal aux deux tiers environ de la branche du tube sur laquelle il est mesuré; on ne pourra le connaître très exactement qu'après avoir terminé complètement le baromètre.

La hauteur du centre de gravité du baromètre ne dépend pas de Y, mais seulement de q; pour la déterminer, on mettra le poids q aussi exactement que possible à la place qu'il doit occuper, puis on immobilisera le mercure, et l'on suspendra l'appareil au moyen d'un fil, de manière que les branches principales soient horizontales; on obtiendra ainsi la projection G_1 du centre de gravité sur la branche centrale du tube, et le point de suspension O sera déterminé par la longueur $x = OG_1'$, qui sera connue, puisque Qx et Q auront déjà été trouvés.

Ces opérations préliminaires étant faites, on pourra suspendre l'appareil et l'on règlera la position du poids q de manière que les branches principales soient verticales pour la pression moyenne. On ne pourra se servir du baromètre ainsi monté qu'après l'avoir gradué expérimentalement, car l'amplification n'aura pas exactement la valeur choisie, et, de plus, les déplacements de l'aiguille ne seront pas rigoureusement proportionnels aux variations de pression pour toutes les pressions auxquelles pourra être soumis l'instrument.

Influence de la température sur les indications du baromètre-levier.

Pour qu'un baromètre-enregistreur soit pratique, il faut que ses indications soient indépendantes de la température. Ainsi que nous allons le voir, ce n'est pas le cas pour le baromètre-levier tel que nous l'avons décrit. Pour arriver à corriger ce défaut, nous emploierons le même procédé que pour la proportionnalité. Nous calculerons le moment de rotation qu'exerce sur l'appareil une élévation de température de t°, pour une pression quelconque; ce moment étant trouvé, nous chercherons à adapter à l'appareil un système qui, pour chaque position du tube et pour chaque température, produise un moment de rotation égal et de sens contraire au premier.

Pour calculer le moment de rotation produit par une élévation de température de 0° à t^0, nous rechercherons quel est le déplacement du centre de gravité du mercure contenu dans l'appareil, lorsque la température monte de 0° à t°. Pour y arriver, nous calculerons d'abord les coordonnées de ce centre de gravité pour le cas où le mercure est à 0°. A cet effet, nous supposerons au tube barométrique la forme régulière représentée dans la figure 4 de la planche V; soient V_0 le volume du mercure à 0°, s et s' les sections intérieures du tube; alors on a :

$$V_0\, x_0 = (c_1 - c_2)\, s\, \frac{b}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{V_0}\,(c_1 - c_2)\, s\, \frac{b}{2}$$

$$V_0\, y_0 = \frac{1}{2}\,(a_2^2 - a_1^2)\, s' + \frac{1}{2}\,(a_2 - a_1)\, b\, s' +$$

$$+ \left[c_2 \left(a_2 + \frac{c_2}{2}\right) + c_1 \left(-a_1 + \frac{c_1}{2}\right)\right] s$$

$$y_0 = \frac{1}{V_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\, s'\, (a_2 - a_1)\, (a + b) + \\ + s \left[a_2\, c_2 - a_1\, c_1 + \frac{1}{2}\,(c_1^2 + c_2^2)\right] \end{array} \right\}$$

Considérons l'espace occupé maintenant par le mercure; cet espace étant limité par du verre, se dilate comme celui-ci; si

donc x'_t et y'_t représentent les coordonnées de son centre de gravité à t^0, et si γ est le coefficient de dilatation cubique du verre, on devra avoir :

$$x'_t = x'_0 \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

$$y'_t = y'_0 \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

ou

$$x'_t = \frac{1}{V_0} (c_1 - c_2)\, s\, \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

$$y'_t = \frac{1}{V_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} s' (a_2 - a_1)(a + b) \\ + s \left[a_2 c_2 - a_1 c_1 + \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2)\right] \end{array} \right\} \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

Considérons maintenant la dilatation du mercure lui-même. Comme il se dilate plus que le verre, il est à prévoir qu'il montera dans les deux branches du tube, de certaines longueurs λ_1 et λ_2 ; par λ_1 et λ_2, nous désignons les longueurs mesurées avec une échelle en verre, exacte à 0^0 ; c'est pourquoi nous les appellerons longueurs réduites, les longueurs réelles étant $\lambda_1 \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$, $\lambda_2 \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$. Le nouvel espace de mercure, regardé comme espace de verre dilaté, doit donc avoir un centre de gravité dont les coordonnées x_t, y_t s'obtiennent en remplaçant, dans les valeurs de x'_t, y'_t, c_1 par $c_1 + \lambda_1$, et c_2 par $c_2 + \lambda_2$. Nous devons donc avoir :

$$x_t = \frac{1}{V_0} (c_1 + \lambda_1 - c_2 - \lambda_2)\, s\, \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

$$y_t = \frac{1}{V_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} s' (a_2 - a_1)(a + b) + \\ + s \left[a_2 (c_2 + \lambda_2) - a_1 (c_1 + \lambda_1) + \frac{1}{2} \left((c_1 + \lambda_1)^2 + (c_2 + \lambda_2)^2 \right) \right] \end{array} \right\} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right).$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que les variations de température sont toujours faibles, de sorte que dans tous nos calculs, nous négligerons les termes en t^2 t^3, etc. Nous pourrons aussi, pour ce calcul, remplacer sin φ et tg φ par φ, et cos φ par 1.

Nous avons en premier lieu les longueurs λ_1 et λ_2 à calculer; soit H la hauteur barométrique réduite à 0°; la hauteur véritable de la colonne de mercure sera :

$$H(1+\alpha t),$$

α étant le coefficient de dilatation du mercure. Si nous la supposons mesurée sur du verre à t^0, cette longueur réduite à 0° sera :

$$\frac{H(1+\alpha t)}{1+\frac{\gamma}{3}t} = H\left[1+\left(\alpha-\frac{\gamma}{3}\right)t\right]$$

Mais cette hauteur n'est autre chose que :

$$H+(\lambda_2-\lambda_1)\cos\varphi.$$

Donc, en remplaçant cos φ par 1 :

$$H+\lambda_2-\lambda_1 = H\left[1+\left(\alpha-\frac{\gamma}{3}\right)t\right]$$

$$\lambda_2-\lambda_1 = H\left(\alpha-\frac{\gamma}{3}\right)t.$$

Le volume du mercure est à 0° V_0, à t^0 $V_0(1+\alpha t)$ ou

$$[V_0+(\lambda_1+\lambda_2)s](1+\gamma t),$$

car $V_0+(\lambda_1+\lambda_2)s$ est le volume réduit à 0° qu'occupe le mercure après la dilatation; nous avons donc la deuxième équation :

$$V_0(1+\alpha t) = [V_0+(\lambda_1+\lambda_2)s](1+\gamma t)$$

$$V_0[1+(\alpha-\gamma)t] = V_0+(\lambda_1+\lambda_2)s$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = \frac{V_0(\alpha-\gamma)t}{s};$$

La valeur de x_t devient :

$$x_t = \frac{1}{V_0}\left[(c_1 - c_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\right] s \frac{b}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right).$$

$$x_t = \frac{bs}{2V_0}\left[(c_1 - c_2) - H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) t\right]\left(1 + \frac{\gamma}{3} t\right)$$

$$x_t - x_0 = \frac{bs}{2V_0}\left[(c_1 - c_2)\frac{\gamma}{3} - H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)\right] t.$$

Comme γ est plus petit que $\frac{\alpha}{6}$ et que $c_1 - c_2$ ne dépassera guère $\frac{H}{10}$, nous pouvons négliger le terme $(c_1 - c_2)\frac{\gamma}{3}$ de sorte que :

$$x_t - x_0 = -\frac{bs\, H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)}{2V_0} t.$$

Afin de pouvoir calculer aisément $y_t - y_0$, nous formerons d'abord les expressions suivantes :

$$a_2\lambda_2 - a_1\lambda_1 = \frac{a_2 - a_1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1) + \frac{a_2 + a_1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) =$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{2}\frac{V_0(\alpha - \gamma)t}{s} + \frac{a}{2} H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) t =$$

$$= \frac{1}{2}\left[aH\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) + (a_2 - a_1)\frac{V_0}{s}(\alpha - \gamma)\right] t$$

$$c_2\lambda_2 + c_1\lambda_1 = \frac{c_2 + c_1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1) + \frac{c_2 - c_1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) =$$

$$= \frac{c_2 + c_1}{2}\frac{V_0(\alpha - \gamma)t}{s} + \frac{c_2 - c_1}{2} H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) t.$$

$c_2 + c_1$ est une constante que nous appellerons A ; l'équation devient :

$$c_2\lambda_2 + c_1\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[A\frac{V_0}{s}(\alpha - \gamma) + (c_2 - c_1) H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)\right] t.$$

λ_1 et λ_2 devenant nuls en même temps que t, nous aurons, en négligeant les termes en t^2 :

$$y_t - y_0 = \frac{1}{V_0}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}s'(a_2 - a_1)(a+b)\frac{\gamma}{3}t + \\ + s\left[a_2 c_2 - a_1 c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\right]\frac{\gamma}{3}t + \\ + s\left[a_2 \lambda_2 - a_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2\right] \end{array}\right\}$$

et en remplaçant λ_1 et λ_2 par leurs valeurs :

$$y_t - y_0 = \frac{1}{V_0}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}s'(a_2 - a_1)(a+b)\frac{\gamma}{3} + \\ + s\left[a_2 c_2 - a_1 c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\right]\frac{\gamma}{3} + \\ + \frac{s}{2}\left\{\begin{array}{l} aH\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) + (a_2 - a_1)\frac{V_0}{s}(\alpha - \gamma) \\ + A\frac{V_0}{s}(\alpha - \gamma) + (c_2 - c_1)H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\} t$$

$$y_t - y_0 = \frac{1}{V_0}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}s'(a_2 - a_1)(a+b)\frac{\gamma}{3} + \\ + s\left[a_2 c_2 - a_1 c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\right]\frac{\gamma}{3} + \\ + \frac{s}{2}\left\{\begin{array}{l} (a + c_2 - c_1)H\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) + \\ + (A + a_2 - a_1)\frac{V_0}{s}(\alpha - \gamma) \end{array}\right\} \end{array}\right\} t$$

Un simple calcul numérique fait voir que les deux premiers termes du facteur de $\frac{1}{V_0}t$ sont négligeables en présence du troisième ; nous pouvons donc poser :

$$y_t - y_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{(a + c_2 - c_1)Hs}{V_0}\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) + (A + a_2 - a_1)(\alpha - \gamma)\right]t$$

Pm étant le poids du mercure contenu dans le tube barométrique, le moment de rotation produit par ce mercure autour du point de suspension, était pour la température 0° :

$$M_0 = P_m (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi);$$

il est après la dilatation :

$$M_t = P_m (x_t \cos \varphi + y_t \sin \varphi),$$

en sorte que le moment qu'il s'agit de compenser est :

$$M = P_m [(x_t - x_0) \cos \varphi + (y_t - y_0) \sin \varphi]$$

ou

$$M = P_m [(x_t - x_0) + (y_t - y_0) \varphi].$$

En remplaçant $x_t - x_0$ et $y_t - y_0$ par leurs valeurs, nous avons :

$$M = \frac{P_m}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{bsH\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right)}{V_0} + \\ +\left[\dfrac{(a + c_2 - c_1) Hs}{V_0}\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right) + (A + a_2 - a_1)(\alpha - \gamma)\right]\varphi \end{array} \right\} t$$

Nous négligerons, comme nous l'avons déjà dit, les termes en φ^2, φ^3, etc. Remarquons de plus que $c_2 - c_1$ s'annule en même temps que φ, et que, a étant la pression moyenne, on a :

$$H = a - c\varphi.$$

Par conséquent :

$$M = \frac{P_m}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{bs(a - c\varphi)\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right)}{V_0} + \\ +\left[\dfrac{a^2 s}{V_0}\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right) + (A + a_2 - a_1)(\alpha - \gamma)\right]\varphi \end{array} \right\} t$$

$$M = \frac{P_m}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{abs\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right)}{V_0} + \\ +\left[\dfrac{(a^2 + bc)\, s\left(\alpha - \dfrac{\gamma}{3}\right)}{V_0} + (A + a_2 - a_1)(\alpha - \gamma)\right]\varphi \end{array} \right\} t$$

En appelant Δ le poids spécifique du mercure, nous avons :

$$M = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} -\Delta\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abs + \\ +\left[\Delta\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2+bc)\,s + (\alpha-\gamma)\,P_m\,(A+a_2-a_1)\right]\varphi \end{array}\right\} t$$

Comme Δs n'est autre chose que le poids q de la colonne de mercure par unité de longueur à 0°, M prend la forme :

$$M = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} -\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abq + \\ +\left[\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2+bc)\,q + (\alpha-\gamma)\,(A+a_2-a_1)\,P_m\right]\varphi \end{array}\right\} t$$

Le moment artificiel à faire agir sur l'appareil pour compenser tout effet de variation de température pour les positions moyennes est donc :

$$M' = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abq - \\ -\left[\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2+bc)\,q + (\alpha-\gamma)\,(A+a_2-a_1)\,P_m\right]\varphi \end{array}\right\} t$$

Remarquons que ce moment sera toujours nul pour :

$$\varphi = \frac{\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abq}{\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2+bc)\,q + (\alpha-\gamma)\,(A+a_2-a_1)\,P_m}$$

Cette valeur est assez approximativement :

$$\varphi = \frac{ab}{a^2+bc}.$$

Il est clair que cet angle φ ne sera pratiquement jamais atteint, mais sa connaissance est utile dans le placement du petit appareil que nous allons décrire.

On peut corriger l'influence de la température sur le baromètre-levier en fixant à celui-ci, en un point quelconque, mais

dans une position déterminée, l'appareil représenté dans la figure 5 de la planche V, et dont le mode d'action est si simple qu'il n'a pas besoin d'être expliqué; la boule supérieure contient de l'alcool et le reste de l'appareil, du mercure. Chacun des récipients de cette espèce de thermomètre a un centre de gravité qui varie peu; c'est d'après la position moyenne de ces centres que se mesurent les longueurs X, Y et D. Soit β le coefficient de dilatation de l'alcool, v_0 le volume de l'alcool à 0°, et v'_0 celui du mercure de la boule supérieure; le volume total de cette boule à 0° est donc :

$$v_0 + v'_0$$

et son volume à t^0 :

$$(v_0 + v'_0)(1 + \gamma t),$$

mais l'alcool qui y est contenu a pris en passant de 0° à t^0 le volume $v_0(1 + \beta t)$, et le mercure le volume $v'_0(1 + \alpha t)$, de sorte qu'il sort de la boule un volume de mercure :

$$v_0(1 + \beta t) + v'_0(1 + \alpha t) - (v_0 + v'_0)(1 + \gamma t) =$$
$$= v_0(\beta - \gamma)t + v'_0(\alpha - \gamma)t.$$

Le poids de ce mercure est :

$$\Delta\,[(\beta - \gamma)\,v_0 + (\alpha - \gamma)\,v'_0]\,t$$

et comme il passe dans l'autre boule, le poids de celle-ci augmente d'autant que le poids de la première diminue, de sorte que, les poids étant regardés comme forces, il se produit ici un couple dont le moment de rotation est :

$$M = \mathrm{D}\Delta\,[v_0(\beta - \gamma) + (\alpha - \gamma)\,v'_0]\,t$$

Mais comme :

$$\mathrm{D} = \mathrm{X}\cos\varphi - \mathrm{Y}\sin\varphi,$$

ou plus simplement :

$$\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}\varphi,$$

on aura :

$$M = \Delta\,[(\beta - \gamma)\,v_0 + (\alpha - \gamma)\,v'_0]\,(\mathrm{X} - \mathrm{Y}\varphi)\,t.$$

Appelons p_a le poids de l'alcool, p_m le poids du mercure contenus à 0° dans la boule supérieure, et δ le poids spécifique de l'alcool; nous aurons :

$$v_0 = \frac{p_a}{\delta} \qquad\qquad v'_0 = \frac{p_m}{\Delta}$$

et :

$$M = \left[(\beta - \gamma)\frac{\Delta}{\delta} p_a + (\alpha - \gamma) p_m\right](X - Y\varphi)\, t.$$

Pour résoudre complètement le problème, nous n'avons plus qu'à identifier les moments M' et M; cela nous donnera les deux équations :

$$\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abq = \left[(\beta - \gamma)\frac{\Delta}{\delta} p_a + (\alpha - \gamma) p_m\right] X$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2 + bc)\, q + (\alpha - \gamma)\,(A + a_2 - a_1)\, P_m\right] =$$
$$= \left[(\beta - \gamma)\frac{\Delta}{\delta} p_a + (\alpha - \gamma) p_m\right] Y.$$

De ces deux équations on tire celle-ci :

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right)(a^2 + bc)\, q + (\alpha - \gamma)\,(A + a_2 - a_1)\, P_m}{\left(\alpha - \frac{\gamma}{3}\right) abq}$$

ou :

$$\frac{Y}{X} = \frac{a^2 + bc}{ab} + \left(1 - \frac{2\gamma}{3\alpha}\right)\frac{A + a_2 - a_1}{ab}\,\frac{P_m}{q}.$$

Si le tube a partout le même diamètre intérieur, $\frac{P_m}{q}$ n'est autre chose que la longueur totale L du mercure dans le baromètre. Nous pouvons donc, dans ce cas, écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{Y}{X} = \frac{a^2 + bc + \left(1 - \frac{2\gamma}{3\alpha}\right)(A + a_2 - a_1)\, L}{ab}.$$

Les équations que nous avons établies entre X, Y, p_a, p_m, ne donnent que deux conditions auxquelles doivent être soumises ces quantités; pour leur détermination exacte, on se laissera guider par les besoins de la pratique.

Pour construire l'appareil compensateur dont nous venons de donner la théorie, on confectionnera d'abord, aussi exactement que possible, le verre de l'instrument, puis on calculera, au moyen des équations précédentes, le poids de l'alcool qu'il doit contenir; on pourra ainsi construire sans difficulté le thermomètre en question, et compenser très exactement l'influence de la température sur le baromètre-levier.

Ce que devient le puceron des pommiers pendant l'hiver,

par le Dr Henri BLANC,
professeur à l'Académie de Lausanne.

S'il est un insecte dont on se soit beaucoup occupé ces derniers temps, c'est bien du puceron des pommiers *(Schizoneura lanigera* Hausm.) qui, par ses dégâts, semble vouloir acquérir une aussi grande célébrité malfaisante que son congénère, le *Phylloxera vastatrix,* aussi possède-t-on sur lui un volumineux dossier d'articles et de brochures contenant des détails sur l'organisation, le genre de vie de l'insecte, à côté de données statistiques et de mesures à prendre pour empêcher sa propagation et pour le détruire. Mais en parcourant toute cette littérature, on est frappé de voir les divergences nombreuses qui existent entre les observateurs quant au mode de reproduction et quant au cycle de développement de cet insecte.

Les uns ont prétendu que ce cycle était à peu près semblable à celui parcouru par la plupart des pucerons, c'est-à-dire qu'au printemps apparaissaient sur les pommiers des femelles aptères, parthénogénétiques vivipares, qu'en automne apparaissaient parmi celles-ci des femelles ailées parthénogénétiques