Intégrales de première espèce

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

positif de l'axe des Ξ de $+1$ à 0; mais au-delà du point $+1$, l'image de l'axe des X est la droite $\eta = \xi$ de $\xi = 0$ jusqu'à $\xi = +\infty$.

Pour une circonférence de rayon > 1, les lignes de passage perdent leur influence. Par conséquent, à une telle circonférence correspond uniformément une courbe fermée dans le plan (s). La circonférence $r = 1$ constitue le cas limite, en ce sens que la courbe correspondante dans le plan (s) peut être considérée indifféremment comme une courbe fermée ou comme l'ensemble de quatre ovales allongés se rencontrant en O.

Incidemment, on reconnaît aussi que la fonction s sert d'intermédiaire à la *représentation conforme* de l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de la courbe

$$\varrho^4 = 2 \cos 4\psi$$

ou

$$(\xi^2 + \eta^2)^4 = 2(\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4).$$

En vertu des lois qui régissent la représentation conforme, les tangentes principales à cette courbe au point quadruple $\xi = 0$, $\eta = 0$, doivent former avec l'axe positif des Ξ des angles de $\pm 22\frac{1}{2}^0$ et $\pm 67\frac{1}{2}^0$.

Intégrales de première espèce.

La surface de Riemann, T, qui accompagne la fonction s, se compose, on l'a vu, de quatre nappes superposées. Sa connexion est de l'ordre 7, c'est-à-dire qu'elle peut, moyennant six coupures, être transformée en une surface T′ à connexion simple. Dans l'intérieur de cette nouvelle surface T′, les intégrales de fonctions rationnelles de s et de z sont des fonctions uniformes de leurs limites supérieures. Le long des deux bords des coupures, elles prennent des valeurs dont la différence est en général finie, mais constante, et que l'on appelle les *modules de périodicité* de ces intégrales. Par là, ne sont pas exclues d'autres lignes à différence constante situées dans l'intérieur même de la surface. (Intégrales de 3e espèce.)

On conviendra d'appeler positif le bord d'une coupure qui se trouve à gauche lorsqu'on la parcourt dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens des angles croissants. Ceci posé, on peut éta-

blir un *système normal de coupures* de la manière suivante: D'un point A de la surface, on mène une coupure qui ne partage pas la surface en plusieurs morceaux détachés et qui aboutit à un point de son propre parcours. Cette coupure peut être considérée comme une ligne fermée a_1, reliée au point A par une autre ligne c_1. D'un point du côté positif de a_1, on trace ensuite une autre coupure b_1 qui vient rejoindre son point initial, mais sur le bord négatif de a_1. De la même manière, toujours en partant du point A, on pourra mener encore deux autres couples de coupures. (Comp. W., p. 63.) Il va de soi, qu'à l'exception de $a_\nu b_\nu$, $a_\nu c_\nu$ qui se coupent en un point, jamais deux coupures ne doivent se croiser.

Dans le cas particulier qui fait l'objet de cette étude, une des manières possibles d'appliquer les coupures est celle indiquée dans la fig. 7, pl. VI, où les lignes noires pleines sont censées se trouver dans la première nappe, les lignes noires pointillées dans la deuxième, les lignes rouges dans la troisième, et enfin les lignes bleues dans la quatrième. Sans doute, la surface de Riemann T', ainsi obtenue, n'est pas la plus simple; mais d'une part elle a l'avantage d'être basée sur la surface T, adoptée déjà précédemment pour l'étude de la fonction s; d'autre part, il est à espérer que ce travail rendra d'autant plus de services au lecteur studieux que les intégrales à considérer exigeront plus de précautions.

Les intégrales de 1re espèce restent finies et continues dans toute l'étendue de la surface T', à l'exception des coupures dont les deux bords constituent la limite de la surface. Elles sont de la forme

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz,$$

ou bien

$$w = -\int \frac{\varphi(s,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}} ds \qquad \left(\text{puisque } \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} = -\frac{ds}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right),$$

où $F = s^4 + z^4 - 1$ et $\varphi(s,z)$ signifie une fonction entière et rationnelle de s et de z qu'il s'agit de déterminer.

En admettant que $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ reste finie pour toutes les valeurs finies de x, on sait que $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ conserve aussi une valeur finie, si la fonction $f(x)$ pour $x = \infty$ tend vers zéro d'un ordre supérieur au premier. Or, dans l'intégrale

$$w = \int \frac{\varphi\,dz}{4s^3}$$

la fonction $s = \sqrt[4]{1 - z^4}$ devient infinie du 1er ordre et, partant, s^3 du 3e ordre pour $z = \infty$. Il s'ensuit que la variable s (et pour des raisons analogues aussi la variable z) entre dans la fonction φ tout au plus au 1er degré. Les points de ramification $z = \pm 1$, $z = \pm i$ ne produisent pas de discontinuité. On peut donc poser

$$\varphi = A + Bz + Cs.$$

En disposant des constantes A, B, C de sorte que φ s'annule en deux points arbitraires, on peut obtenir trois fonctions φ différentes entre lesquelles il n'existe pas d'équation linéaire et homogène. Par contre, il est aisé de démontrer qu'entre quatre de ces fonctions, il existe nécessairement une équation linéaire et homogène, à coefficients constants *.

Soient maintenant φ_1, φ_2, φ_3 les trois fonctions en question, satisfaisant à la condition de s'annuler

$$\varphi_1 \text{ pour } \begin{cases} s = \infty, & z = 0 \\ s = 0, & z = \infty \end{cases}, \quad \text{d'où } B = C = 0 \text{ et } \varphi_1 = A,$$

$$\varphi_2 \text{ pour } \begin{cases} s = 0, & z = 0 \\ s = 1, & z = 0 \end{cases}, \quad \text{d'où } A = C = 0 \text{ et } \varphi_2 = Bz,$$

$$\varphi_3 \text{ pour } \begin{cases} s = 0, & z = 0 \\ s = 0, & z = 1 \end{cases}, \quad \text{d'où } A = B = 0 \text{ et } \varphi_3 = Cs.$$

* La géométrie analytique offre l'analogie suivante : Si $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_4 = 0$ sont les équations de quatre droites dans un plan, il est toujours possible d'établir l'identité $k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3 + k_4 g_4 = 0$, à moins que trois des droites données ne fassent partie d'un faisceau.

Abstraction faite de facteurs constants, les trois fonctions φ prennent la forme

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = z, \quad \varphi_3 = s$$

et les trois intégrales de première espèce sont

$$w_1 = \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}, \quad w_2 = \int \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}, \quad w_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

dont la dernière est elliptique. (Comp. W., p. 47, et Riemann, *Gesammelte math. Werke*, p. 459.)

Avant de procéder à la détermination des modules de périodicité, il est utile d'étudier quelques intégrales dont on aura souvent besoin. Il a déjà été dit que $\sqrt[4]{1-z^4}$ prend les facteurs $+1, i, -1, -i$ suivant que z se trouve dans la 1re, 2e, 3e ou 4e nappe de la surface T'. Par conséquent, dans ces mêmes nappes, $\frac{1}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}$ sera affecté des facteurs $+1, i, -1, -i$, tandis que $\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}$ prendra les facteurs $1, -1, 1, -1$.

Dans la suite, la nappe dans laquelle la variable d'intégration se meut, sera indiquée par un chiffre romain placé au-dessous du signe $\int$, et le signe (+) ou (—), appliqué en guise d'exposant au haut de la fonction à intégrer, fera connaître le bord le long duquel l'intégrale devra être prise.

Soient maintenant, dans la 1re nappe et prises le long du bord positif,

$$\int_{\mathrm{I}}^{0\,1} dw_1^{(+)} = \mathrm{K}_1, \quad \int_{\mathrm{I}}^{0\,1} dw_2^{(+)} = \mathrm{K}_2, \quad \int_{\mathrm{I}}^{0\,1} dw_3^{(+)} = \mathrm{K}_3;$$

conformément à la convention qui vient d'être rappelée, on aura alors évidemment

$$\int_{\mathrm{II}}^{0\,1} dw_1^{(+)} = i\mathrm{K}_1, \quad \int_{\mathrm{II}}^{0\,1} dw_2^{(+)} = i\mathrm{K}_2, \quad \int_{\mathrm{II}}^{0\,1} dw_3^{(+)} = -\mathrm{K}_3;$$

$$\int_{\mathrm{III}}^{0\,1} dw_1^{(+)} = -\mathrm{K}_1, \quad \int_{\mathrm{III}}^{0\,1} dw_2^{(+)} = -\mathrm{K}_2, \quad \int_{\mathrm{III}}^{0\,1} dw_3^{(+)} = \mathrm{K}_3;$$

$$\int_{\mathrm{IV}}^{0\,1} dw_1^{(+)} = -i\mathrm{K}_1, \quad \int_{\mathrm{IV}}^{0\,1} dw_2^{(+)} = -i\mathrm{K}_2, \quad \int_{\mathrm{IV}}^{0\,1} dw_3^{(+)} = -\mathrm{K}_3.$$

Dans ces intégrales, l'intervalle d'intégration s'étendait sur le bord positif de l'axe des X, de 0 à $+1$. Une rotation de $+90°$ autour de l'origine 0 le transporte sur le bord positif de l'axe des Y, et la variable z a passé respectivement de la 1re nappe à la 4e, de la 2e à la 1re, de la 3e à la 2e, et de la 4e à la 3e. L'équivalent analytique de cette opération est la substitution $z = it$, où t prend toutes les valeurs réelles de 0 à $+1$. Il s'ensuit que

$$\int_{\mathrm{IV}}^{i}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = i\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{(1-t^4)^3}} = i\int_{\mathrm{I}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = iK_1$$

et de même

$$\int_{\mathrm{IV}}^{i}{}_{0}\, dw_2^{(+)} = -K_2, \quad \int_{\mathrm{IV}}^{i}{}_{0}\, dw_3^{(+)} = iK_3;$$

$$\int_{\mathrm{I}}^{i}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = i\int_{\mathrm{II}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -K_1, \quad \int_{\mathrm{II}}^{i}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = i\int_{\mathrm{III}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -iK_1,$$

$$\int_{\mathrm{III}}^{i}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = i\int_{\mathrm{IV}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = +K_1, \text{ etc.}$$

Si l'on fait faire à l'intervalle $0 + 1$ une rotation de $+180°$, son bord positif viendra se confondre entre 0 et -1 avec le bord positif de l'axe des X négatifs, et la variable z passera respectivment de la 1re nappe à la 3e, de la 2e à la 4e, de la 3e à la 1re et de la 4e à la 2e. A cette opération correspond la substitution $z = -t$, où t se meut de 0 à $+1$. On a, par conséquent,

$$\int_{\mathrm{III}}^{-1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{(1-t^4)^3}} = -\int_{\mathrm{I}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -K_1,$$

$$\int_{\mathrm{III}}^{-1}{}_{0}\, dw_2^{(+)} = K_2, \quad \int_{\mathrm{III}}^{-1}{}_{0}\, dw_3^{(+)} = -K_3;$$

$$\int_{\mathrm{V}}^{-1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -\int_{\mathrm{II}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -iK_1, \quad \int_{\mathrm{I}}^{-1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -\int_{\mathrm{III}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = K_1,$$

$$\int_{\mathrm{II}}^{-1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -\int_{\mathrm{IV}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = iK_1, \text{ etc.}$$

D'une manière analogue, on peut obtenir les intégrales prises sur le bord positif de 0 à $-i$. En ce qui concerne les intégrales relatives aux bords négatifs, il suffit de tenir compte de la connexion des nappes le long des lignes de passage. Ainsi, par exemple, le long de la ligne de passage $0+1$, le bord négatif de la 1re nappe se rattache au bord positif de la 2e. On en conclut que

$$\int_{\mathrm{I}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(-)} = \int_{\mathrm{II}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = iK_1\,;$$

de même

$$\int_{\mathrm{II}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(-)} = \int_{\mathrm{III}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -K_1\,, \quad \int_{\mathrm{III}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(-)} = \int_{\mathrm{IV}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = -iK_1\,,$$

$$\int_{\mathrm{IV}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(-)} = \int_{\mathrm{I}}^{1}{}_{0}\, dw_1^{(+)} = K_1\,, \text{ etc.}$$

Au lieu d'employer le procédé indiqué pour la détermination de ces intégrales rectilignes, on pourrait se servir avantageusement de la représentation au moyen des fonctions w_1, w_2, w_3. A cet effet, on remarquera les particularités suivantes : La fonction w_2 transforme les angles à l'origine en angles doubles. Autour des points singuliers ± 1, $\pm i$ les angles de l'original sont réduits au quart par les fonctions w_1 et w_2 et à la moitié par la fonction w_3. En tout autre point, les angles correspondants de l'original et de son image sont égaux.

Pour plus de facilité, les valeurs des intégrales rectilignes relatives aux intervalles de 0 à ± 1 et de 0 à $\pm i$ sont réunies dans le tableau suivant (voir p. 12).

Détermination des modules de périodicité.

Soient $A_\nu^{(h)}$ et $B_\nu^{(h)}$ les modules de périodicité de w_h relatifs aux coupures a_ν et b_ν, c'est-à-dire

$$A_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)} \text{ le long de la coupure } a_\nu \text{ et}$$

$$B_\nu^{(h)} = w_h^{(+)} - w_h^{(-)} \text{ le long de la coupure } b_\nu\,.$$