Intégrales normales de première espéce

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

D'après Riemann, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)}, & A_3^{(2)}, & A_3^{(3)}, \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. Cette condition essentielle est encore remplie, attendu que

$$\begin{vmatrix} 2(1-i)K_1, & 0 & , & 4iK_3 \\ -2K_1, & -2(1+i)K_2, & -2(1-i)K_3 \\ 2K_1, & 2(1-i)K_2, & 2(1+i)K_3 \end{vmatrix} = -32(2+i)K_1K_2K_3$$

Intégrales normales de première espèce.

Les intégrales de première espèce u_1, u_2, u_3 sont dites *normales* quand elles possèdent les modules de périodicité suivants :

Le long des coupures	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
modules de périodicité de u_1 :	πi	0	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
» » u_2 :	0	πi	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}
» » u_3 :	0	0	πi	a_{31}	a_{32}	a_{33}.

Pour les former, il suffit de poser

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1^{(1)} w_1 + \alpha_2^{(1)} w_2 + \alpha_3^{(1)} w_3, \\ u_2 = \alpha_1^{(2)} w_1 + \alpha_2^{(2)} w_2 + \alpha_3^{(2)} w_3, \\ u_3 = \alpha_1^{(3)} w_1 + \alpha_2^{(3)} w_2 + \alpha_3^{(3)} w_3, \end{cases}$$

et de déterminer les 9 constantes $\alpha_k^{(i)}$ à l'aide des conditions

$$\begin{array}{ll} & \underline{u_1.} \\ \text{Coupure } a_1 & \alpha_1^{(1)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_1^{(3)} = \pi i \\ \text{» } a_2 & \alpha_1^{(1)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_2^{(3)} = 0 \\ \text{» } a_3 & \alpha_1^{(1)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(1)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(1)} A_3^{(3)} = 0 \end{array}$$

u_2.

$$\begin{array}{ll|l|}
\text{Coupure } a_1 & & \alpha_1^{(2)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_1^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_2 & \alpha_1^{(2)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_2^{(3)} = \pi i \\
\text{»} & a_3 & \alpha_1^{(2)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(2)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(2)} A_3^{(3)} = 0
\end{array}$$

u_3.

$$\begin{array}{ll|l|}
\text{Coupure } a_1 & & \alpha_1^{(3)} A_1^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_1^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_1^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_2 & \alpha_1^{(3)} A_2^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_2^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_2^{(3)} = 0 \\
\text{»} & a_3 & \alpha_1^{(3)} A_3^{(1)} + \alpha_2^{(3)} A_3^{(2)} + \alpha_3^{(3)} A_3^{(3)} = \pi i
\end{array}$$

ce qui est possible, vu que le déterminant

$$D = \Sigma \pm A_1^{(1)} A_2^{(2)} A_3^{(3)} < 0.$$

De ces équations on tire successivement

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\frac{2\pi(2-i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(1)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(2-i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(1-3i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi i \frac{1-3i}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(2)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(1-3i)}{20 K_3};$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\pi(3+i)}{20 K_1},$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(3)} \end{vmatrix} = -\pi \frac{(1-i)(3+i)}{20 K_2},$$

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{\pi i}{D} \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(1+i)(3+i)}{20 K_3}.$$

Par conséquent les intégrales normales sont maintenant

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\dfrac{w_1}{K_1} + \dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{w_3}{K_3}\right] \\ u_2 = \dfrac{\pi(1-3i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - i\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right] \\ u_3 = \dfrac{\pi(3+i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - (1-i)\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right] \end{cases}$$

Les modules a_{ik}.

Leur valeur est donnée par les équations

$$\begin{cases} a_{1h} = \dfrac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} + \dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{2h} = \dfrac{\pi(1-3i)}{20}\left[\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} - i\dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \\ a_{3h} = \dfrac{\pi(3+i)}{20}\left[\dfrac{B_h^{(1)}}{K_1} - (1-i)\dfrac{B_h^{(2)}}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{B_h^{(3)}}{K_3}\right], \quad h=1,2,3. \end{cases}$$

En effectuant ces calculs on trouve

$$a_{11} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{12} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{13} = \frac{1}{5}\pi(3+i),$$

$$a_{21} = -\frac{1}{5}\pi i(3+i), \quad a_{22} = -\frac{2}{5}\pi(2-i), \quad a_{23} = -\frac{1}{5}\pi(2-i),$$

$$a_{31} = \frac{1}{5}\pi(3+i), \quad a_{32} = -\frac{1}{5}\pi(2-i), \quad a_{33} = -\frac{2}{5}\pi(3+i).$$

D'une part on constate que $a_{ik} = a_{ki}$, comme cela doit être d'après un théorème démontré par Riemann. D'autre part, pour que les fonctions ϑ qu'on peut former avec ces modules, existent, il est nécessaire que la forme quadratique $\sum\limits_{i=1,2,3} \sum\limits_{k=1,2,3} \alpha_i \alpha_k a'_{ik}$, où α_i, α_k parcourent tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$ et a'_{ik} signifie la partie réelle du module a_{ik}, puisse être décomposée en une somme de trois carrés négatifs. A cet effet il suffit que l'on ait

$$a'_{11} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12} \\ a'_{21}, & a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11} = -\frac{4}{5}\pi, \qquad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \qquad \Delta = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \qquad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$