Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Calcul direct des tangentes doubles à la courbe s1+z1-1=0
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$a'_{11} < 0, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12} \\ a'_{21}, & a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Or, les valeurs ci-dessus donnent effectivement

$$a'_{11} = -\frac{4}{5}\pi, \qquad \delta = +\frac{3}{5}\pi^2, \qquad \Delta = -\frac{2}{5}\pi^3.$$

D'ailleurs on voit aisément qu'on peut écrire directement

$$\sum_i \sum_k \alpha_i \alpha_k a'_{ik} = -\pi \left[\frac{4}{5}(\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \frac{3}{4}\alpha_3)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}(\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3)^2 + \frac{2}{3}\alpha_3^2 \right].$$

Calcul direct des tangentes doubles à la courbe $s^4+z^4-1=0$.

Chaque fonction φ devient infiniment petite du premier ordre en quatre points de la surface T'. Il y en a 28 dont les zéros se confondent deux à deux. Les racines carrées de celles-ci ont été appelées par Riemann *fonctions abéliennes*. Ces 28 fonctions φ, égalées à zéro et interprétées géométriquement, représentent évidemment les tangentes doubles à la courbe $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Il est du plus haut intérêt pour la suite de les connaître. Le procédé suivant va les fournir avec la plus grande facilité.

En exprimant s et z en fonction d'une troisième variable t à l'aide des formules

$$z = \sqrt{\cos t}, \qquad s = \sqrt{\sin t},$$

l'équation

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0$$

est satisfaite identiquement pour chaque valeur de t. Mais il est avantageux d'introduire des coordonnées tangentielles u, v, moyennant les formules de transformation connues

$$u = -\frac{ds}{zds - sdz}, \quad v = \frac{dz}{zds - sdz}.$$

Il vient

$$u = -(\cos t)^{\frac{3}{2}}, \quad v = -(\sin t)^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de t entre ces deux équations conduit ensuite à l'équation en coordonnées tangentielles de la courbe (1), soit

$$v^{\frac{4}{3}} + u^{\frac{4}{3}} - 1 = 0$$

qui, rendue rationnelle, prend la forme

$$(u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0.$$

Or, les coordonnées u, v d'une tangente double satisfont simultanément aux trois équations

$$f = (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2u^3 + 4.27u^3v^4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 12(u^4 + v^4 - 1)^2v^3 + 4.27u^4v^3 = 0$$

ou en supprimant dans les deux dernières équations les facteurs $12u^3$, $12v^3$

$$\alpha) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^3 + 27u^4v^4 = 0,$$

$$\beta) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9v^4 = 0,$$

$$\gamma) \qquad (u^4 + v^4 - 1)^2 + 9u^4 = 0.$$

Les facteurs supprimés correspondent aux huit couples de racines

$$u = 0, \quad v = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i,$$

$$v = 0, \quad u = \sqrt[4]{1} = 1, -1, i, -i.$$

Par la comparaison des équations $\beta)$ et $\gamma)$ on trouve la relation $v^4 = u^4$ qui, introduite dans $\alpha)$ et $\beta)$, donne

$$(2u^4 - 1)^3 = -27u^8,$$
$$(2u^4 - 1)^2 = -9u^4,$$

d'où par division

$$2u^4 - 1 = 3u^4$$

ou encore

$$u^4 = -1.$$

Ainsi u peut aussi prendre les valeurs

$$u = e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = e^{-\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad u = -e^{-\frac{1}{4}\pi i}.$$

En combinant chacune d'elles avec les quatre valeurs correspondantes de v, on obtient 16 autres couples de racines.

Pour déterminer enfin les quatre derniers couples il suffit de diviser α) par v^{12}, β) et γ) par v^8 :

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^3 + \frac{27}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4} \qquad = 0,$$

$$\left[\left(\frac{u}{v}\right)^4 + 1 - \frac{1}{v^4}\right]^2 + \frac{9}{v^4}\left(\frac{u}{v}\right)^4 = 0$$

et l'on voit immédiatement que ces équations admettent les racines

$$v = \infty, \quad \frac{u}{v} = \pm\sqrt{\pm i}.$$

Si l'on pose pour abréger l'écriture

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \varepsilon, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \varepsilon',$$

de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon' = 1, \ \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -i, \ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = i, \ \frac{1}{\varepsilon'} = \varepsilon, \ \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon', \ \varepsilon^2 = i, \ \varepsilon'^2 = -i$$

on a maintenant les 28 couples de racines suivants

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc|}
u & 0, & 0, & 0, & 0 & 1, & -1, & i, & -i & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon, & -\varepsilon \\
v & 1, & -1, & i, & -i & 0, & 0, & 0, & 0 & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon', & \varepsilon' & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon', & -\varepsilon' \\
\varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon' & \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon', & -\varepsilon'
\end{array}$$

$$v = \infty \left| \frac{u}{v} = \varepsilon, \ \frac{u}{v} = -\varepsilon, \ \frac{u}{v} = \varepsilon', \ \frac{u}{v} = -\varepsilon' \right|$$

En les substituant à tour de rôle dans l'équation

$$uz + vs + 1 = 0,$$

modifiée pour plus d'uniformité en

$$s + \frac{u}{v}z + \frac{1}{v} = 0,$$

on a finalement pour les 28 tangentes doubles à la courbe (1) les équations en coordonnées ponctuelles

$s+1=0$	$z+1=0$	$s+z+\varepsilon'=0$	$s-z+\varepsilon'=0$
$s-1=0$	$z-1=0$	$s-z-\varepsilon'=0$	$s+z-\varepsilon'=0$
$s-i=0$	$z-i=0$	$s+iz+\varepsilon=0$	$s-iz+\varepsilon=0$
$s+i=0$	$z+i=0$	$s-iz-\varepsilon=0$	$s+iz-\varepsilon=0$

$s-iz+\varepsilon'=0$	$s+iz+\varepsilon'=0$	$s+\varepsilon z=0$
$s+iz-\varepsilon'=0$	$s-iz-\varepsilon'=0$	$s-\varepsilon z=0$
$s+z+\varepsilon=0$	$s-z+\varepsilon=0$	$s+\varepsilon' z=0$
$s-z-\varepsilon=0$	$s+z-\varepsilon=0$	$s-\varepsilon' z=0$

Points de contact des tangentes doubles.

Dans la suite, on aura plus d'une fois besoin de connaître les points de contact des tangentes doubles, soit les zéros des fonctions abéliennes. Douze des 28 tangentes doubles dans l'exemple choisi présentent cette particularité que leurs deux points de contact se confondent, en sorte qu'elles forment un contact du 3e ordre avec la courbe $s^4+z^4-1=0$. Ce sont les suivantes :

Tangente.	Point de contact.	Nappe.
$s+1=0$	$z=0,\quad s=-1$	III
$s-1=0$	$z=0,\quad s=1$	I
$s-i=0$	$z=0,\quad s=i$	II
$s+i=0$	$z=0,\quad s=-i$	IV
$z+1=0$	$z=-1,\quad s=0$	Ds toutes les 4.
$z-1=0$	$z=1,\quad s=0$	
$z-i=0$	$z=i,\quad s=0$	
$z+i=0$	$z=-i,\quad s=0$	
$s+\varepsilon z=0$	A l'infini ds la direction $-135°$	III
$s-\varepsilon z=0$	» » $45°$	I
$s+\varepsilon' z=0$	» » $+135°$	II
$s-\varepsilon' z=0$	» » $-45°$	IV