Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Valeur numériwue de K1
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1.$$

Valeur numérique de K_1.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2}\, f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2}\, f(a_2, b_2, \varphi_2) = \ldots$$
$$= \frac{1}{2^n}\, f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . . . .

Le calcul doit être poussé jusqu'à ce que $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$. Alors, si l'on écrit encore $\lim \left(\frac{\varphi_n}{2^n}\right) = \Phi$ et $\lim a_n = \lim b_n = A$, on a $f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{A}$. Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, Φ est évidemment aussi $= \frac{1}{2}\pi$ et par conséquent

$$f(a, b\,\frac{1}{2}\,\pi) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{A}.$$

Or, dans le cas actuel,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}},$$

où

$$a = \sqrt{2} = 1,41421356, \quad b = 1,$$

on trouve successivement

$$a_1 = 1,20710678, \quad b_1 = 1,18920722,$$
$$a_2 = 1,19815695, \quad b_2 = 1,19812352,$$
$$a_3 = 1,19814023, \quad b_3 = 1,19814023.$$

Il s'ensuit

$$A = 1{,}19814023, \quad K_1 = \frac{1}{2}\pi . \sqrt{2} . 0{,}83462684 = 1{,}85407468.$$

Il est intéressant de constater que les sommes

$$W_h = \int_0^{\alpha} dw_h + \int_0^{\beta} dw_h,$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque, s'expriment d'une manière très simple au moyen des

quantités K_1, K_2, K_3. A cet effet, et afin de faciliter le contrôle des calculs par la vue, on opérera la représentation du cercle des unités à l'aide des intégrales w_1, w_2, w_3. Pour mieux distinguer les différentes nappes, on tracera chaque dessin quatre fois. Dans les fig. $12^a \ldots 12^m$, pl. X, les chiffres ± 1, $\pm i$ se rapportent aux points correspondants de la surface (z). Le cercle des unités entre successivement dans chacune des quatre nappes. Si l'on exigeait que le point z restât constamment dans la même nappe, il faudrait faire intervenir les modules de périodicité des intégrales w_h; mais il n'y a aucune utilité de procéder de cette façon.

Zéros de $\sqrt{g^\circ}$.

Soit à déterminer

$$W_1 = \int_{\substack{0\\ \mathrm{III}}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_1 + \int_{\substack{0\\ \mathrm{II}}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_1.$$

En soumettant l'intégrale w_1 à la transformation $\zeta = \varepsilon \frac{z}{s}$, on obtient l'intégrale indéfinie $\varepsilon' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$ (comp. p. 141). Dans le calcul des limites de ζ, on se servira des valeurs de s qui correspondent à $z = e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3me nappe et à $z = e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2me nappe.

On trouve

$$\underset{\mathrm{III}}{z} = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ s = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{7}{12}\pi i + \frac{1}{12}\pi i} = e^{\frac{11}{12}\pi i}$$ (Voir les fig. 2 et 3.)

$$\underset{\mathrm{II}}{z} = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ s = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{12}\pi i - \frac{7}{12}\pi i} = e^{-\frac{5}{12}\pi i}.$$

Si l'on admet, en outre, que $\sqrt{1-\zeta^4} = +1$ pour $\zeta = 0$, le signe de $\sqrt{1-\zeta^4}$ dépend de la relation

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Or, lorsque z se meut de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2me nappe, s va de i à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, s^2 de -1 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Sur ce parcours, la partie réelle

de s^2 est négative; il s'ensuit que, dans la 2me des intégrales proposées, $\sqrt{1-\zeta^4}$ affecte le signe $(-)$. Ainsi, il vient

$$W_1 = \varepsilon'\left[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} - \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}\right] =$$

$$= \varepsilon'\left[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}\right].$$

Grâce au théorème de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce, à savoir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} =$$

$$= \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

où

$$c = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

on peut réduire cette somme à une seule intégrale. Dans le cas actuel

$$k^2 = -1,\ x = e^{\frac{11}{12}\pi i},\ y = e^{\frac{7}{12}\pi i},$$

$$c = \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{7}{3}\pi i}} + e^{\frac{7}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{11}{3}\pi i}}}{1+e^{\frac{11}{6}\pi i}e^{\frac{7}{6}\pi i}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}e^{-\frac{1}{6}\pi i} + e^{\frac{7}{12}\pi i}e^{\frac{1}{6}\pi i}}{1-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i} + e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0} = 2\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0},$$

en sorte que

$$W_1 = \varepsilon' \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Substituant encore $\zeta = -\varepsilon' t$, il vient finalement

$$W_1 = \varepsilon'(-\varepsilon')\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = i\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = iK_1.$$

Observation. Dans le calcul de c, on choisira celle des deux valeurs de $\sqrt{1-e^x}$ dont la partie réelle est positive.

Soit à déterminer

$$W_2 = \int_{\mathrm{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}}{}_0\, dw_2 + \int_{\mathrm{II}}^{e^{-\frac{1}{24}\pi i}}{}_0\, dw_2.$$

Si l'on introduit s comme variable, on obtient l'intégrale indéfinie

$$w_2 = -\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}. \text{ (Comp. p. 146.)}$$

Les limites de s se trouvent comme dans le cas précédent et la relation

$$z^2 = \sqrt{1-s^4}$$

montre que, lorsque z se meut de 0 à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, z^2 de 0 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $\sqrt{1-s^4}$ prend le signe $(-)$.

Il s'ensuit

$$W_2 = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} - \int_i^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} =$$

$$= \int_0^1 + \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{-i} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_0^1 - \int_0^{-i} =$$

$$= \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - K_2 + iK_2.$$

L'application du théorème de l'addition aux deux premières intégrales donne

$$\int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \varepsilon' K_1,$$

ensorte que

$$W_2 = -K_2 + iK_2 + \varepsilon' K_1 = -(1-i)\frac{K_1}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}K_1 = 0.$$

Enfin, quant à la somme

$$W_3 = \int_{0\,\mathrm{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_3 + \int_{0\,\mathrm{II}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_3,$$

on remarque d'abord que dans la 2e nappe, le long de l'intervalle rectiligne de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$, le radical $\sqrt{1-z^4}$ affecte le signe $(-)$. Par conséquent

$$W_3 = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} - \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Ensuite le théorème de l'addition fournit

$$W_3 = \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} =$$

$$= -\varepsilon' K_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{2}K_3 = -(1-i)K_3.$$

Les valeurs de W_1, W_2, W_3 relatives aux zéros de $\sqrt{g^\circ}$ une fois établies par le calcul direct qui vient d'être fait, les fig. 12a ... 12m permettent de reconnaître immédiatement l'exactitude des résultats suivants :

$$\begin{aligned}
W_1 &= iK_1 \text{ pour les zéros de } \sqrt{g^\circ}, \sqrt{g}, \sqrt{\gamma^\circ_2}, \sqrt{\gamma_2} \\
&= -K_1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{g'}, \sqrt{g''}, \sqrt{\gamma'_3}, \sqrt{\gamma''_3} \\
&= -iK_1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{\gamma_1^\circ}, \sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma^\circ_3}, \sqrt{\gamma_3} \\
&= K_1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{\gamma'_1}, \sqrt{\gamma''_1}, \sqrt{\gamma'_2}, \sqrt{\gamma''_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3 &= -(1-i)K_3 \text{ pour les zéros de } \sqrt{g^\circ}, \sqrt{g''}, \sqrt{\gamma^\circ_1}, \sqrt{\gamma''_1} \\
&= (1-i)K_3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{g}, \sqrt{g'}, \sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma'_1} \\
&= -(1+i)K_3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{\gamma^\circ_2}, \sqrt{\gamma'_2}, \sqrt{\gamma^\circ_3}, \sqrt{\gamma'_3} \\
&= (1+i)K_3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ \sqrt{\gamma_2}, \sqrt{\gamma''_2}, \sqrt{\gamma_3}, \sqrt{\gamma''_3}
\end{aligned}$$

et $W_2 = 0$ pour les zéros de toutes ces 16 fonctions abéliennes.

Seules les intégrales relatives aux zéros des fonctions $\sqrt{\xi_5}$, $\sqrt{\xi_6}$, $\sqrt{x_5}$, $\sqrt{x_6}$ ne peuvent être traitées de cette manière sommaire. Elles ne présentent d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Zéros de $\sqrt{\xi_5}$.

Soit à déterminer

$$a) \qquad \frac{1}{2}W_1 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

(On se souvient que les zéros de chacune des fonctions $\sqrt{\xi_5}$, $\sqrt{\xi_6}$, $\sqrt{x_5}$, $\sqrt{x_6}$ se confondent). Réduisant d'abord à la 1re nappe, il vient

$$\frac{1}{2}W_1 = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = i\varepsilon'\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}};$$

posant ensuite

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

cette intégrale prend la forme

$$i\varepsilon'\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}},$$

ensorte que

$$\frac{1}{2}W_1 = i\varepsilon' K_5 = \varepsilon K_5 = \frac{1+i}{2}K_1.$$

$$b) \frac{1}{2}W_2 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -\int_0^{\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}}$$

Substituant

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}$$

on obtient $$\frac{1}{2}W_2 = -\int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

$$c)\quad \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{II}\,0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon'\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$
$$= \varepsilon' K_1 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément :

Pour les zéros de $\sqrt{\xi_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_5}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_1 = \frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_3 = (1+i)K_3.$$

Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\dfrac{w_1}{K_1} + \dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{w_3}{K_3}\right], \\ u_2 = \dfrac{\pi(1-3i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - i\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right], \\ u_3 = \dfrac{\pi(3+i)}{20}\left[\dfrac{w_1}{K_1} - (1-i)\dfrac{w_2}{K_2} + \dfrac{1+i}{2}\dfrac{w_3}{K_3}\right] \end{cases}$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le