

# Valeur numérique de quelques intégrales normales

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **25.05.2024**

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

on obtient  $\frac{1}{2}W_2 = -\int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$

c)  $\frac{1}{2}W_3 = \int_{II}^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\int_0^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = \varepsilon' K_4 = (1-i)K_5.$

D'une manière analogue, on trouve aisément :

Pour les zéros de  $\sqrt{\xi_6}$ :  $\frac{1}{2}W_4 = \int_I^\infty dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_4,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_I^\infty dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_5 = \int_I^\infty dw_5 = -(1+i)K_5.$$

Pour les zéros de  $\sqrt{x_5}$ :  $\frac{1}{2}W_4 = \int_{IV}^\infty dw_4 = -\frac{1+i}{2}K_4,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{IV}^\infty dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_5 = \int_{IV}^\infty dw_5 = -(1-i)K_5.$$

Pour les zéros de  $\sqrt{x_6}$ :  $\frac{1}{2}W_4 = \int_{III}^{-\varepsilon \infty} dw_4 = -\frac{1-i}{2}K_4,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{III}^{-\varepsilon \infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_5 = \int_{III}^{-\varepsilon \infty} dw_5 = (1+i)K_5.$$


---

### Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\pi(2-i)}{20} \left[ -2 \frac{w_1}{K_4} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_5}{K_5} \right], \\ u_2 = \frac{\pi(1-3i)}{20} \left[ \frac{w_1}{K_1} - i \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_5}{K_5} \right], \\ u_3 = \frac{\pi(3+i)}{20} \left[ \frac{w_1}{K_1} - (1-i) \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_5}{K_5} \right] \end{array} \right.$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le

tableau suivant, ne contenant que celles des intégrales dont il sera fait usage ultérieurement :

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(+)}$	$\int_0^1 du_2^{(+)}$	$\int_0^1 du_3^{(+)}$
I	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$
II	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
III	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$

  

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(-)}$	$\int_0^1 du_2^{(-)}$	$\int_0^1 du_3^{(-)}$
I	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
II	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
III	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de réunir aussi dans un tableau les valeurs numériques des sommes  $U_h$  qui sont aux intégrales  $u_h$  ce qu'étaient les  $W_h$  aux intégrales  $w_h$ . Dans ce tableau, les intégrales qui se trouvent sur une ligne horizontale ont pour limites supérieures les zéros de la fonction abélienne placée en tête de cette même ligne. Par exemple dans la pre-

mière ligne  $U_h$  signifie  $\int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_h + \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_h$ , dans la deuxième

$$U_h = \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h, \text{ etc.}$$

	$U_1$	$U_2$	$U_3$
$\sqrt{g^o}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{g}$	$-\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{g'}$	$\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{g''}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma^o}_1$	$\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma}_1$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma'}_1$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma''}_1$	$-\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{\gamma^o}_2$	$-\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma}_2$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma'}_2$	$-\frac{\pi}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''}_2$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma^o}_3$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma}_3$	$\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma'}_3$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''}_3$	$\frac{\pi}{20}(7-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\xi}_5$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{3}{10}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(8+i)$
$\sqrt{\xi}_6$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(4+3i)$
$\sqrt{x}_5$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$-\frac{\pi i}{2}$
$\sqrt{x}_6$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la sait-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left( \int_{\alpha}^{\alpha'} du_h + \int_{\beta}^{\beta'} du_h \right) = \left( \frac{1}{2} \omega_1, \frac{1}{2} \omega_2, \frac{1}{2} \omega_3 \right),$$

où  $\alpha, \beta$  sont les zéros d'une fonction abélienne  $\sqrt{x}, \alpha', \beta'$  les zéros d'une autre fonction abélienne  $\sqrt{x'}$  et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  un système de périodes à la caractéristique  $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$ .

### Vérification pour $\sqrt{g^\circ} \sqrt{g}$ .

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g}) = (100) + (011) = (111),$$

$$\frac{1}{2} \omega_1 = \frac{1}{2} a_{11} + \frac{1}{2} a_{12} + \frac{1}{2} a_{13} = -\frac{1}{5} \pi (2-i) -$$

$$-\frac{\pi i}{10} (3+i) + \frac{1}{10} \pi (3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2} \omega_2 = \frac{1}{2} a_{21} + \frac{1}{2} a_{22} + \frac{1}{2} a_{23} + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{10} \pi i (3+i) -$$

$$-\frac{2}{10} \pi (2-i) - \frac{1}{10} \pi (2-i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i$$

$$\frac{1}{2} \omega_3 = \frac{1}{2} a_{31} + \frac{1}{2} a_{32} + \frac{1}{2} a_{33} + \frac{1}{2} \pi i = \frac{1}{10} \pi (3+i) -$$

$$-\frac{1}{10} \pi (2-i) - \frac{2}{10} \pi (3+i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i$$

et

$$V_h = \int_{III}^{III} e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_h + \int_{II}^{II} e^{\frac{11}{12}\pi i} du_h.$$