Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Détermination[s]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1\sqrt{x_1\xi_1} + a_2\sqrt{x_2\xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2d degré et du 2d ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1\xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^0_1, c^0_2, c^0_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^0_1, c^0_2, c^0_3. On peut le trouver de la manière suivante :

On choisira pour $\sqrt{q}$ la fonction $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$, en sorte que les intégrales qui entrent comme arguments dans les fonctions ϑ ont toutes pour limite inférieure le point $z=0$, $s=1$. Ensuite on établira le groupe

$$(\sqrt{q}) = (\sqrt{x_1}) = \binom{100}{100} = \underbrace{\binom{010}{110}}_{\xi_3} + \underbrace{\binom{110}{010}}_{\xi_5} = \underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^0_2} + \underbrace{\binom{110}{011}}_{\gamma'_1} = \underbrace{\binom{001}{101}}_{x_3} + \underbrace{\binom{101}{001}}_{x_5} =$$

$$= \underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^0_1} + \underbrace{\binom{101}{}}_{\gamma'_2} = \underbrace{\binom{111}{010}}_{\gamma''_3} + \underbrace{\binom{011}{110}}_{g} = \underbrace{\binom{111}{001}}_{g''} + \underbrace{\binom{011}{101}}_{\gamma_3}$$

On peut alors poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_5} + a\sqrt{\xi_3 \xi_5}$$

à la condition que l'équation

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_5 \xi_5} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0$$

soit identique, à un facteur constant près, à $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Or, on voit aisément qu'à cet effet il suffit d'admettre

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad s-1, & x_3 &= z-i, & x_5 &= s-\varepsilon' z, \\ \xi_1 &= -\varepsilon'(s+1), & \xi_3 &= \varepsilon(z+i), & \xi_5 &= \varepsilon(s+\varepsilon' z) \end{aligned}$$

et en conséquence

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{(z-i)(s-\varepsilon' z)} + a\sqrt{i(z+i)(s+\varepsilon' z)}.$$

Afin de pouvoir utiliser directement les formules finales de M. W. (p. 118 et 119), à savoir :

$$(1) \qquad x_1 - \lambda\xi_2 = 0, \quad x_2 - \lambda\xi_1 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2 \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 - x_3\xi_3 \end{cases}$$

on remplacera $\quad x_1, \quad x_2, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad x_3, \quad \xi_3$

par $\quad x_3, \quad x_5, \quad \xi_3, \quad \xi_5, \quad \xi_1, \quad x_1.$

Par là, ces équations prennent la forme

$$(1^a) \qquad \begin{cases} x_3 - \lambda\xi_3 = z - i \quad - \lambda\varepsilon(s+\varepsilon' z) = 0 \\ x_5 - \lambda\xi_5 = s - \varepsilon' z - \lambda\varepsilon(z+i) \quad = 0 \\ \qquad x_1 = s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2^a) \qquad \begin{cases} x_3 x_5 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_5 \\ 2\lambda'' \xi_3 \xi_5 = x_3\xi_3 + x_5\xi_5 - x_1\xi_1. \end{cases}$$

Les équations (1^a) déterminent les deux valeurs de λ, λ' et λ'' qui correspondent aux zéros de $\sqrt{x_1}$. Mais dans le cas actuel ces deux valeurs sont égales; par conséquent l'élimination de s et z entre ces trois équations devient superflue. En effet, en faisant $z = 0$, $s = 1$ dans l'équation

$$z - i - \lambda\varepsilon(s + \varepsilon' z) = 0,$$

on en tire

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = -\frac{i}{\varepsilon} = -\varepsilon.$$

La valeur de λ'' introduite dans (2^a), ces équations deviennent

$$(3) \qquad z(s + \varepsilon) = 0,$$

$$(4) \qquad \sqrt{2}s^2 - 2\varepsilon' sz + i\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)z^2 - 2\varepsilon s - 2z + i\sqrt{2} = 0.$$

Géométriquement, l'équation (3) représente deux lignes droites et l'équation (4) une conique. Les coordonnées de leurs points d'intersection sont les valeurs cherchées. En rejetant la solution $z = 0$, $s = 1$, on trouve aisément

$$c^\circ_1 : z = \quad i\sqrt[4]{2},\ s = -\varepsilon, \text{ nappe III},$$

$$c^\circ_2 : z = -i\sqrt[4]{2},\ s = -\varepsilon, \quad » \quad \text{IV},$$

$$c^\circ_3 : z = 0, \qquad s = i, \quad » \quad \text{II}.$$

Détermination de quelques autres systèmes c_1, c_2, c_3.

Il ne peut pas être question ici de déterminer tous les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3. Quelques exemples suffiront, et on donnera la préférence à ceux qui n'exigent pas des calculs trop compliqués. D'ailleurs, le procédé employé étant toujours le même, les calculs suivants peuvent se passer de commentaire.

$$\vartheta_{\binom{100}{000}}\left(\int_0^{\zeta} du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\omega) = \binom{100}{000},\ (\sqrt{q}) = \binom{100}{100},\ (\sqrt{\varphi}) = (\omega) + (\sqrt{q}) = \binom{000}{100}.$$

Le groupe

$$\binom{000}{100} = \frac{\binom{010}{010}}{\xi_6} + \frac{\binom{010}{110}}{\xi_3} = \frac{\binom{010}{011}}{\gamma''_1} + \frac{\binom{010}{111}}{\gamma^\circ_2} = \frac{\binom{001}{001}}{x_6} + \frac{\binom{001}{101}}{x_3} = \frac{\binom{001}{011}}{\gamma''_2} +$$

$$+ \frac{\binom{001}{111}}{\gamma^\circ_1} = \frac{\binom{011}{010}}{\gamma'_3} + \frac{\binom{011}{110}}{g} = \frac{\binom{011}{001}}{g'} + \frac{\binom{011}{101}}{\gamma_3}$$

permet de poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_6} + a\sqrt{\xi_3 \xi_6},$$

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

où

$$x_3 = z - i, \qquad x_6 = s + \varepsilon z, \qquad x_1 = s - 1,$$

$$\xi_3 = \varepsilon'(z+i), \quad \xi_6 = \varepsilon'(s - \varepsilon z), \quad \xi_1 = -\varepsilon(s+1).$$

Les trois équations de M. W.

$$x_1 - \lambda \xi_2 = 0, \quad \begin{cases} x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2, \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3 \end{cases}$$

deviennent

$$x_3 - \lambda \xi_6 = z - i - \lambda \varepsilon'(s - \varepsilon z) = 0,$$

$$x_3 x_6 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_6,$$

$$2\lambda'' \xi_3 \xi_6 = x_3 \xi_3 + x_6 \xi_6 - x_1 \xi_1.$$

De la première on tire pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda' = \lambda'' = a = \varepsilon'$$

et les deux autres, après simplification, prennent la forme

$$z(s + \varepsilon') = 0,$$

$$(1+i)s^2 + 2isz + (1 - i + 2\varepsilon')z^2 - 2s + 2\varepsilon z + 1 - i = 0.$$

En les résolvant on obtient

$$c_1 : z = 0, \qquad s = -i, \quad \text{nappe IV},$$

$$c_2 : z = i\sqrt[4]{2}, \; s = -\varepsilon', \quad \text{»} \quad \text{I},$$

$$c_3 : z = -i\sqrt[4]{2}, \; s = -\varepsilon', \quad \text{»} \quad \text{III}.$$

$$\vartheta_{\binom{010}{101}}\left(\int_0^{\zeta} du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{010}{101} = \binom{110}{001},$$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_2 x_3} + a\sqrt{\xi_2 \xi_3},$$

$$\sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

$$x_1 = s-1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(z+1), \quad x_3 = -\frac{1}{2}(z-i),$$

$$\xi_1 = s+1, \quad \xi_2 = z-1, \quad \xi_3 = z+i.$$

L'équation

$$x_2 - \lambda \xi_3 = \frac{1}{2}(z+1) - \lambda(z+i) = 0$$

donne pour $z = 0$,

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = -\frac{1}{2}i$$

et des équations

$$0.z^2 + 2(1-i)z = 0$$

$$s^2 - iz^2 + (1+i)z - 1 = 0$$

on tire

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \quad \text{nappe III},$$

$$c_2 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = \varepsilon, \quad \text{»} \quad \text{I},$$

$$c_3 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = -\varepsilon, \quad \text{»} \quad \text{III}.$$

$$\vartheta_{\binom{011}{111}}\left(\int_0^{\zeta} du_h\right).$$

Ici $\quad (\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{011}{111} = \binom{111}{011},$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_5 \xi_6} + a\sqrt{x_6 \xi_5},$$

$$\sqrt{x_5 \xi_5} + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

$$x_5 = s - \varepsilon' z, \quad x_6 = s + \varepsilon z, \quad x_1 = s-1,$$

$$\xi_5 = \frac{1}{2}i(s+\varepsilon' z), \quad \xi_6 = \frac{1}{2}i(s-\varepsilon z), \quad \xi_1 = i(s+1).$$

L'équation

$$x_5 - \lambda x_6 = s - \varepsilon' z - \lambda(s + \varepsilon z) = 0$$

fournit pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1$$

et les deux équations

$$sz = 0,$$
$$s^2 + \sqrt{2}sz + z^2 - 1 = 0,$$

donnent

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \quad \text{nappe III},$$
$$\left.\begin{array}{l} c_2 : z = 1, \quad s = \quad 0 \\ c_3 : z = -1, \; s = \quad 0 \end{array}\right\} \text{toutes les quatre nappes.}$$

$$\vartheta_{\binom{101}{101}}\left(\int_0^{\varsigma} du_h\right).$$

Dans ce cas on a

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{101}{101} = \binom{001}{001},$$
$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_4\xi_2} + a\sqrt{x_2\xi_4},$$
$$\sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_4\xi_4} + \sqrt{x_1\xi_1} = 0,$$
$$x_2 = z + 1; \quad x_4 = s + i, \qquad x_1 = s - 1,$$
$$\xi_2 = z - 1, \quad \xi_4 = -\frac{1}{2}(s - i), \quad \xi_1 = \frac{1}{2}(s + 1).$$

De l'équation

$$x_4 - \lambda x_2 = s + i - \lambda(z + 1) = 0$$

il suit pour $z = 0$, $s = 1$:

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1 + i.$$

Les deux coniques deviennent

$$sz + is + z - i = 0,$$
$$s^2 - (1 + i)sz - z^2 - (1 + i)s - (1 - i)z + i = 0.$$

Elles se coupent au point $z=0$, $s=1$ et en outre dans les trois points

$$c_1 : z = i, \qquad s = 0 \text{ dans les 4 nappes},$$

$$c_2 : z = \frac{-i+\sqrt{7}}{2}, \; s = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \text{ nappe II},$$

$$c_3 : z = \frac{-i-\sqrt{7}}{2}, \; s = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{»} \quad \text{I}.$$

$$\vartheta_{\binom{001}{110}}\left(\int_0^s du_h\right).$$

Ici $$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{001}{110} = \binom{101}{010},$$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_2\xi_3} + a\sqrt{x_3\xi_2},$$

$$\sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} + \sqrt{x_1\xi_1} = 0,$$

$$x_2 = z+1, \qquad x_3 = z-i, \qquad x_1 = s-1,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(z-1), \quad \xi_3 = -\frac{1}{2}(z+i), \quad \xi_1 = s+1.$$

De l'équation

$$x_2 - \lambda x_3 = z+1-\lambda(z-i) = 0$$

on tire pour $z=0$

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = i$$

et les coniques

$$0 . z^2 + 2(1+i)z = 0,$$

$$s^2 + iz^2 + (1-i)z - 1 = 0$$

se coupent bien en $z=0$, $s=1$ et de plus en

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \text{ nappe III},$$

$$c_2 : z = \infty, \; \frac{s}{z} = \quad \varepsilon', \qquad \text{»} \quad \text{IV},$$

$$c_3 : z = \infty, \; \frac{s}{z} = -\varepsilon', \qquad \text{»} \quad \text{II}.$$