

Le problème de Riemann

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le problème de Riemann.

Au sujet de ce problème fondamental, M. Weber (p. 159 à 168), indique dans tous leurs détails les calculs nécessaires. En les suivant pas à pas, on arrivera sans difficulté aux résultats désirés. Au lieu d'une traduction à peu près littérale de cette partie de l'ouvrage de M. W., il sera plus utile de donner ici une application des formules trouvées à des cas particuliers en n'insistant que sur le commencement de la solution.

I. Les deux caractéristiques (k) et (k') sont paires.

Soit par exemple

$$(k) = \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad (k) + (k') = (\sqrt{x_1}) + (\sqrt{x_2}).$$

En formant les deux groupes

$$\begin{aligned} (k) + (k') &= \begin{pmatrix} 011 \\ 000 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}}{x_1} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 100 \end{pmatrix}}{x_2} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_2} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_1} = \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma''_1} + \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma''_2} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma''_2} + \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma''_1} = \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 100 \end{pmatrix}}{\gamma_2} + \frac{\begin{pmatrix} 110 \\ 100 \end{pmatrix}}{\gamma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma'_2} + \frac{\begin{pmatrix} 110 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma'_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k) + (\sqrt{x_1}) &= \begin{pmatrix} 110 \\ 000 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}}{\gamma^o_3} + \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix}}{\xi_3} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_2} + \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma^o_2} = \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 001 \end{pmatrix}}{x_6} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 001 \end{pmatrix}}{g''} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma^o_1} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_1} = \frac{\begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix}}{g'} + \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 001 \end{pmatrix}}{x_5} = \frac{\begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix}}{g} + \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix}}{x_4} \end{aligned}$$

on remarque qu'ils possèdent les 4 caractéristiques communes

$$(\sqrt{y_1}) = (\sqrt{\xi_1}) = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}, \quad (\sqrt{y_2}) = (\sqrt{\xi_2}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix},$$

$$(\sqrt{z_1}) = (\sqrt{\gamma^o_1}) = \begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}, \quad (\sqrt{z_2}) = (\sqrt{\gamma^o_2}) = \begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}.$$

Posant, en conséquence,

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{s+1},$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{s-z+\varepsilon}, \quad \sqrt{z_2} = \sqrt{s-z+\varepsilon'},$$

on trouve aisément la formule

$$\sqrt{\frac{\chi_{(040)}^{(040)}}{\chi_{(001)}^{(001)}}} = \frac{\vartheta_{(001)}^{(040)}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{(001)}^{(010)}(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{-1} \cdot \frac{\vartheta_{(010)}^{(040)}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{(001)}^{(001)}(v_1, v_2, v_3)}$$

Désignant par $x_i^{(s)}, y_i^{(s)}, z_i^{(s)}$ les valeurs que prennent les fonctions x_i, y_i, z_i pour $\zeta = \zeta_s$, soit $s = s_1, z = z_1$, on a ici

$$\begin{aligned} & \sqrt{\chi_{(040)}^{(040)}} = \\ & = \Sigma \pm \sqrt{x_1 y_1 z_1}, \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}, \\ & \sqrt{\chi_{(001)}^{(001)}} = \end{aligned}$$

$$= \Sigma \pm \sqrt{x_2 y_2 z_2}, \sqrt{x_2^{(1)} y_4^{(1)} z_4^{(1)}}, \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_4^{(2)}}, \sqrt{x_1^{(3)} y_4^{(3)} z_2^{(3)}},$$

et les arguments v_1, v_2, v_3 sont déterminés par la congruence

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv (h \left(\int_{\alpha}^{\zeta} du_h + \int_{\beta}^{\zeta_1} du_h + \int_{\alpha}^{\zeta_2} du_h + \int_{\beta}^{\zeta_3} du_h \right)),$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque.

II. Les caractéristiques (k) et (k') sont impaires.

Soit

$$(k) = (\sqrt{z_1}) = (\sqrt{\gamma_1^0}) = (001), \quad (k') = (\sqrt{z_2}) = (\sqrt{\gamma_2^0}) = (010).$$

Alors on a

$$(\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}) = (k) + (k') = (011)$$

et les caractéristiques

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (k) + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k_1) = (001) + (100) + (111) = (040),$$

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_2}) = (k') + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k'_1) = (040) + (100) + (111) = (001),$$

sont paires. En admettant encore, comme dans le cas précédent,

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_1} = \sqrt{s+\epsilon},$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma_1^0} = \sqrt{s-z+\epsilon},$$

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{\gamma_2^0} = \sqrt{s-z+\epsilon'},$$

Fig. 1.

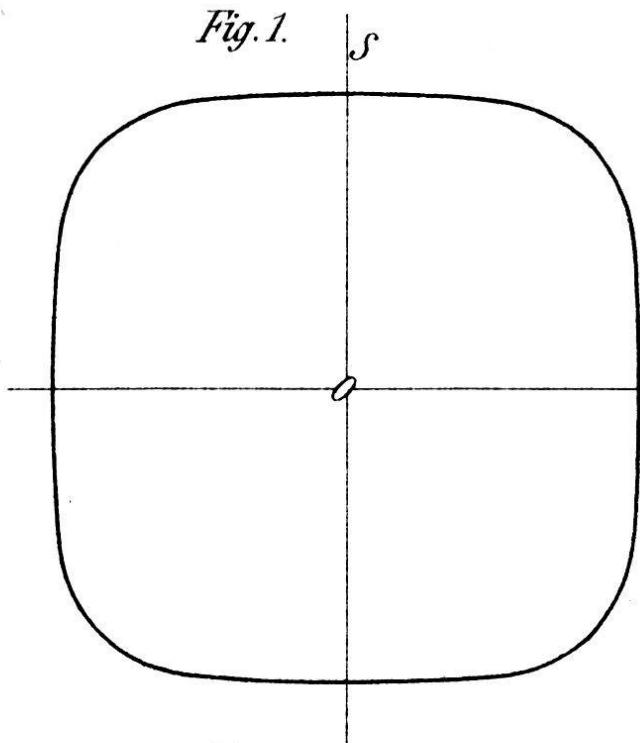


Fig. 6.

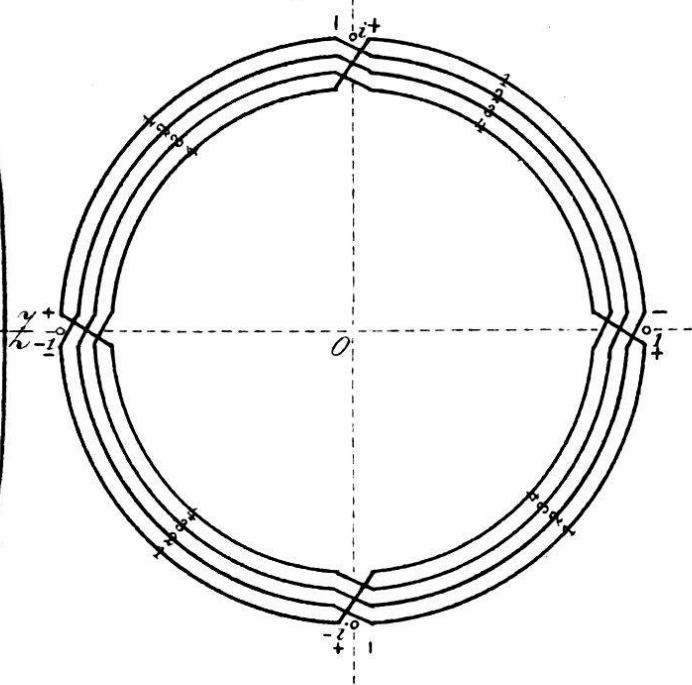


Fig. 4.

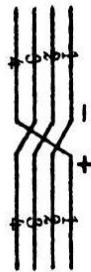


Fig. 5.

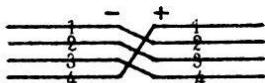


Fig. 7.

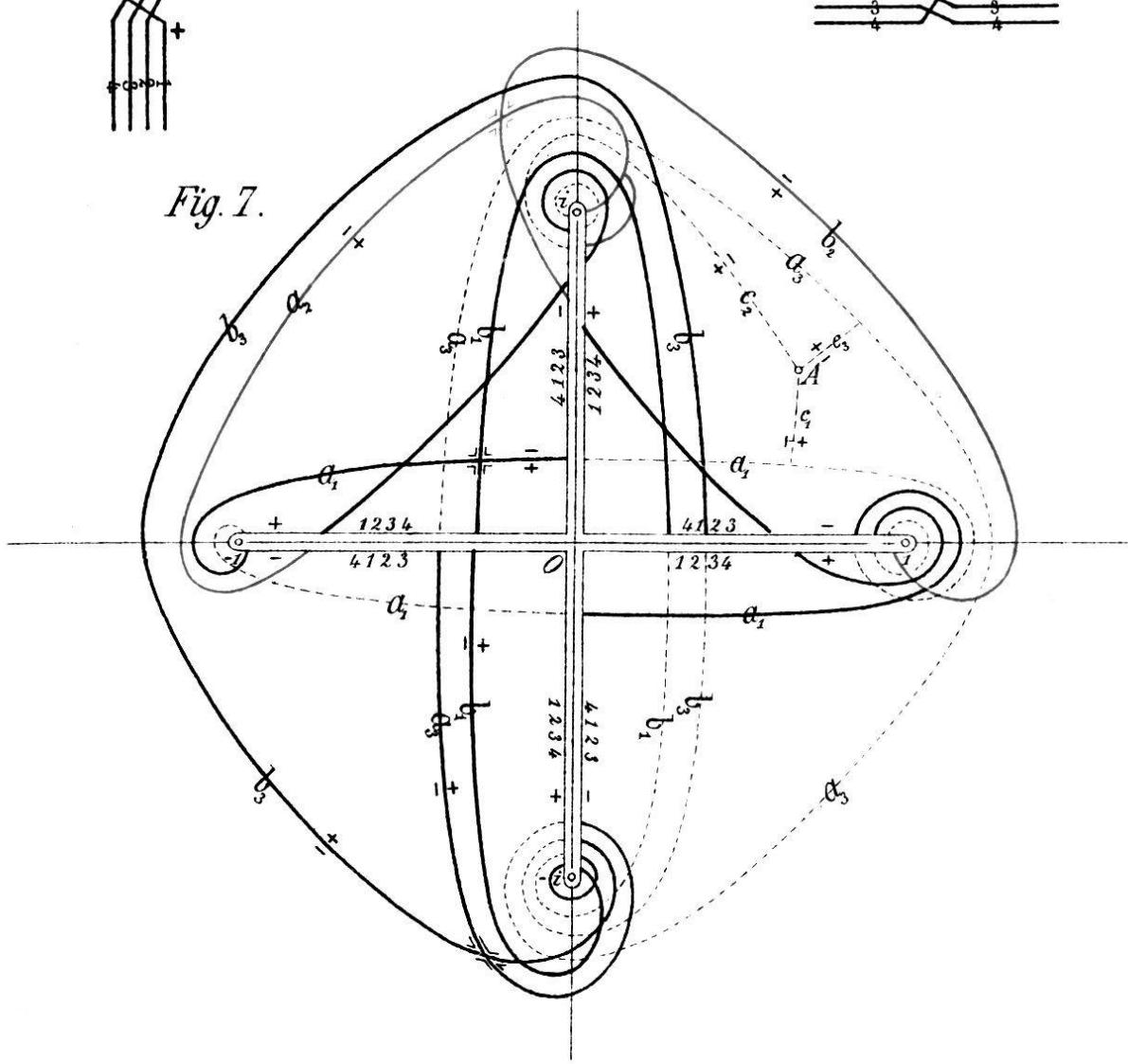


Fig. 2.

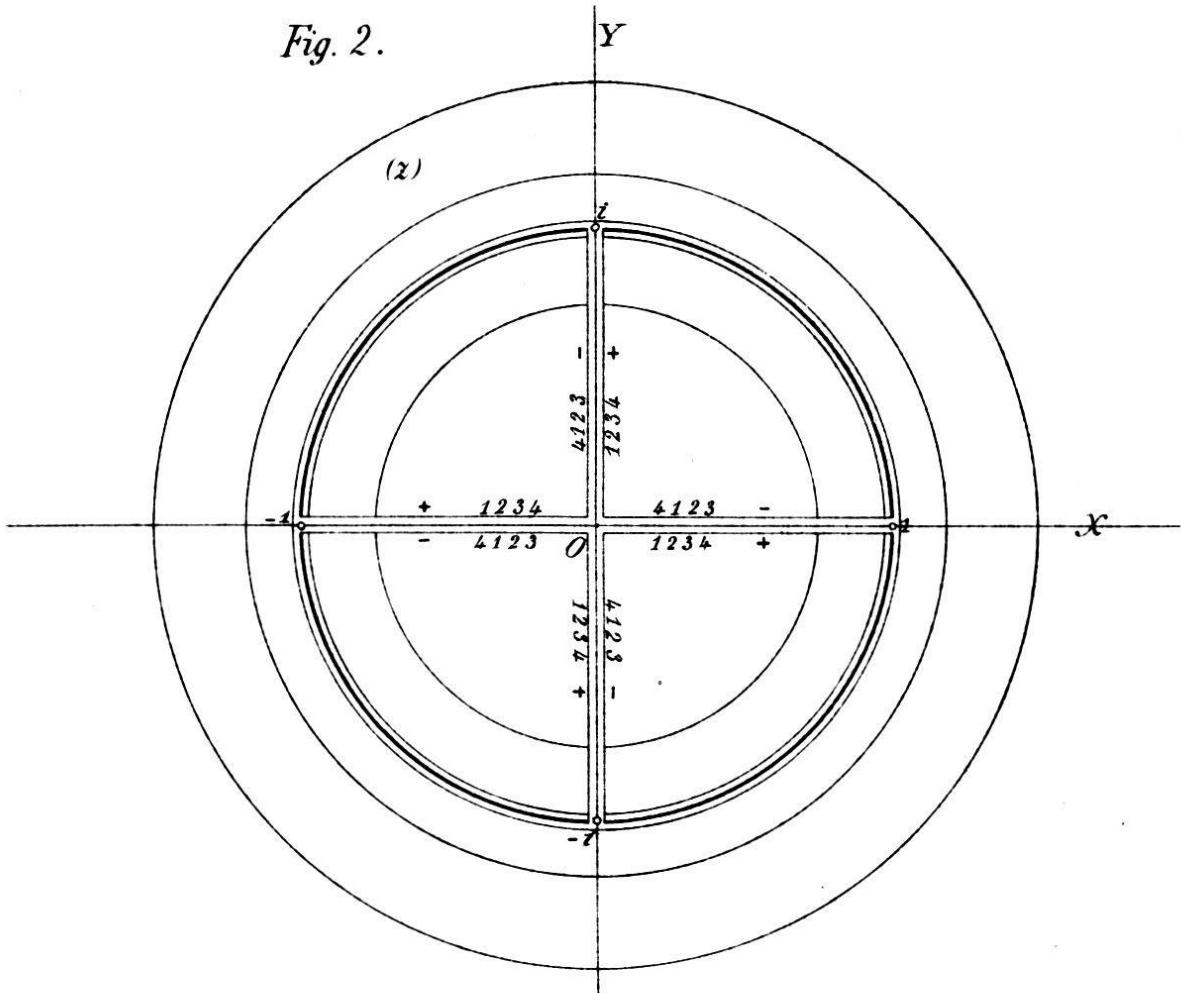


Fig. 3.

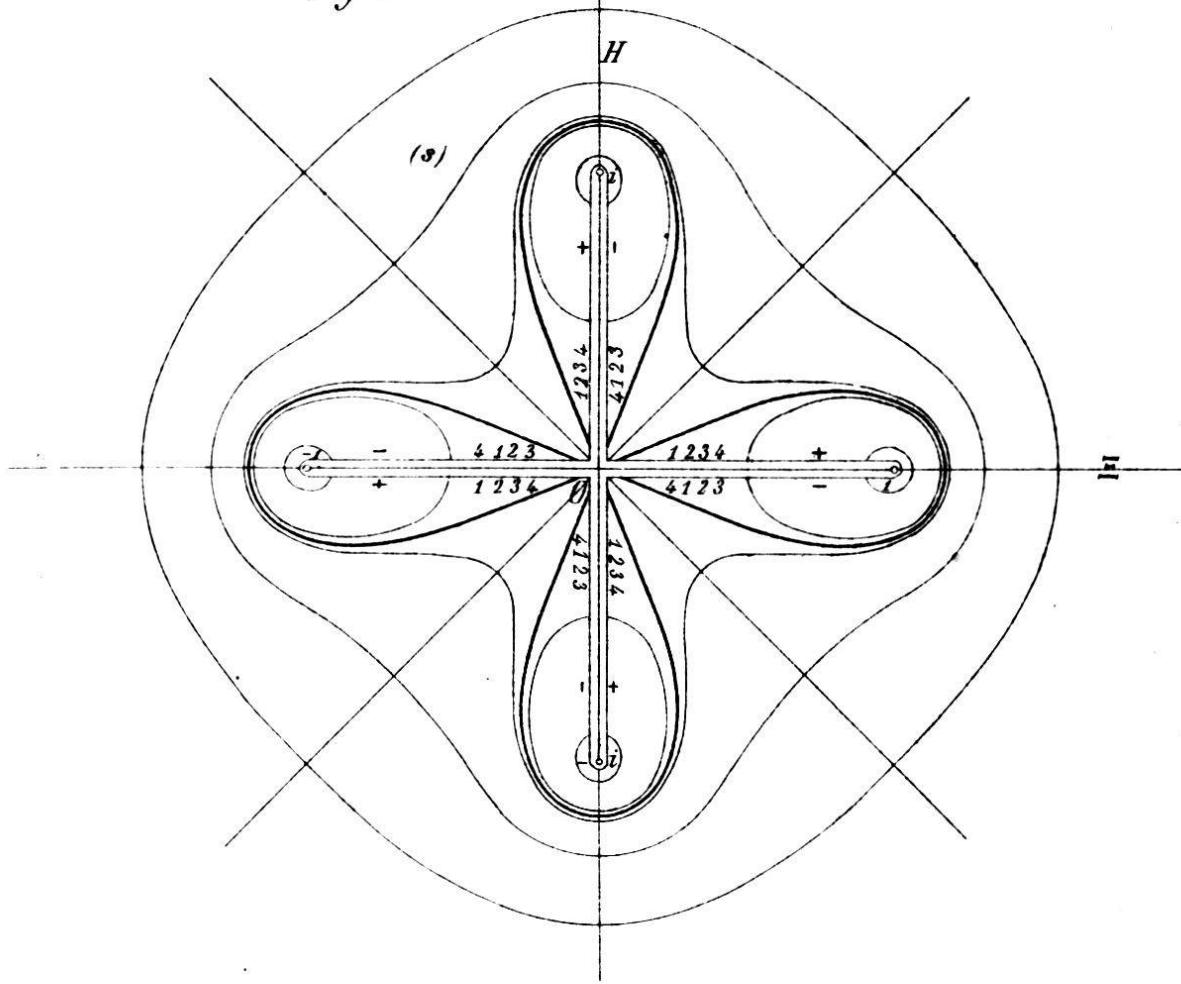


Fig. 8^a

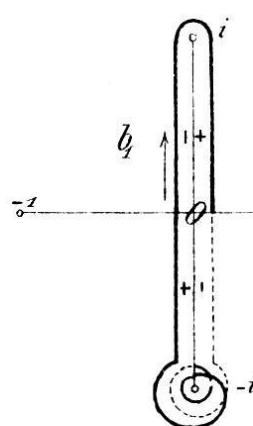


Fig. 8^b

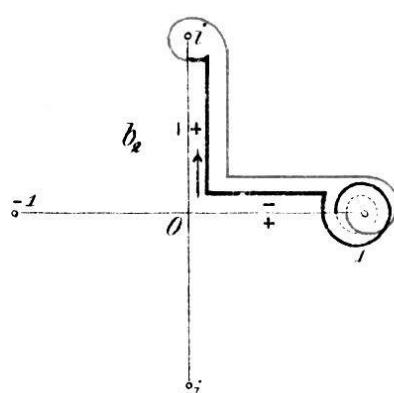


Fig. 8^c

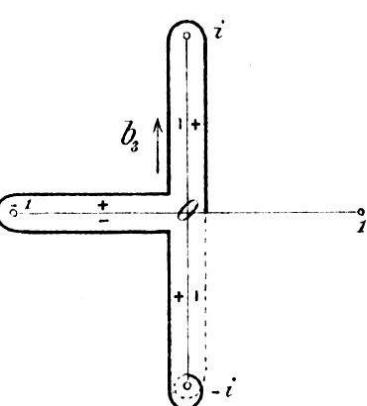


Fig. 8^d

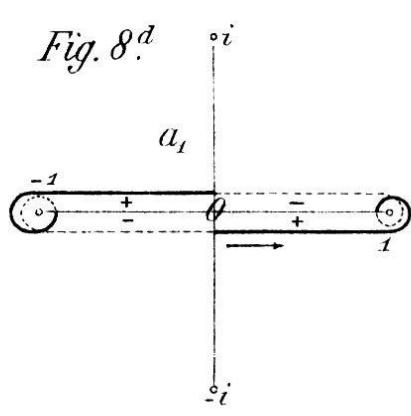


Fig. 8^e

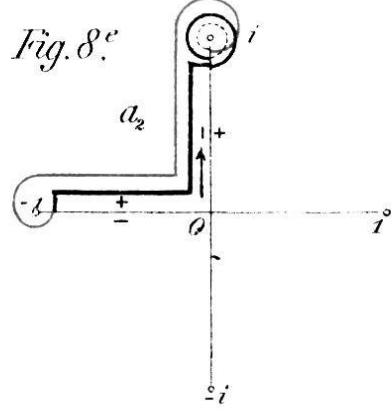


Fig. 8^f

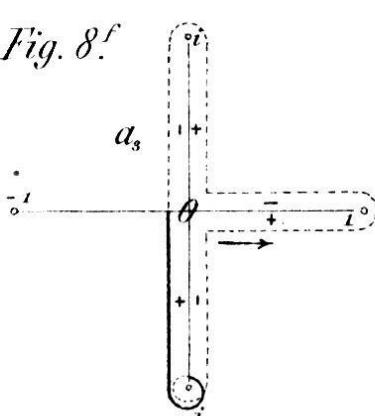


Fig. 9^a

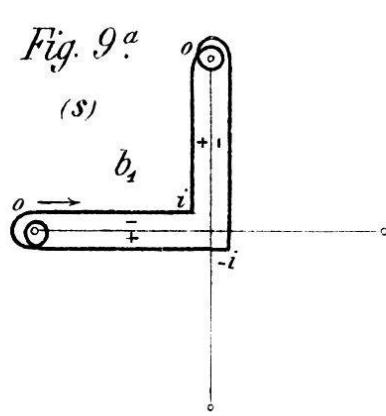


Fig. 9^b

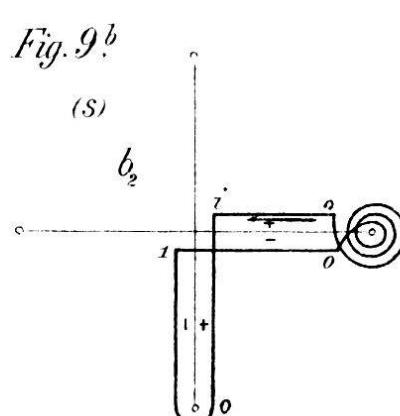


Fig. 9^c

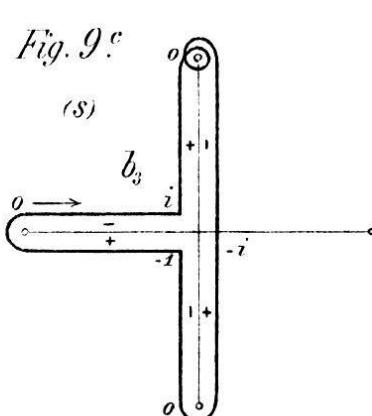


Fig. 9^d

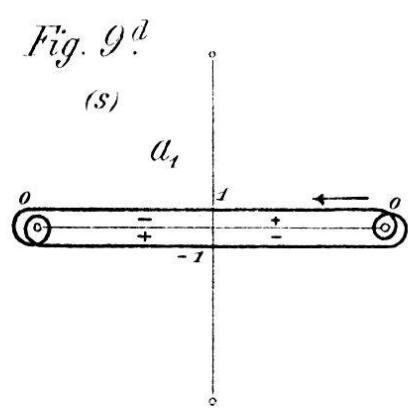


Fig. 9^e

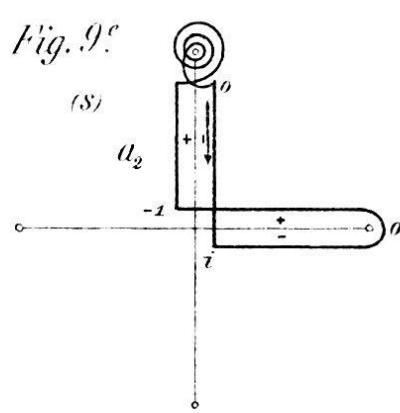


Fig. 9^f

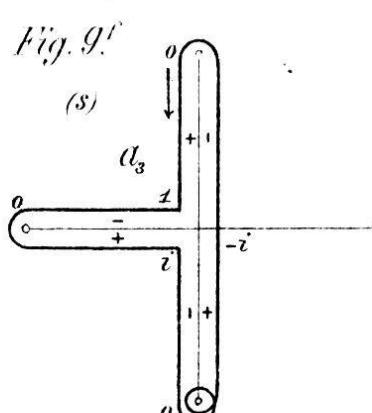


Fig. 10^a

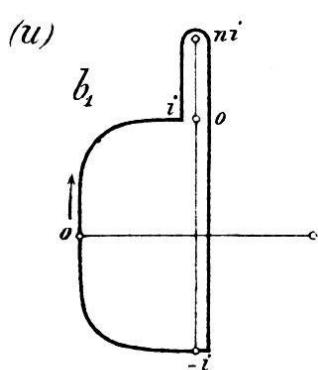


Fig. 10^b

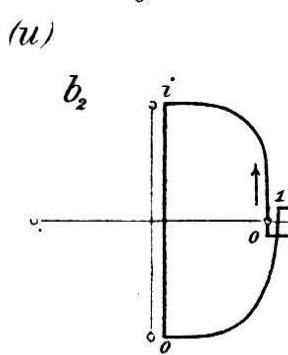
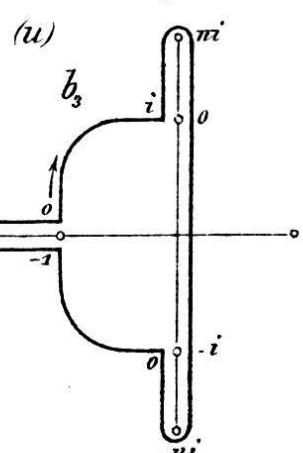


Fig. 10^c



(u) Fig. 10^d

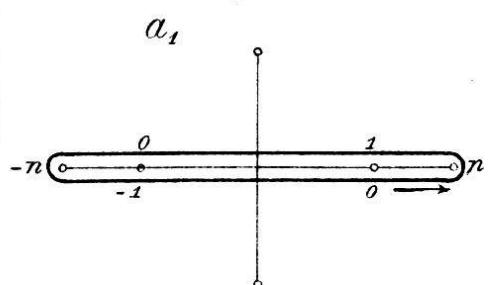
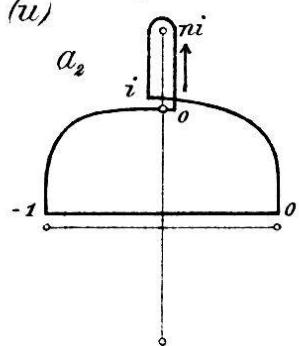
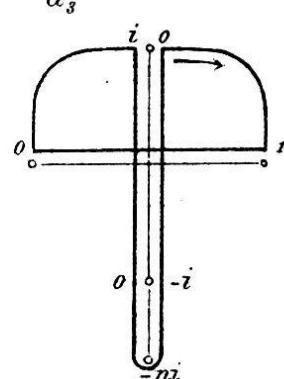


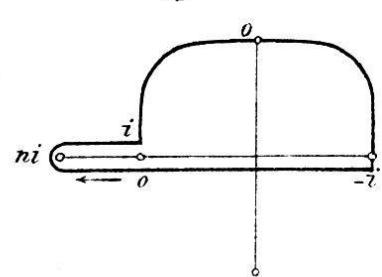
Fig. 10^e



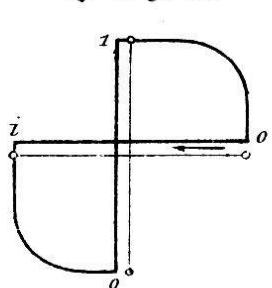
(u) Fig. 10^f



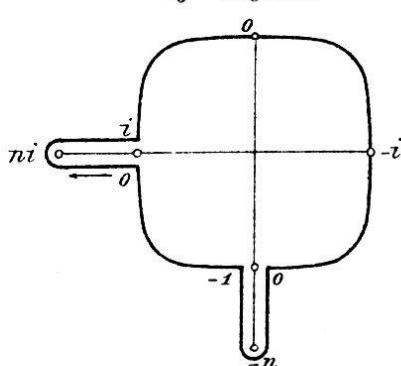
(v) b₁ Fig. 11^a



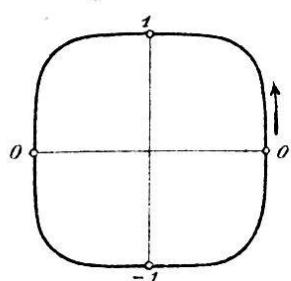
(v) b₂ Fig. 11^b



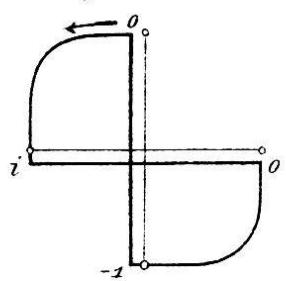
(v) b₃ Fig. 11^c



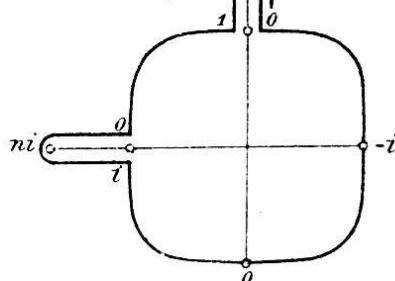
(v) a₁ Fig. 11^d

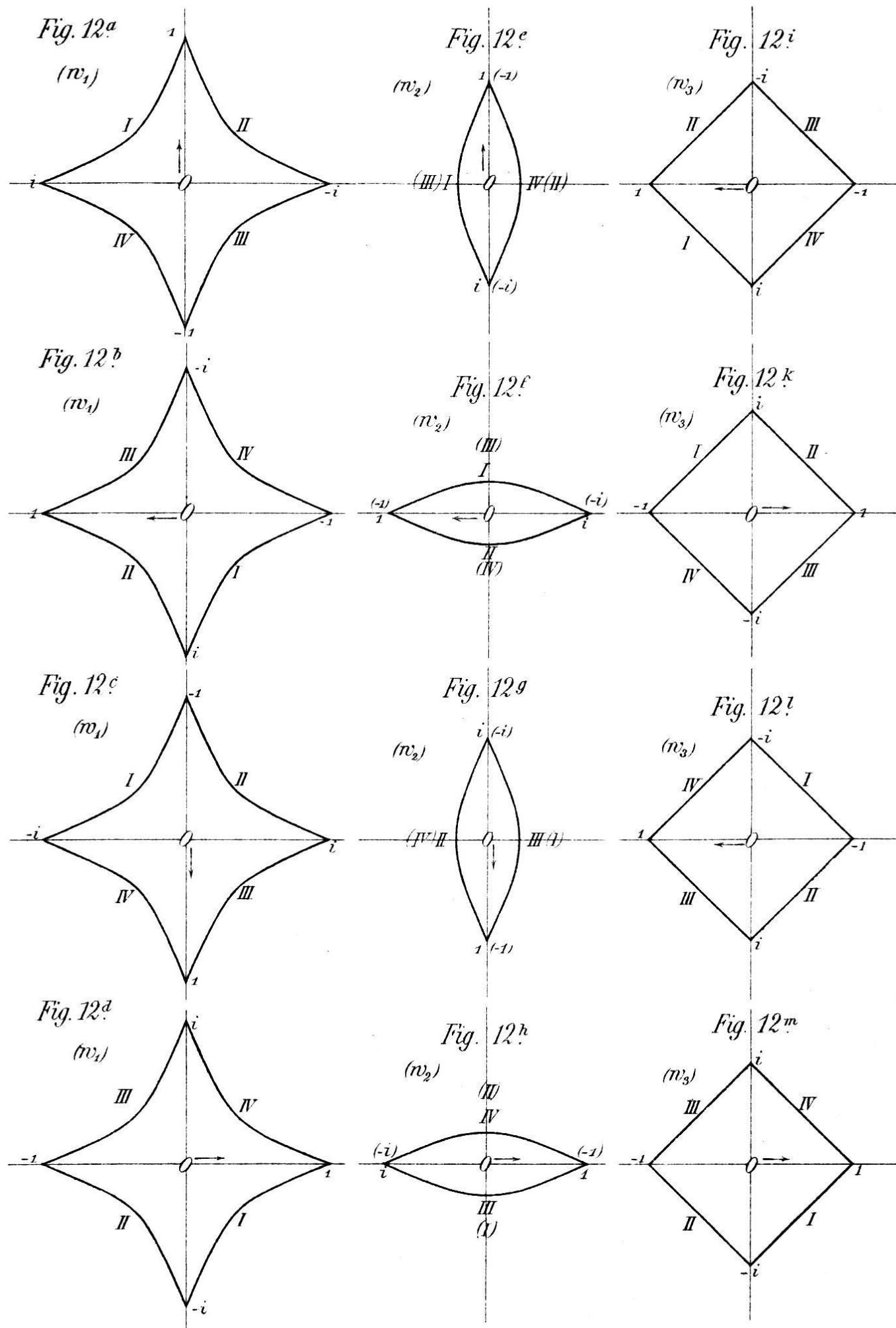


(v) a₂ Fig. 11^e



(v) a₃ Fig. 11^f





on arrive à la formule

$$\sqrt{-\frac{\chi_{(001)}^{(001)}}{\chi_{(111)}^{(010)}}} = -\frac{\vartheta_{(001)}^{(001)}}{\vartheta_{(100)}^{(010)}} \cdot \frac{\vartheta_{(111)}^{(001)}(v_1 v_2 v_3)}{\vartheta_{(111)}^{(010)}(v_1 v_2 v_3)},$$

dans laquelle

$$\sqrt{\chi_{(111)}^{(001)}} = \Sigma \pm x_1 \sqrt{z_1}, \quad y_1^{(1)} \sqrt{z_1^{(1)}}, \quad \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_2^{(2)}}, \quad \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{(111)}^{(010)}} = \Sigma \pm x_1 \sqrt{z_2}, \quad y_1^{(1)} \sqrt{z_2^{(1)}}, \quad \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_1^{(2)}}, \quad \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}.$$

Les variables v_1, v_2, v_3 conservent toujours la même signification.

III. La caractéristique (k) est impaire, (k') paire.

Soit $(k) = (\sqrt{x}) = (001), \quad (k') = (010).$

Les deux groupes

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1 x_2}) &= (011) = \frac{(100)}{x_1} + \frac{(111)}{x_2} = \frac{(100)}{\xi_2} + \frac{(111)}{\xi_1} = \frac{(010)}{\gamma''_1} + \frac{(001)}{\gamma''_2} = \\ &= \frac{(040)}{\gamma^0_2} + \frac{(001)}{\gamma^0_1} = \frac{(101)}{\gamma_2} + \frac{(110)}{\gamma_1} = \frac{(101)}{\gamma'_1} + \frac{(110)}{\gamma'_2}, \\ (\sqrt{x_1 y_1}) &= (011) = \frac{(100)}{x_1} + \frac{(111)}{\xi_1} = \frac{(100)}{\xi_2} + \frac{(111)}{x_2} = \frac{(010)}{\xi_6} + \frac{(001)}{x_6} = \\ &= \frac{(010)}{\xi_3} + \frac{(001)}{x_5} = \frac{(101)}{x_5} + \frac{(110)}{\xi_5} = \frac{(101)}{x_4} + \frac{(110)}{\xi_4} \end{aligned}$$

font reconnaître qu'on peut poser

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_4} = \sqrt{s+1}.$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma^0_4} = \sqrt{s-z+\varepsilon},$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_3} = \sqrt{z-i}, \quad \sqrt{y} = \sqrt{\xi_3} = \sqrt{z+i}$$

et qu'alors les deux caractéristiques

$$(k_4) = (\sqrt{xyz_4}) = \begin{pmatrix} 001 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$(k'_4) = (k') + (\sqrt{yz_4}) = \begin{pmatrix} 010 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \end{pmatrix}$$

sont paires. En introduisant ces fonctions et caractéristiques dans les formules générales, il vient

$$\mp(1+i)\sqrt{\frac{\chi_{\begin{pmatrix} 001 \\ 101 \end{pmatrix}}}{\chi_{\begin{pmatrix} 010 \\ 101 \end{pmatrix}}}} = \frac{\vartheta_{\begin{pmatrix} 001 \\ 100 \end{pmatrix}}}{\vartheta_{\begin{pmatrix} 010 \\ 100 \end{pmatrix}}} \cdot \frac{\vartheta_{\begin{pmatrix} 001 \\ 101 \end{pmatrix}}(v_1, v_2, v_3)}{\vartheta_{\begin{pmatrix} 010 \\ 101 \end{pmatrix}}(v_4, v_2, v_5)},$$

où

$$\sqrt{\chi_{\begin{pmatrix} 001 \\ 101 \end{pmatrix}}} = \Sigma \pm x\sqrt{x}, z_1^{(1)}\sqrt{x^{(1)}}, \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_1^{(2)}}, \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{\begin{pmatrix} 010 \\ 101 \end{pmatrix}}} = \Sigma \pm \sqrt{xx_1x_2}, \sqrt{x^{(1)}y_1^{(1)}y_2^{(1)}}, \sqrt{y^{(2)}x_1^{(2)}y_2^{(2)}}, \sqrt{y^{(3)}x_2^{(3)}y_1^{(3)}}.$$

Il serait inutile d'insister encore sur le problème de Jacobi, attendu qu'à l'aide de ce qui vient d'être dit, le lecteur suivra facilement jusqu'au bout l'ouvrage si souvent cité. Notre travail peut donc s'arrêter ici, d'autant plus que les deux problèmes de Jacobi et de Riemann seront repris, dans un second mémoire, à un point de vue tout différent et spécialement approprié au cas particulier qui a fait l'objet de cette étude.

