Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 36 (1900)
Heft: 135

Artikel: Note complémentaire sur le logarithme-intégral
Autor: Amstein, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-266065

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXXVI. N° 135. 1900.

NOTE COMPLÉMENTAIRE
SUR LE LOGARITHME-INTÉGRAL

PAR

H. AMSTEIN

Les quelques pages qu'on va lire forment la suite de mon travail : « Note sur le logarithme-intégral ». (V. *Bulletin*, vol. XXXI, n° 119, 1895, pages 203-225.) En appliquant les formules (1) p. 204 et (2^a) p. 208, on remarque bien vite que le calcul numérique du logarithme-intégral devient peu commode, dès que son argument sort de certaines limites et devient, par exemple, ou très petit ou très grand. Il serait donc à désirer de posséder deux séries remédiant à cet inconvénient, c'est-à-dire convergeant d'autant plus rapidement que l'argument du logarithme-intégral est respectivement plus petit ou plus grand. Or l'une d'elle au moins existe. Elle a été donnée par M. O. Schlœmilch et se trouve dans la *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 4. Jahrg., p. 390, de même que dans le *Compendium der höheren Analysis* du même auteur, 2e édition, tome II, p. 265 et suivantes. Sous une forme un peu plus générale qu'il ne nous faut, la série en question est

$$(1) \qquad \int_x^\infty \frac{e^{-v}\,dv}{v^\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^\lambda}\left[1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \frac{a_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots\right],$$

où

$$a_m = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t(t-1)(t-2)\dots[t-(m-1)]\,t^{\lambda-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se calculent facilement. En développant sous le signe $\int$

$$t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots[t-(m-1)]=$$
$$=t^m-C_{m.1}t^{m-1}+C_{m.2}t^{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}C_{m.m-1}t,$$

et en intégrant ensuite, il vient

$$a_m=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty[t^m-C_{m.1}t^{m-1}+C_{m.2}t^{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}C_{m.m-1}t]\,t^{\lambda-1}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[\int_0^\infty t^{m+\lambda-1}e^{-t}dt-C_{m.1}\int_0^\infty t^{m+\lambda-2}e^{-t}dt+\ldots+(-1)^{m-1}C_{m.m-1}\int_0^\infty t^{\lambda}e^{-t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\Big[\Gamma(m+\lambda)-C_{m.1}\Gamma(m+\lambda-1)+C_{m.2}\Gamma(m+\lambda-2)-\ldots+(-1)^{m-1}C_{m.m-1}\Gamma(\lambda+1)\Big]$$

Or on sait que

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)}=\lambda,$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda)}=\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+1)}\cdot\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)}=\lambda(\lambda+1),$$

. . . .

$$\frac{\Gamma(\lambda+q)}{\Gamma(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+q-1)=[\lambda]^q,$$

de sorte que finalement

(2)
$$a_m=[\lambda]^m-C_{m.1}[\lambda]^{m-1}+C_{m.2}[\lambda]^{m-2}-\ldots+(-1)^{m-1}C_{m.m-1}[\lambda].$$

La série (1) dont M. Schlœmilch démontre la convergence pour toutes les valeurs positives de x, mérite qu'on s'y arrête pendant quelques instants. Il peut arriver qu'on en ait besoin d'un grand nombre de termes. Dans ce cas il serait utile d'avoir une formule de réduction facilitant encore le calcul des coefficients a. Afin de l'obtenir on commencera par étudier les quantités C.

La formation de ces quantités fait immédiatement reconnaître l'exactitude des équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} C_{m.1} = C_{m-1.1} + (m-1)\,C_{m-1.0} \\ C_{m.2} = C_{m-1.2} + (m-1)\,C_{m-1.1} \\ C_{m.3} = C_{m-1.3} + (m-1)\,C_{m-1.2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ C_{m.k} = C_{m-1.k} + (m-1)\,C_{m-1.k-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ C_{m.m-1} = C_{m-1.m-1} + (m-1)\,C_{m-1.m-2}\,, \end{array}\right.$$

où $C_{n.0} = 1$ et $C_{n.n} = 0$. On a ainsi, par exemple,

$$\begin{array}{lcl} C_{m.1} & = C_{m-1.1} + & (m-1) \\ C_{m-1.1} & = C_{m-2.1} + & (m-2) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ C_{3.1} & = C_{2.1} \quad + & 2 \\ C_{2.1} & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

En ajoutant ces équations terme à terme, il vient

$$C_{m.1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1)$$

et l'on en conclut que les quantités $C_{2.1}$, $C_{3.1}$, $C_{4.1}$, ... $C_{m.1}$ forment une série arithmétique du second ordre.

Soit

$$R = u_0,\, u_1,\, u_2,\, \ldots\, u_n,\, \ldots$$

une série de nombres,

$$\Delta R = \Delta u_0 = u_1 - u_0,\; \Delta u_1 = u_2 - u_1,\; \ldots.\; \Delta u_n = u_{n+1} - u_n,\; \ldots.$$

la série de leurs différences premières,

$$\Delta^2 R = \Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1, \ldots \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n, \ldots$$

la série de leurs différences deuxièmes,

. . . .

$$\Delta^p R = \Delta^p u_0 = \Delta^{p-1} u_1 - \Delta^{p-1} u_0,\ \Delta^p u_1 = \Delta^{p-1} u_2 - \Delta^{p-1} u_1, \ldots.$$
$$\Delta^p u_n = \Delta^{p-1} u_{n+1} - \Delta^{p-1} u_n, \ldots.$$

la série de leurs différences $p^{\text{ièmes}}$. Alors on sait que le terme général de R est donné par la formule

$$u_p = u_0 + p_1 \Delta u_0 + p_2 \Delta^2 u_0 + p_3 \Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^p u_0,$$

où

$$p_r = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ r}$$

désigne le $r^{\text{ième}}$ cœfficient du binôme, et la série R est dite une *série arithmétique du $k^{\text{ième}}$ ordre*, lorsque toutes les différences $(k+1)^{\text{ième}}$ sont zéros.

Dans le cas où la série se compose des nombres $C_{2.1}$, $C_{3.1}$, $C_{4.1}$, ... on trouve immédiatement

$$C_{2.1} = u_0 = 1, \quad \Delta u_0 = 2, \quad \Delta^2 u_0 = 1, \quad \Delta^3 u_0 = 0,$$

de sorte que

$$C_{p+2.1} = u_p = u_0 + p_1 \Delta u_0 + p_2 \Delta^2 u_0 = 1 + 2p_1 + p_2.$$

On vérifie aisément qu'en effet on a

$$C_{m.1} = 1 + 2 + 3 + \ldots (m-1) = \frac{m(m-1)}{2} = 1 + 2(m-2)_1 + (m-2)_2.$$

Ce fait une fois reconnu, il est naturel de demander si peut-être les quantités $C_{m.2}$ forment une série arithmétique du 4e ordre, les quantités $C_{m.3}$ une série arithmétique du 6e ordre et ainsi de suite.

Si la réponse est affirmative, il doit être possible de mettre les nombres $C_{m.2}$ sous la forme

$$u_p = u_0 + p_1 \Delta u_0 + p_2 \Delta^2 u_0 + p_3 \Delta^3 u_0 + p_4 \Delta^4 u_0.$$

Or par un calcul des plus simples on prouve directement que l'on peut écrire

$$C_{3,2} = 2 = 2$$

$$C_{4,2} = 11 = 2 + 9.1_1$$

$$C_{5,2} = 35 = 2 + 9.2_1 + 15.2_2$$

$$C_{6,2} = 85 = 2 + 9.3_1 + 15.3_2 + 11.3_3$$

$$C_{7,2} = 175 = 2 + 9.4_1 + 15.4_2 + 11.4_3 + 3.4_4$$

$$C_{8,2} = 322 = 2 + 9.5_1 + 15.5_2 + 11.5_3 + 3.5_4.$$

Dans ce cas on a

$$C_{3,2} = u_0 = 2,\ \Delta u_0 = 9,\ \Delta^2 u_0 = 15,\ \Delta^3 u_0 = 11,\ \Delta^4 u_0 = 3,\ \Delta^5 u_0 = 0,$$

d'où il suit

$$C_{p+3,2} = u_p = 2 + 9\,p_1 + 15\,p_2 + 11\,p_3 + 3\,p_4,$$

et par conséquent

$$C_{m,2} = 2 + 9\,(m-3)_1 + 15\,(m-3)_2 + 11\,(m-3)_3 + 3\,(m-3)_4.$$

A l'aide de la relation $C_{m+1,2} = C_{m,2} + m\,C_{m,1}$ on montre aisément que cette formule supposée exacte pour m, reste encore valable pour $m+1$; elle est donc applicable à toute valeur entière de $m >$ ou $= 3$.

Un raisonnement analogue conduit aux formules suivantes :

$$C_{m,3} = 6 + 44\,(m-4)_1 + 131\,(m-4)_2 + 204\,(m-4)_3 + 176\,(m-4)_4 + 80\,(m-4)_5 + 15\,(m-4)_6.$$

$$C_{m,4} = 24 + 250\,(m-5)_1 + 1100\,(m-5)_2 + 2695\,(m-5)_3 + 4045\,(m-5)_4 + 3824\,(m-5)_5 + 2230\,(m-5)_6 + 735\,(m-5)_7 + 105\,(m-5)_8.$$

$$C_{m,5} = 120 + 1644\,(m-6)_1 + 9724\,(m-6)_2 + 33060\,(m-6)_3\ 72045\,(m-6)_4 + 105650\,(m-6)_5 + 105939\,(m-6)_6 + 71904\,(m-6)_7 + 31675\,(m-6)_8 + 8190\,(m-6)_9 + 945\,(m-6)_{10}.$$

$$C_{m,6} = 720 + 12348\,(m-7)_1 + 92708\,(m-7)_2 + 407792\,(m-7)_3 + 1179402\,(m-7)_4 + 2375065\,(m-7)_5 + 3427543\,(m-7)_6 + 3581493\,(m-7)_7 + 2695007\,(m-7)_8 + 1426607\,(m-7)_9 + 504945\,(m-7)_{10} + 107415\,(m-7)_{11} + 10395\,(m-7)_{12}.$$

La formule générale pour $C_{m,k}$ serait sans doute assez compliquée; nous ne l'établirons pas, vu que nous n'en ferons aucun usage dans la suite. Elle serait pourtant bien intéressante et, à l'occasion, utile, car $C_{m,k}$ étant la somme des combinaisons des $(m-1)$ premiers nombres entiers $1, 2, 3, \dots (m-1)$, pris k à k, elle fournirait le moyen d'évaluer cette somme d'une manière relativement simple. Ainsi, par exemple, la somme des 84 combinaisons des nombres $1, 2, \dots 9$, pris 3 à 3, est donnée par la formule

$$C_{10,3} = 6 + 44.6_1 + 131.6_2 + 204.6_3 + 176.6_4 + 80.6_5 + 15 = 9450.$$

Passant maintenant aux coefficients a, on prévoit qu'il est possible d'établir de différentes manières des relations linéaires entre $a_1, a_2, \dots a_m$; il s'agit d'en choisir une qui ne soit pas trop compliquée. Partant de la formule

$$(2) \qquad a_m = C_{m,0}[\lambda]^m - C_{m,1}[\lambda]^{m-1} + C_{m,2}[\lambda]^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1}[\lambda],$$

on essayera de déterminer les constantes $A_{m,\nu}$ de façon à avoir identiquement

$$(4) \quad a_m = \lambda a_{m-1} + A_{m,1}\, a_{m-2} - A_{m,2}\, a_{m-3} + A_{m,3}\, a_{m-4} - \dots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2}\, a$$

Or d'après (2)

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0}\lambda[\lambda]^{m-1} - C_{m-1,1}\lambda[\lambda]^{m-2} + C_{m-1,2}\lambda[\lambda]^{m-3} - C_{m-1,3}\lambda[\lambda]^{m-4} + $$
$$+ C_{m-1,4}\lambda[\lambda]^{m-5} - \dots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2}\lambda[\lambda],$$

et comme

$$\lambda[\lambda]^k = (\lambda + k - k)[\lambda]^k = [\lambda]^{k+1} - k[\lambda]^k,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0}\left[[\lambda]^m - (m-1)[\lambda]^{m-1}\right] - C_{m-1,1}\left[[\lambda]^{m-1} - (m-2)[\lambda]^{m-2}\right] +$$
$$+ C_{m-1,2}\left[[\lambda]^{m-2} - (m-3)[\lambda]^{m-3}\right] - C_{m-1,3}\left[[\lambda]^{m-3} - (m-4)[\lambda]^{m-4}\right] +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2}\left[[\lambda]^2 - 1.[\lambda]\right];$$

ou bien

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1.0}[\lambda]^m -$$

$$- [C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1.0}][\lambda]^{m-1} + [C_{m-1.2} + (m-2) C_{m-1.1}][\lambda]^{m-2} -$$

$$- [C_{m-1.3} + (m-3) C_{m-1.2}][\lambda]^{m-3} + [C_{m-1.4} + (m-4) C_{m-1.3}][\lambda]^{m-4} -$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1}[C_{m-1.m-1} + 1 . C_{m-1.m-2}][\lambda];$$

ou encore en appliquant les formules (3) d'après lesquelles

$$C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1,0} = C_{m,1}$$

$$C_{m-1.2} + (m-2) C_{m-1.1} = C_{m.2} - 1 . C_{m-1.1}$$

$$C_{m-1.3} + (m-3) C_{m-1.2} = C_{m.3} - 2 . C_{m-1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{m-1.m-1} + 1 . C_{m-1,m-2} = C_{m.m-1} - (m-2) C_{m-1.m-2},$$

$$\lambda a_{m-1} = C_{m,0}[\lambda]^m - C_{m.1}[\lambda]^{m-1} + [C_{m.2} - 1 . C_{m-1.1}][\lambda]^{m-2} -$$

$$- [C_{m.3} - 2 . C_{m-1.2}][\lambda]^{m-3} + [C_{m.4} - 3 . C_{m-1,3}][\lambda]^{m-4} -$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1}[C_{m.m-1} - (m-2) C_{m-1.m-2}][\lambda].$$

Si l'on introduit cette expression pour λa_{m-1} et en même temps les valeurs de a_{m-2}, a_{m-3}, ... a_1 tirées de (2) dans l'équation (4), il vient

$$a_m = C_{m,0}[\lambda]^m - C_{m.1}[\lambda]^{m-1} + [C_{m.2} - 1 . C_{m-1.1}][\lambda]^{m-2} - [C_{m.3} - 2 C_{m-1.2}][\lambda]^{m-3} +$$

$$+ [C_{m,4} - 3 . C_{m-1.3}][\lambda]^{m-4} - \ldots + (-1)^{m-1}[C_{m.m-1} - (m-2) C_{m-1.m-2}][\lambda] +$$

$$A_{m.1}\{C_{m-2.0}[\lambda]^{m-2} - C_{m-2.1}[\lambda]^{m-3} + C_{m-2.2}[\lambda]^{m-4} \ldots + (-1)^{m-3} C_{m-2.m-3}[\lambda]\} -$$

$$A_{m.2}\{C_{m-3.0}[\lambda]^{m-3} - C_{m-3,1}[\lambda]^{m-4} + \ldots\ldots + (-1)^{m-4} C_{m-3,m-4}[\lambda]\} +$$

$$A_{m.3}\{C_{m-4.0}[\lambda]^{m-4} - C_{m-4.1}[\lambda]^{m-5} + \ldots\ldots + (-1)^{m-5} C_{m-4.m-5}[\lambda]\} -$$

$$A_{m.4}\{C_{m-5.0}[\lambda]^{m-5} - C_{m-5.1}[\lambda]^{m-6} + \ldots\ldots + (-1)^{m-6} C_{m-5.m-6}[\lambda]\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{m-1} A_{m,m-2}\, C_{1,0}[\lambda].$$

En égalant les coefficients des mêmes symboles $[\lambda]^\nu$ ($\nu = m, m-1, \ldots 2,1$) dans les seconds membres de (2) et (5), on obtient les équations

$$C_{m,0} = C_{m,0}; \; - C_{m,1} = - C_{m,1}$$

$$C_{m,2} = [C_{m,2} - 1 . C_{m-1,1}] + A_{m,1} C_{m-2,0}$$

$$- C_{m,3} = - [C_{m,3} - 2 . C_{m-1,2}] - A_{m,1} C_{m-2,1} \quad A_{m,2} C_{m-3,0}$$

$$C_{m,4} = [C_{m,4} - 3 . C_{m-1,3}] + A_{m,1} C_{m-2,2} + A_{m,2} C_{m-3,1} + A_{m,3} C_{m-4,0}$$

. . . .

$$(-1)^{m-1} C_{m,m-1} = (-1)^{m-1} [C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2}] + (-1)^{m-3} A_{m,1} C_{m-2,m-3}$$
$$- (-1)^{m-4} A_{m,2} C_{m-3,m-4} + (-1)^{m-5} A_{m,3} C_{m-4,m-5} - (-1)^{m-6} A_{m,4} C_{m-5,m-6}$$
$$+ \ldots\ldots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2} C_{1,0}$$

dont on tire, en les résolvant par rapport au dernier $A_{m,\mu}$ qui se trouve dans chacune d'elles

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{m,1} &= 1 . C_{m-1,1} \\ A_{m,2} &= 2 C_{m-1,2} - A_{m,1} C_{m-2,1} \\ A_{m,3} &= 3 C_{m-1,3} - A_{m,1} C_{m-2,2} - A_{m,2} C_{m-3,1} \\ A_{m,4} &= 4 C_{m-1,4} - A_{m,1} C_{m-2,3} - A_{m,2} C_{m-3,2} - A_{m,3} C_{m-4,1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m,m-2} &= (m-2) C_{m-1,m-2} - A_{m,1} C_{m-2,m-3} - A_{m,2} C_{m-3,m-4} - A_{m,3} C_{m-4,m-5} \\ &\quad \ldots . - A_{m,m-3} C_{2,1} . \end{aligned} \right.$$

Ces valeurs obtenues, il est facile de vérifier directement les égalités

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{m,1} &= A_{m-1,1} + (m-2) \\ A_{m,2} &= A_{m-1,2} + 1 . A_{m-1,1} \\ A_{m,3} &= A_{m-1,3} + 2 . A_{m-1,2} \\ A_{m,4} &= A_{m-1,4} + 3 . A_{m-1,3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

De proche en proche on arrive à la relation hypothétique

$$(7^a) \qquad A_{m,k-1} = A_{m-1,k-1} + (k-2)\,A_{m-1,k-2},$$

et si l'on peut prouver, partant de (7) et (7^a) que l'on a de même

$$(8) \qquad A_{m,k} = A_{m-1,k} + (k-1)\,A_{m-1,k-1},$$

cette dernière égalité sera valable pour toutes les valeurs entières de k, de $k=1$ jusqu'à $k=m-2$. Or la démonstration en question n'offre aucune difficulté. En effet, en s'appuyant sur les formules (6), (7), (7^a) et (3), on a successivement

$$\begin{aligned}
&A_{m,k} = k\,C_{m-1,k} - A_{m,1}\,C_{m-2,k-1} - A_{m,2}\,C_{m-3,k-2} - A_{m,3}\,C_{m-4,k-3} - \ldots - \\
&- A_{m,k-1}\,C_{m-k,1} = k\,[C_{m-2,k} + (m-2)\,C_{m-2,k-1}] - [A_{m-1,1} + (m-2)]\,C_{m-2,k-1} - \\
&- [A_{m-1,2} + 1.\,A_{m-1,1}]\,C_{m-3,k-2} - [A_{m-1,3} + 2.\,A_{m-1,2}]\,C_{m-4,k-3} - \ldots - \\
&- [A_{m-1,k-1} + (k-2)\,A_{m-1,k-2}]\,C_{m-k,1} = k\,C_{m-2,k} - A_{m-1,1}\,C_{m-2,k-1} - \\
&- A_{m-1,2}\,C_{m-3,k-2} - \ldots - A_{m-1,k-1}\,C_{m-k,1} + k(m-2)\,C_{m-2,k-1} - (m-2)\,C_{m-2,k-1} - \\
&- 1.\,A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} - 2.\,A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} - \ldots\ldots\ldots\ldots - (k-2)\,A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1} \\
&= k\,C_{m-2,k} - A_{m-1,1}\,[C_{m-3,k-1} + (m-3)\,C_{m-3,k-2}] - A_{m-1,2}\,[C_{m-4,k-2} + \\
&+ (m-4)\,C_{m-4,k-3}] - A_{m-1,3}\,[C_{m-5,k-3} + (m-5)\,C_{m-5,k-4}] - \ldots\ldots - \\
&A_{m-1,k-1}\,[C_{m-k-1,1} + m-k-1] + (k-1)(m-2)\,C_{m-2,k-1} - 1.\,A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} - \\
&- 2.\,A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} - \ldots - (k-2)\,A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1} = A_{m-1,k} - \\
&- (m-3)\,A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} - (m-4)\,A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} - (m-5)\,A_{m-1,3}\,C_{m-5,k-4} - \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots - (m-k)\,A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1} - (m-k-1)\,A_{m-1,k-1} + \\
&+ (k-1)(m-2)\,C_{m-2,k-1} - 1.\,A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} - 2.\,A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} - \ldots - \\
&- (k-2)\,A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1} = A_{m-1,k} + (m-2)\,[(k-1)\,C_{m-2,k-1} - A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} - \\
&- A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} - \ldots - A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1}] \\
&\quad \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}\left|\, A_{m-1,1}\,C_{m-3,k-2} \begin{matrix} +2 \\ -2 \end{matrix} \right|\, A_{m-1,2}\,C_{m-4,k-3} + \ldots\ldots \begin{matrix} +(k-2) \\ -(k-2) \end{matrix} \left|\, A_{m-1,k-2}\,C_{m-k,1}\right. \\
&- (m-k-1)\,A_{m-1,k-1} \\
&= A_{m-1,k} + (m-2)\,A_{m-1,k-1} - (m-k-1)\,A_{m-1,k-1} = A_{m-1,k} + (k-1)\,A_{m-1,k-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi la formule (8) est démontrée.

Les nombres $A_{m,k}$ conservant leur valeur et leur importance quelle que soit la valeur particulière qu'on veut attribuer à λ, il ne sera pas inutile de consigner ici le petit tableau suivant :

$A_{m,k}$.

	k =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valeurs de m.	3	1										
	4	3	1									
	5	6	4	2								
	6	10	10	10	6							
	7	15	20	30	36	24						
	8	21	35	70	126	168	120					
	9	28	56	140	336	672	960	720				
	10	36	84	252	756	2016	4320	6480	5040			
	11	45	120	420	1512	5040	14400	32400	50400	40320		
	12	55	165	660	2772	11088	39600	118800	277200	443520	362880	
	13	66	220	990	4752	22176	95040	356400	1108800	2661120	4354560	3628800

A l'aide de ce tableau on calcule facilement les valeurs des coefficients a_k dont les 11 premiers sont :

$$a_1 = \lambda$$

$$a_2 = \lambda^2$$

$$a_3 = \lambda^3 + \lambda$$

$$a_4 = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda$$

$$a_5 = \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda$$

$$a_6 = \lambda^6 + 20\lambda^4 - 15\lambda^3 + 58\lambda^2 - 26\lambda$$

$$a_7 = \lambda^7 + 35\lambda^5 - 35\lambda^4 + 238\lambda^3 - 217\lambda^2 + 194\lambda$$

$$a_8 = \lambda^8 + 56\lambda^6 - 70\lambda^5 + 728\lambda^4 - 1008\lambda^3 + 2035\lambda^2 - 1142\lambda$$

$$a_9 = \lambda^9 + 84\lambda^7 - 126\lambda^6 + 1848\lambda^5 - 3444\lambda^4 + 11611\lambda^3 - 13470\lambda^2 + 9736\lambda$$

$$a_{10} = \lambda^{10} + 120\lambda^8 - 210\lambda^7 + 4116\lambda^6 - 9660\lambda^5 + 47815\lambda^4 - 85410\lambda^3 + 134164\lambda^2 - 81384\lambda$$

$$a_{11} = \lambda^{11} + 165\lambda^9 - 330\lambda^8 + 8316\lambda^7 - 23562\lambda^6 + 159115\lambda^5 - 387090\lambda^4 + 983059\lambda^3 - 1243770\lambda^2 + 823392\lambda\,.$$

Dans le cas actuel où il s'agit du logarithme-intégral, λ est égal à l'unité et les premiers coefficients a_k deviennent

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $a_5 = 14$, $a_6 = 38$, $a_7 = 216$,

$a_8 = 600$, $a_9 = 6240$, $a_{10} = 9552$, $a_{11} = 319296$, $a_{12} = -519312$,

$a_{13} = 28108560$, etc.

Le logarithme-intégral, lorsqu'on y effectue la substitution

$$x = e^{-y}, \quad dx = -e^{-y}\,dy$$

peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{J} = \int_0^x \frac{dx}{\log x} = -\int_y^\infty \frac{e^{-y}\,dy}{y}$$

et cette dernière intégrale, abstraction faite du signe, est donnée par la série (1) dans laquelle on pose $\lambda = 1$. Ainsi l'on a

$$-\mathrm{J} = \int_y^{\infty} \frac{\overset{-v}{e}\,dv}{v} =$$

$$= \frac{\overset{-y}{e}}{y}\Big[1 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} - \frac{2}{(y+1)(y+2)(y+3)} +$$

$$+ \frac{4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} - \frac{14}{(y+1)\ldots(y+5)} +$$

$$+ \frac{38}{(y+1)\ldots(y+6)} - \frac{216}{(y+1)\ldots(y+7)} + \frac{600}{(y+1)\ldots(y+8)} -$$

$$- \frac{6240}{(y+1)\ldots(y+9)} + \frac{9552}{(y+1)\ldots(y+10)} - \frac{319296}{(y+1)\ldots(y+11)} -$$

$$- \frac{519312}{(y+1)\ldots(y+12)} - \frac{28108560}{(y+1)\ldots(y+13)} \cdots\cdots\Big].$$

Au moyen de cette série on trouve, par exemple, pour $y = 6$ ou $x = \overset{-6}{e}$, en tenant compte des 11 premiers termes.

$$\mathrm{J} = -\int_6^{\infty} \frac{\overset{-y}{e}\,dy}{y} = \int_0^{\overset{-6}{e}} \frac{dx}{\log x} = 0{,}000360082_{81}.$$

Afin de juger de la valeur pratique de la série (2^a), p. 208 de ma note sur le logarithme-intégral, on calculera encore une fois cette même intégrale à l'aide de la série en question. La comparaison des deux valeurs obtenues permettra de déterminer les premières décimales de la constante d'Euler.

Si dans la formule sus-mentionnée (2^a), à savoir

$$(9) \qquad \int_0^{x} \frac{t^{\alpha(1+\lambda)-1}}{\log t}\,dt = \int_0^{x} \frac{t^{\alpha-1}}{\log t}\,dt + x^{\alpha}\,\mathrm{S}(x, \alpha, \lambda),$$

où

$$S(x, \alpha, \lambda) = \log(1+\lambda) - \frac{(\alpha \log x)}{1!}[\log(1+\lambda) - \lambda] +$$

$$\frac{(\alpha \log x)^2}{2!}[\log(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2] - \frac{(\alpha \log x)^3}{3!}[\log(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda^3]$$

$$+ \frac{(\alpha \log x)^4}{4!}[\log(1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^4] - + \ldots\ldots\ldots,$$

on pose

$$t = x^{\frac{1}{\alpha+\beta}},\ dt = \frac{1}{\alpha+\beta}\, x^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} dx,\ \log t = \frac{1}{\alpha+\beta}\log x,$$

où $\alpha > 0$, $\alpha+\beta > 0$, il vient d'abord

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\log t}\, dt = \int_0^{x^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\log x},$$

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\log t}\, dt = \int_0^{x^{\alpha}} \frac{dx}{\log x},$$

puis l'équation (9) prend la forme

$$(9^a) \qquad \int_0^{x^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{x^{\alpha}} \frac{dx}{\log x} + x^{\alpha}\, S(x, \alpha, \lambda).$$

Maintenant pour calculer $\int_0^{\bar{e}^6} \frac{dx}{\log x}$ on peut procéder de la manière suivante : D'abord on calcule $\int_0^{\bar{e}^1} \frac{dx}{\log x}$ à l'aide de la série fondamentale

$$(10) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\log x} = C + \log(-\log x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log^n x}{n.n!};$$

ensuite l'application répétée de la formule (9^a) fournit successivement les intégrales suivantes :

$$\int_0^{e^{-1-\frac{1}{2}}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-2}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^{e^{-2-1}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-3}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-2}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^2}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{e^{-3-1}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-4}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-3}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^3}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^{e^{-4-2}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-6}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{e^{-4}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^4}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 4, \frac{1}{2}\right).$$

En éliminant les intégrales intermédiaires, on obtient

$$\text{(11)} \quad \mathrm{J} = \int_0^{e^{-6}} \frac{dx}{\log x} = \mathrm{C} + \int_0^{e^{-1}} + \frac{1}{e}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{e^2}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{e^3}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e^4}\,\mathrm{S}\left(\frac{1}{e}, 4, \frac{1}{2}\right),$$

Cette disposition du calcul ne fait intervenir que trois séries, à savoir la série fondamentale (10) et les séries

$$\mathrm{S}\left(x, \alpha, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\left(x, \alpha, \frac{1}{3}\right).$$

Tous calculs effectués, l'égalité (11) donne

$$J = C - 0{,}577575747353_4 = -0{,}000360082_{81},$$

d'où l'on tire

$$C = 0{,}577215664\ldots$$

valeur exacte jusqu'au 9ᵉ ordre décimal.

En se servant d'une valeur plus exacte de C (Dans le mémoire de Gauss, *Disquisitiones generales circa Seriem infinitam*, etc. on en trouvera les 40 premières figures.) on obtient les valeurs suivantes des intégrales intermédiaires :

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}21938393439552_2$$

$$\int_0^{e^{-\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}100019582406_7$$

$$\int_0^{e^{-2}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}048900510707_7$$

$$\int_0^{e^{-3}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}013048381094_0$$

$$\int_0^{e^{-4}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}003779352409_3$$

$$\int^{e^{-6}} \frac{dx}{\log x} = -0{,}000360082451_8$$