Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 73 (1976-1977)
Heft: 349

Artikel: Catastrophes : aspects mathématiques
Autor: Wagoner, J.B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-277042

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Catastrophes : aspects mathématiques [1]

PAR

J. B. WAGONER [2]

Cette conférence concerne une nouvelle branche des mathématiques appelée « théorie des catastrophes » et inventée vers les années soixante par le mathématicien français RENÉ THOM [5]. Une de ses intentions originales était de fournir un modèle géométrique pour décrire les formes successives d'un embryon en développement: pourquoi des cellules de même dotation génétique se développent-elles selon les cas en tissu cardiaque, ou hépatique, ou oculaire? Mais il y a beaucoup d'applications dans d'autres domaines dont la physique, la psychologie, la physiologie, la sociologie, l'économie et la politique. Nous allons illustrer la théorie de THOM par des exemples dus au mathématicien anglais E. C. ZEEMAN.

D'abord qu'est-ce qu'une catastrophe au sens commun du terme, dans la vie courante? Examinons quelques exemples: Une nation change soudainement de gouvernement par un coup d'Etat militaire, ou entre en guerre contre un autre pays de façon inattendue. La bourse tombe en récession, ou pire fait complètement faillite, comme à New York en 1928. Un barrage se rompt et inonde brusquement une vallée. Alors que vous marchez tranquillement en montagne, vous entendez un craquement formidable et une avalanche vous tombe dessus. Un tremblement de terre dévastateur se produit par le soudain relâchement d'une tension qui s'est lentement accumulée. Un pont s'écroule parce que les tensions dans les poutres dépassent le point de rupture. Ces événements sont d'habitude appelés « catastrophes » parce qu'ils sont soudains, imprévus, et entraînent souvent des dommages matériels et des souffrances humaines. Le

---

[1] Cette conférence a été présentée à l'Université de Lausanne au printemps 1974, alors que l'auteur avait le privilège d'occuper la Chaire d'honneur pour l'année académique 1973/1974. C'est un plaisir de remercier l'Université de Lausanne pour l'hospitalité et les conditions de recherche offertes durant cette période. Je remercie aussi S. Maumary et P. de la Harpe pour leur aide langagière lors de la préparation de ce texte.

[2] University of California, Berkeley, California 94720.

caractère essentiel dans tous les cas est qu'un changement graduel et relativement petit entraîne sous certaines conditions un grand changement, c'est-à-dire un changement catastrophique. Voici encore d'autres exemples. Vous avez laissé monter du lait; il déborde de la casserole et se répand sur le fourneau: une augmentation graduelle de la température a causé une diminution considérable de la densité, le résultat final étant du lait brûlé. Des contraintes exercées sur l'économie, suivies d'un relâchement des contrôles, peuvent entraîner un saut inflationniste des prix. Un comité débat chaudement autour d'une motion et vote finalement « non »; puis l'atmosphère se détend, l'opposition décroît légèrement, le comité change d'avis, il adopte la motion. Combien de fois n'avez-vous pas hésité sur un problème personnel, pris une décision, puis changé complètement d'avis cinq minutes plus tard?

La théorie mathématique des catastrophes s'occupe des phénomènes où *un changement graduel et relativement lent produit un saut soudain de comportement;* de tels phénomènes sont appelés *catastrophes.* Oublions pour le moment le sens tragique associé au mot « catastrophe », et essayons d'abstraire le caractère essentiel du comportement catastrophique au sens précédent.

La machine a catastrophes

Zeeman a imaginé une machine simple et ingénieuse dont le comportement catastrophique est typique de plusieurs situations politiques et économiques [10], [2], [4], [7], [11]. Voici comment elle fonctionne et comment il est facile de la construire. Prenez deux boucles élastiques de

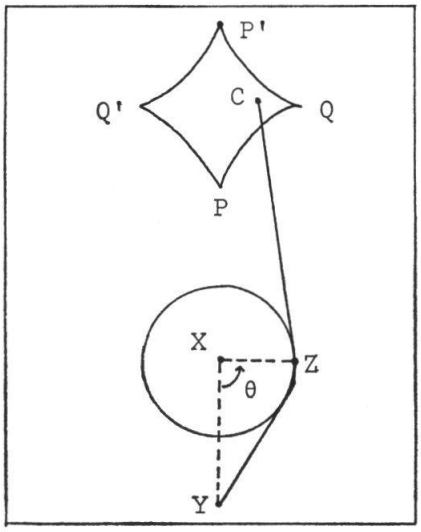

Fig. 1

même longueur, disons 15 cm, un disque de carton de 15 cm de diamètre également, trois petits clous, et une planche d'environ 30 cm sur 90 cm. Fixez un clou dans le disque près du bord au point Z (voir le schéma fig. 1), puis fixez le disque à la planche au point X de sorte qu'il tourne librement autour de son centre. Passez maintenant les élastiques autour de Z et fixez l'extrémité de l'un d'eux au point situé 30 cm juste au-dessous du point X. Le jouet est prêt à fonctionner.

Déplacez lentement et continûment l'extrémité C de l'élastique libre dans la région supérieure de la planche. Vous remarquerez que le disque tourne la plupart du temps graduellement; mais parfois, lorsque C passe par certaines positions, le disque change soudainement d'orientation; c'est un exemple de catastrophe. On appelle C la *variable de « contrôle »*, parce que la position du disque dépend de la position de C. Marquez un point à l'encre sur la planche chaque fois qu'il y a un changement soudain. En fin de compte, vous allez voir apparaître une courbe $\mathfrak{B}$ en forme de losange, avec quatre *fronces* P, P', Q, Q' comme en (1). On appelle $\mathfrak{B}$ la *courbe de bifurcation* ou *l'ensemble catastrophique*.

Gardez maintenant fixe le point de contrôle C et forcez le disque à prendre une autre orientation. Si vous le relâchez, le disque retourne rapidement à une position de repos. Avec un peu d'expérience, vous verrez que, si C est en dehors de $\mathfrak{B}$, alors le disque revient toujours à sa position initiale; mais si C est à l'intérieur de $\mathfrak{B}$, alors il y a deux positions de repos possibles.

Supposons maintenant que l'on déplace C le long de la ligne pointillée du schéma fig. 2. Lorsque C traverse $\mathfrak{B}$ au point E en venant de l'extérieur, le mouvement du disque est continu. Mais lorsque C traverse $\mathfrak{B}$ au point F, le disque saute soudainement à une nouvelle position. En revenant le long de la même ligne, le mouvement du

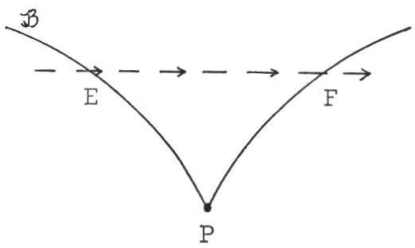

Fig. 2

disque est continu lorsque C passe par F, mais il y a saut lorsque C ressort en E. Pour chaque valeur de C, on peut mesurer l'angle $\theta = \widehat{YXZ}$ donnant la position du disque; on obtient dans un plan vertical au-dessus de la ligne EF un graphique représentant le comportement décrit plus haut:

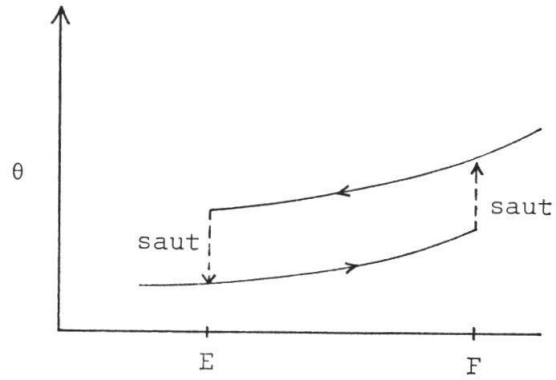

Fig. 3

Lorsque C est à gauche de E ou à droite de F, il y a seulement un point sur le graphique au-dessus de C parce que C est à l'extérieur de la fronce de $\mathfrak{B}$. Lorsque C est entre E et F, il y a deux points au-dessus de C parce que C est à l'intérieur de $\mathfrak{B}$. Lorsque C va de gauche à droite, θ se déplace continûment le long de la courbe inférieure, jusqu'au moment où C traverse $\mathfrak{B}$ en F, puis θ saute sur la courbe supérieure. Si C revient alors en arrière, θ décrit continûment la courbe supérieure jusqu'à ce que C traverse $\mathfrak{B}$ en E, puis retombe à ce moment sur la courbe inférieure.

Lorsque C varie autour de P, les phénomènes peuvent être décrits par un graphique à trois dimensions; le graphique ci-dessus n'était que la section de ce graphique à trois dimensions par le plan vertical au-dessus de EF. Ce nouveau graphique est une surface, représentée dans la fig. 4.

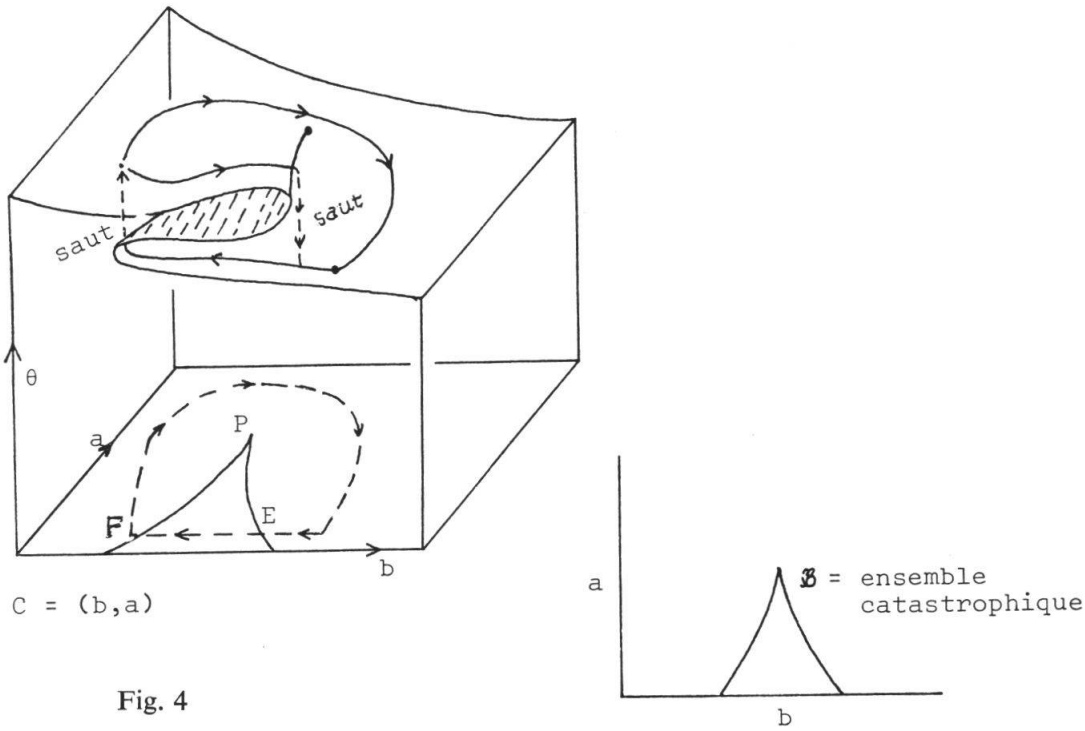

Fig. 4

Lorsque C se déplace le long de la ligne EF dans un sens ou dans l'autre, θ varie sur la surface au-dessus de EF et on observe des sauts. Cependant, après un premier saut, on peut aussi ramener le disque continûment à sa position initiale: il suffit de ramener C à sa position initiale en restant toujours à l'extérieur de la courbe $\mathfrak{B}$.

Nous avons représenté un comportement discontinu par une surface continue. En voici la raison. Si on mesure la position de C par une coordonnée verticale a et une coordonnée horizontale b, on voit que le comportement du disque (c'est-à-dire θ) dépend de deux facteurs; en d'autres termes θ est une fonction de deux variables: a et b. Supposons pour simplifier que a et b sont nuls lorsque C est en P. Pour chaque valeur du contrôle C = (a, b), il y a une énergie potentielle qui est fonction de la position du disque: $V_C(\theta)$; les positions de repos du disque sont celles qui minimalisent cette fonction énergie potentielle. La loi physique de Hooke implique que la surface du graphique (fig. 4) est donnée par l'équation

$$\frac{\partial V_C}{\partial \theta} = \theta^3 + a\theta + b = 0$$

à un changement près des coordonnées a et b. En d'autres termes, les positions de repos θ du disque sont obtenues en résolvant cette équation pour chaque valeur de a et b. Les parties ombrées sur la surface, qui n'ont pas été mises en évidence par l'expérience, représentent des positions *instables* du disque. Ce sont des positions dans lesquelles le disque peut se trouver au repos, mais dont il s'éloignerait beaucoup à la moindre perturbation. Au contraire, une position est *stable* si le disque y revient après de petites perturbations. Lorque le point de contrôle C se déplace, le disque prend instantanément une position stable.

Pour résumer: Nous avons un certain comportement — ici la position du disque — influencé par deux facteurs et déterminé par la surface du graphique (fig. 4), dite surface de la *catastrophe de la fronce;* ce comportement illustre de plus la *règle* dite *de l'attente* (voir plus bas). La raison de cette appellation est que la courbe de bifurcation $\mathfrak{B}$, autrement dit le lieu des points de catastrophe, a la forme d'une fronce près de P.

COLOMBES ET FAUCONS

Parmi les diverses catastrophes, celle de la fronce est la plus simple, mais elle a un large champ d'applications. Voici un exemple dû à ISNARD et ZEEMAN [4]; il montre que cette catastrophe et la « règle d'attente » fournissent un bon modèle pour decrire l'influence de l'opinion publique sur une administration. Pour simplifier, ne considérons que l'influence

de l'opinion publique sur la politique militaire; la méthode s'appliquerait à bien d'autres situations analogues. Soit x un degré d'activisme militaire susceptible d'être prôné par l'administration et soit P(x) le nombre des gens en faveur de cette position x. A un instant donné, on a une certaine distribution d'opinion publique, représentable par un graphique (fig. 5).

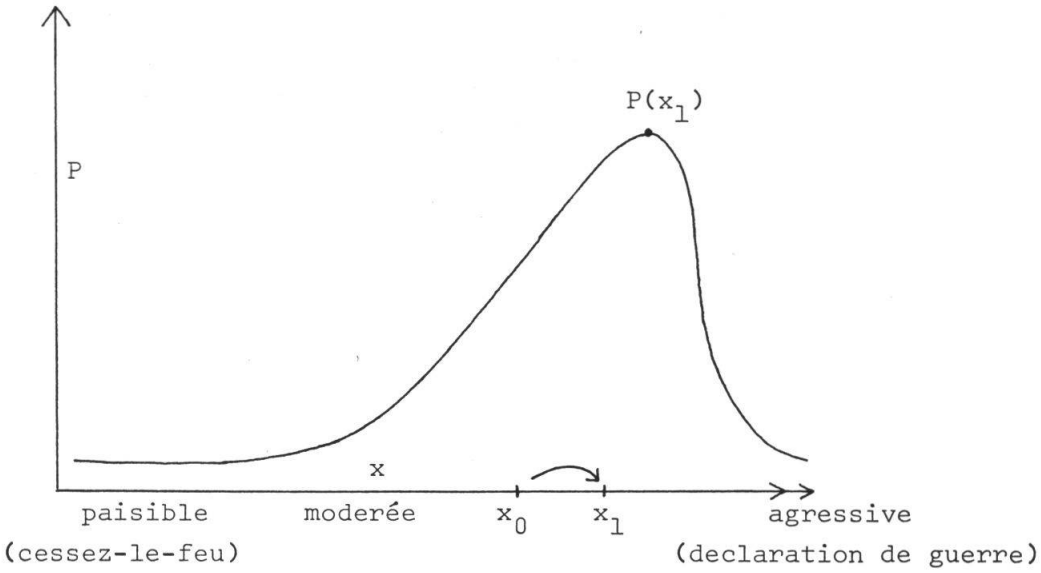

Fig. 5. — x = politique, P = support public.

Le dessin illustre une situation dans laquelle la politique la plus populaire est très agressive. On admet l'hypothèse que l'administration réagit immédiatement et automatiquement dans le sens du support public; cela signifie qu'à chaque instant la politique effectivement suivie par l'administration correspond au x pour lequel le support public P(x) est maximum. Par exemple, si l'administration poursuit une politique modérée x_0 à un certain moment où elle s'aperçoit que l'opinion publique

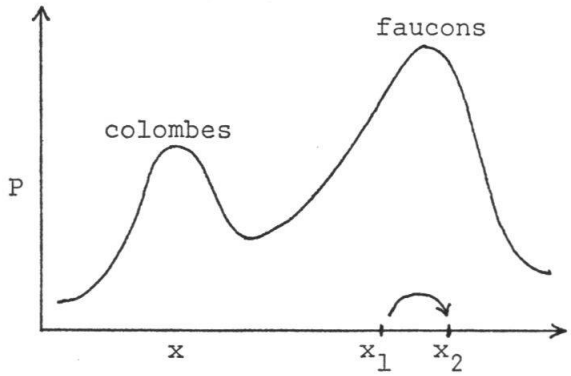

Fig. 6

est comme dans (5), elle va immédiatement changer cette politique de x_0 à x_1. Examinons cette hypothèse plus avant. Supposons qu'on soit en état de guerre x_1. Supposons aussi que la guerre devienne plus coûteuse en ressources matérielles et en vies humaines. Alors une partie du public va changer d'opinion et les sondages fourniront un nouveau graphique (fig. 6).

Ce graphique montre que l'administration continue la guerre, et que l'opinion publique est divisée entre faucons et colombes, avec une majorité de faucons. L'administration, évidemment, va changer la politique de x_1 à x_2. La guerre continue; elle renchérit encore et le graphique devient (fig. 7)

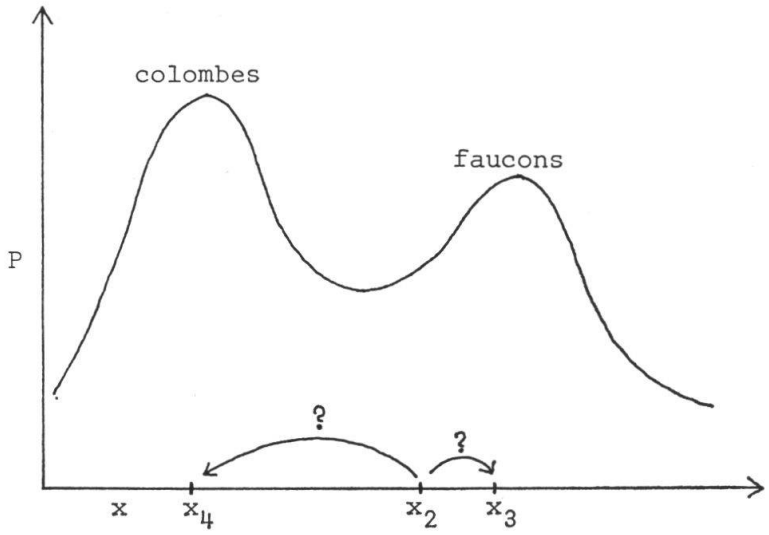

Fig. 7

Il y a maintenant plus de colombes que de faucons. On a supposé que l'administration réagit immédiatement et cherche le support public maximum. Mais voilà que se pose une question: faut-il choisir la politique x_3 (poursuite de la guerre), ou au contraire x_4 (cessez-le-feu)? Il y a deux règles distinctes qui permettent de prendre une décision, à savoir:

Règle de Maxwell : choisir la politique qui a le support maximum absolu.

Règle d'attente : choisir la politique qui accroît au mieux le support local.

ISNARD et ZEEMAN suggèrent dans [4] que les administrations suivent la règle d'attente dans la situation du graphique (fig. 7). La politique va donc changer de x_2 à x_3, même si x_4 (cessez-le-feu) devait recueillir davantage de support.

Voici des justifications pour cette hypothèse: Une situation de guerre peut être riche en fluctuations de l'opinion, de sorte que la balance entre faucons et colombes oscille sans cesse. Mais il serait embarrassant, désastreux, et sans doute même impossible de changer d'une politique de retraite à une politique d'attaque et vice versa chaque fois que la balance entre faucons et colombes penche d'un côté ou de l'autre. De fait, vu la complexité et la quantité de l'information fournie par les services de renseignements et par les sondages d'opinion, il peut être difficile de dire exactement qui l'emporte des colombes ou des faucons à un moment donné. S'il s'agit de prendre rapidement des décisions, il est plus facile d'estimer intuitivement les effets de petites variations de la ligne politique que de comprendre globalement les effets d'un changement majeur. Il est aussi plus facile et moins coûteux d'opérer un petit changement qu'un grand.

La guerre continue donc. Bien que l'administration ressente le poids d'un important contingent de colombes, elle poursuit la lutte. La guerre peut pourtant devenir si coûteuse que l'opinion publique s'unifie en demandant la paix, comme le représente le graphique suivant (fig. 8).

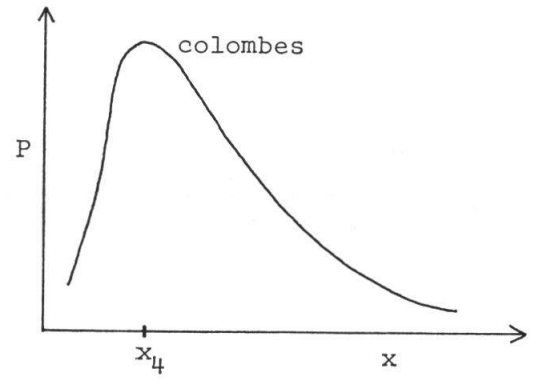

Fig. 8

Il se peut donc que l'administration arrête le combat; elle renverse sa ligne politique en se retirant ou en proposant un cessez-le-feu. Les diagrammes suivants récapitulent le processus qui mène à un changement de politique.

Le premier graphique de la fig. 9 montre une politique de combat x_1. Cette politique se prolonge en x_2, bien que le deuxième graphique décrive un désir de paix supérieur au désir de guerre. Le troisième graphique (fig. 9 bis) montre que la politique des faucons x_2 et la politique modérée de popularité minimale se rejoignent en une position d'équilibre instable. A cet instant, l'administration change brusquement de politique, rejoint celle des colombes x_4, et annonce un cessez-le-feu, une reddition ou une retraite. Mais l'administration a repoussé le

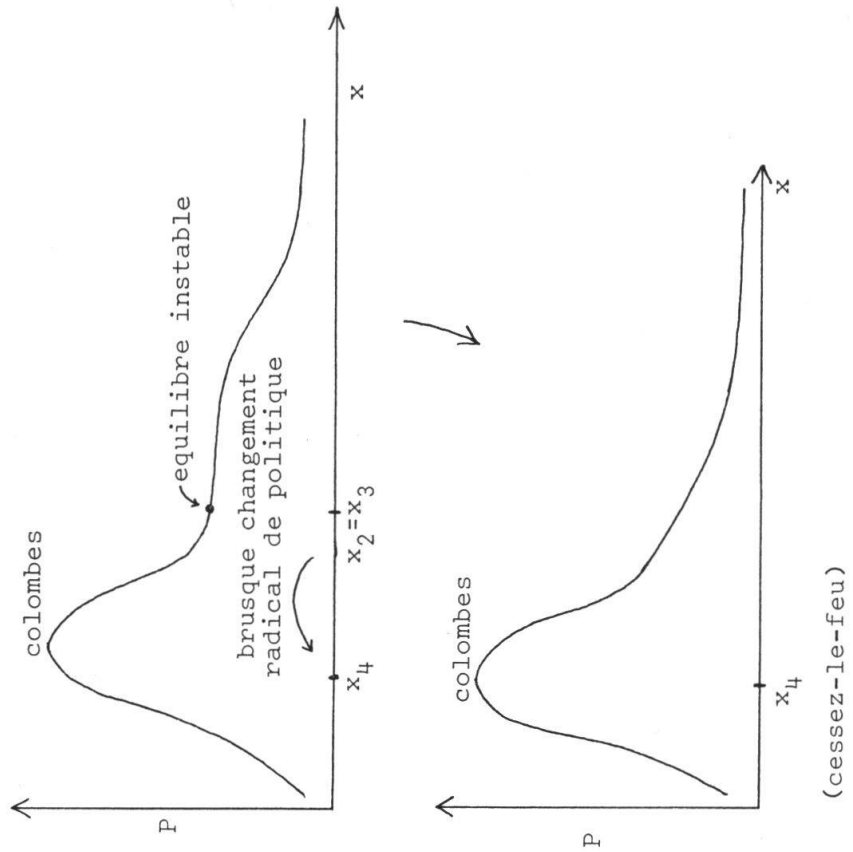

Fig. 9bis

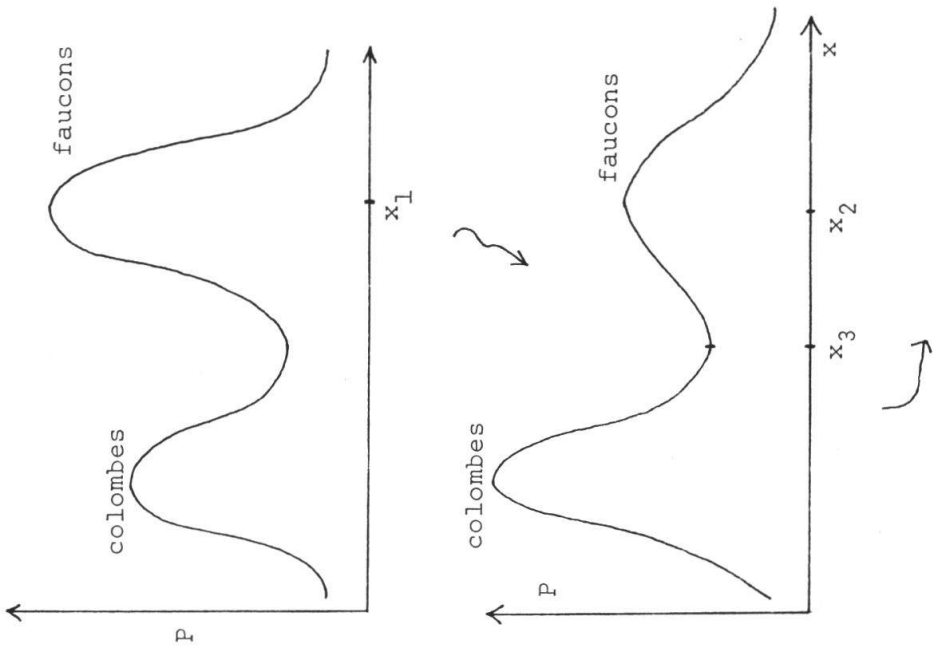

Fig. 9

changement de politique au plus tard, alors qu'elle n'a plus le choix. Cela illustre la règle d'attente, règle qu'exhibait également la machine à catastrophes.

Pour voir plus en détail comment ces comportements s'accordent à la catastrophe de la fronce, considérons quelques facteurs influençant l'opinion publique. Retenons la menace et le coût. La menace est un *facteur unifiant*. Le coût est au contraire un *facteur de division :* lorsque le coût augmente sur fond de menace modérée, l'opinion se divise entre colombes et faucons et le gouvernement doit choisir entre deux possibilités d'action; voir le passage de la fig. 5 à la fig. 6. Représentons donc le facteur menace par a et le facteur coût par b. La distribution de l'opinion publique, représentée graphiquement par P(x), dépend de a et de b. La politique effectivement suivie x (qui maximise P(x)) est donc fonction de a et b. De fait, pour a et b donnés, on trouve les politiques possibles en résolvant l'équation

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = 0$$

Si le coût est assez élevé et fixe, le graphique indiquant x en fonction de a est du type suivant:

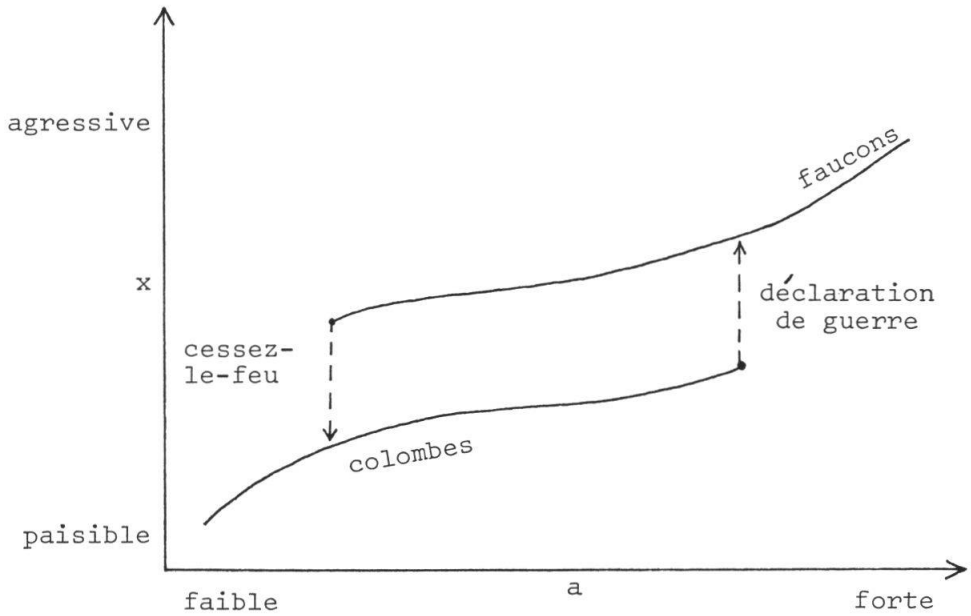

Fig. 10. — a = menace, b = coût, x = politique militaire suivie.

Notez que ce graphique est le même que celui relatif à la machine à catastrophes. Une menace croissante peut amener soudainement la déclaration de guerre. Si la menace diminue, il peut en résulter un cessez-le-feu en cas de coût excessif. La règle d'attente traduit la tendance de

l'administration à remettre le plus longtemps possible la déclaration de guerre; en suite de quoi sa tendance est hélas aussi à remettre le plus longtemps possible le cessez-le-feu.

Un théorème de THOM sur la classification des singularités [1], [6], dont nous reparlons plus bas, montre le fait suivant: il n'y a essentiellement qu'une manière de passer d'une opinion publique n'exhibant qu'un maximum à une opinion à deux maxima, ceci en cas de deux facteurs influençant l'opinion. La politique militaire x doit parcourir une portion de la surface définie par la catastrophe de la fronce, surface représentant x en fonction des facteurs a et b. Nous avons donc le graphique fig. 11:

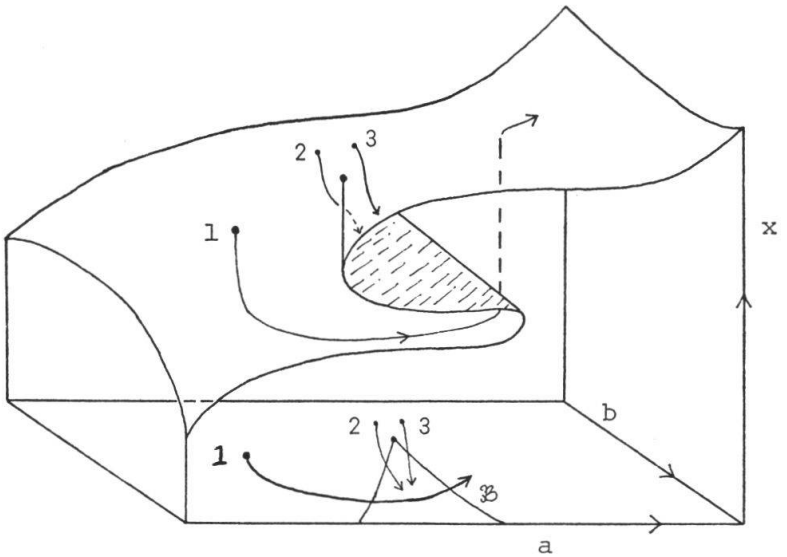

Fig. 11. — a = menace, b = coût, x = politique militaire.

L'ensemble catastrophique $\mathfrak{B}$, dans le plan (a, b), est une courbe appelée fronce. Ce sont les combinaisons de a (= menace) et b (= coût) qui déterminent les changements de politique. On retrouve les particularités de la machine à catastrophes: Si (a, b) se trouve à l'intérieur de la courbe $\mathfrak{B}$, alors il y a deux politiques recueillant chacune un maximum local de support public; si (a, b) est à l'extérieur de $\mathfrak{B}$, il n'y en a qu'une. Les points ombrés sur la surface représentent des politiques rassemblant le minimum d'appui; elles ne sont pas importantes si l'administration tend à maximiser le support. L'écartement des branches à partir de la pointe de la courbe $\mathfrak{B}$ illustre très nettement qu'une augmentation des coûts entraîne un allongement du délai nécessaire à un changement de politique.

Ce qui fait l'efficacité de la démarche de ISNARD et ZEEMAN dans cet exemple, c'est qu'ils sont partis de certaines hypothèses sociologiques, qu'ils ont ensuite utilisé une théorie mathématique de classification de

singularités pour opérer une synthèse de la dynamique entre l'opinion publique et la politique militaire, et que cette synthèse se résume selon le diagramme suivant (fig. 12):

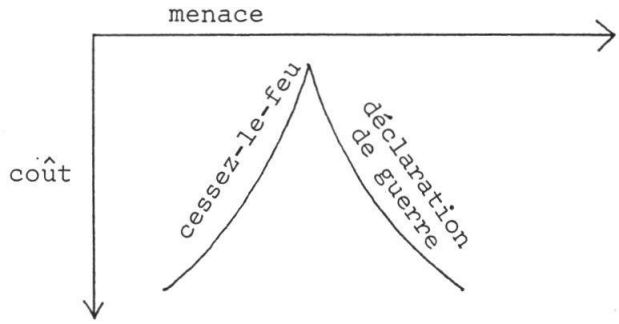

Fig. 12

On rencontre souvent dans les sciences sociales les phénomènes de *renversement* et de *divergence ;* en voici deux illustrations. Considérons trois chemins dans le diagramme qui nous intéresse (fig. 13).

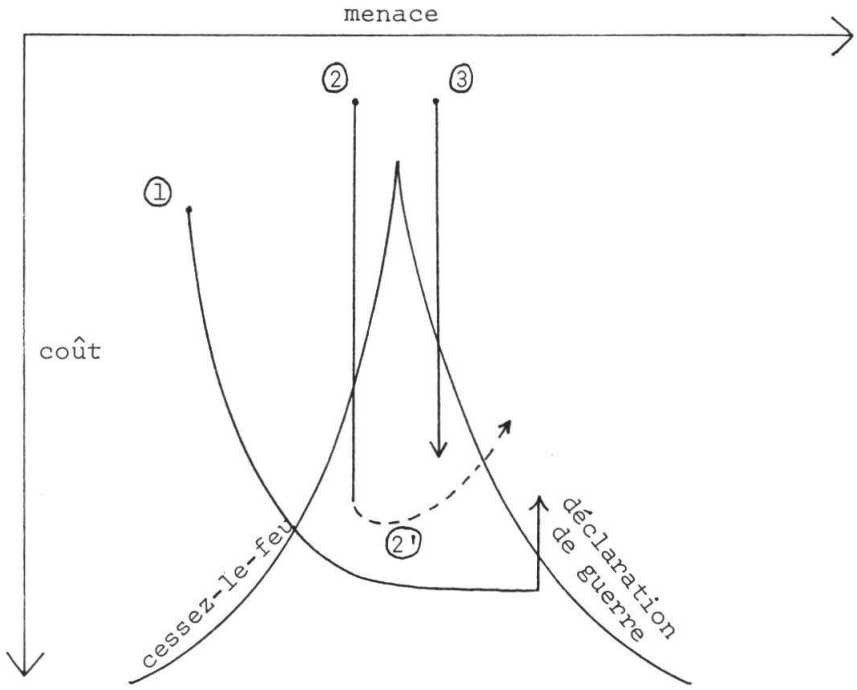

Fig. 13

Chemin (1): Le coût augmente très rapidement, la menace aussi. Il n'y a pas encore de guerre. Supposons maintenant qu'un pays tiers donne des armes au pays dont nous suivons la politique, ceci pour obtenir une quelconque faveur. Le coût diminue alors pendant une

période de menace constante (la flèche verticale). Il y a soudainement déclaration de guerre. Notez bien que, comme avec la machine à catastrophes, il n'y a de changement soudain que si les facteurs influents, c'est-à-dire le « contrôle », quittent l'intérieur de $\mathfrak{B}$. Voilà pour le « renversement ».

Chemins (2) et (3): Deux pays, dans des positions comparables, sont en train de négocier un conflit. Mais la politique des faucons domine dans l'un d'eux (celui qui suit le chemin (3)), qui adopte ainsi une attitude agressive. L'autre pays (chemin (2)) cède quelque peu. Il en résulte deux positions divergentes (éloignées sur la surface), alors que les positions initiales étaient voisines. Notez que les négociateurs du pays « agressif » ne doivent pas exagérer leurs pressions, car cela pourrait infléchir le chemin (2) en un chemin (2'), résultant en une déclaration de guerre. Voilà pour la « divergence ».

FLIRT, BOURSE ET LIQUÉFACTION

Par les exemples de ZEEMAN, nous avons essayé d'illustrer comment on peut suivre la dynamique de certains phénomènes en les représentant par un chemin dans le plan où nous avons dessiné la fronce et en gardant en mémoire la surface associée. Examinons encore trois autres exemples.

Relations amoureuses. Dans le diagramme (fig. 14), le chemin qui traverse la fronce décrit le scénario suivant: Le garçon s'intéresse à la fille, mais elle ne s'intéresse pas beaucoup à lui au départ. Ils sortent ensemble, il lui donne des cadeaux; son intérêt à elle croît; mais elle reste réservée. La situation est celle du point A. Après de tels efforts et un succès si médiocre, le garçon se décourage et l'intensité de ses avances diminue. Soudainement, lorsque le chemin sort de l'intérieur de la courbe, le couple annonce la date du mariage.

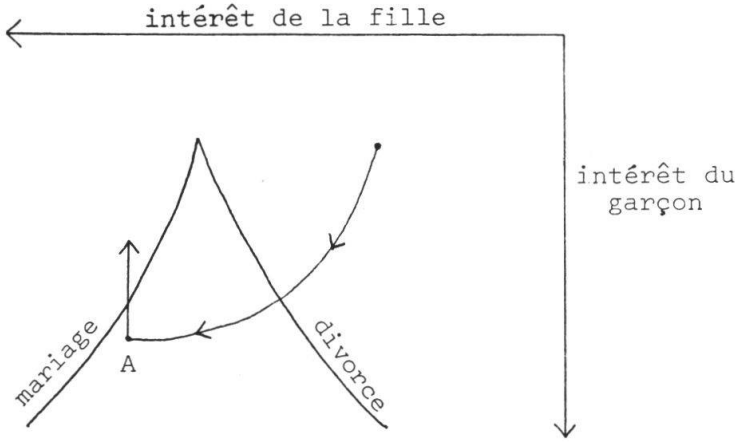

Fig. 14

Economie. Cet exemple, encore de ZEEMAN, a paru dans le petit journal de mathématiques « Manifold » (n° 14), publié à l'université de Warwick. Pour un exemple traitant la bourse en termes de la catastrophe de la fronce, voir [7]. On estime préférable pour l'économie d'exhiber une inflation faible et une croissance rapide. En superposant les diagrammes ci-dessous, on obtient le diagramme (fig. 15):

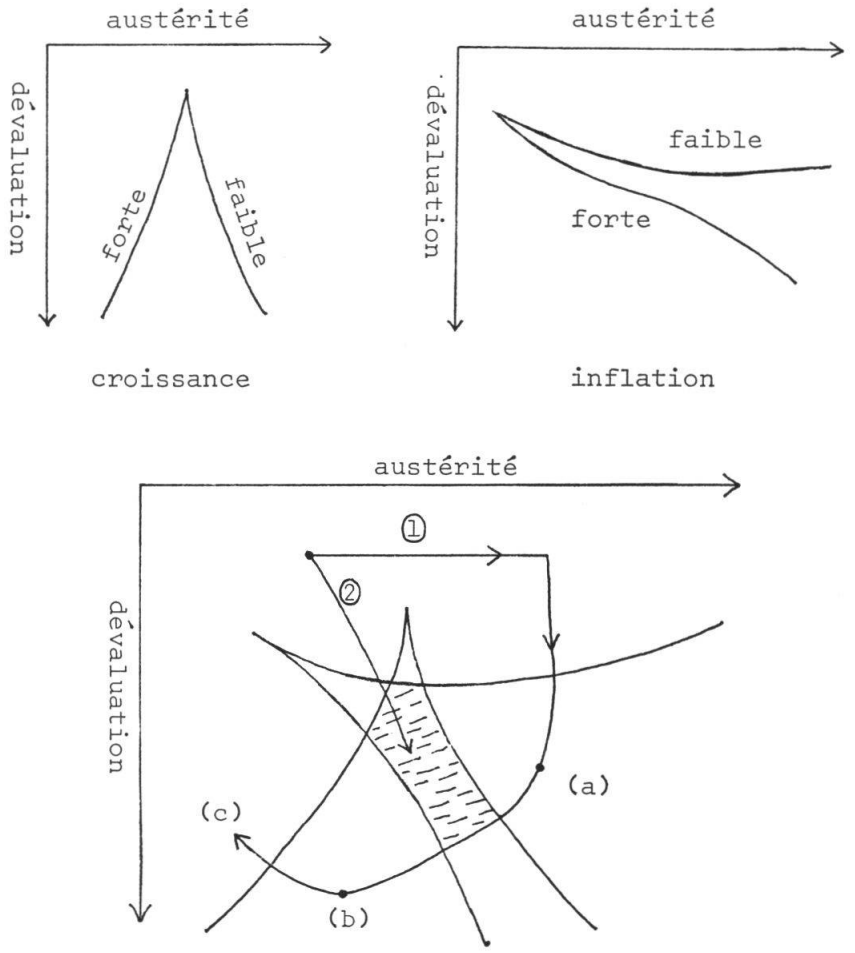

Fig. 15

Pour jouir à la fois d'une croissance rapide et d'une inflation faible, il faut être dans la région hachurée. Le chemin (1) décrit d'énergiques mesures d'austérité, suivies d'une dévaluation avec relâchement des premières mesures. Il en résulte une croissance lente avec peu d'inflation (a). Si le relâchement des mesures d'austérité se poursuit, le résultat est une croissance lente avec inflation forte (b). Une réévaluation destinée à renforcer l'économie produit une croissance rapide avec inflation forte (c). Pour obtenir une croissance rapide avec inflation faible, il faut suivre le chemin (2).

Transition de phases : liquide-gaz. La dynamique peut encore être décrite avec la catastrophe de la fronce, mais en appliquant cette fois la règle de Maxwell. Ceci parce qu'on utilise des méthodes de moyenne pour calculer des variables telles que la densité. Ainsi la surface qui décrit le comportement du fluide est la suivante (fig. 16):

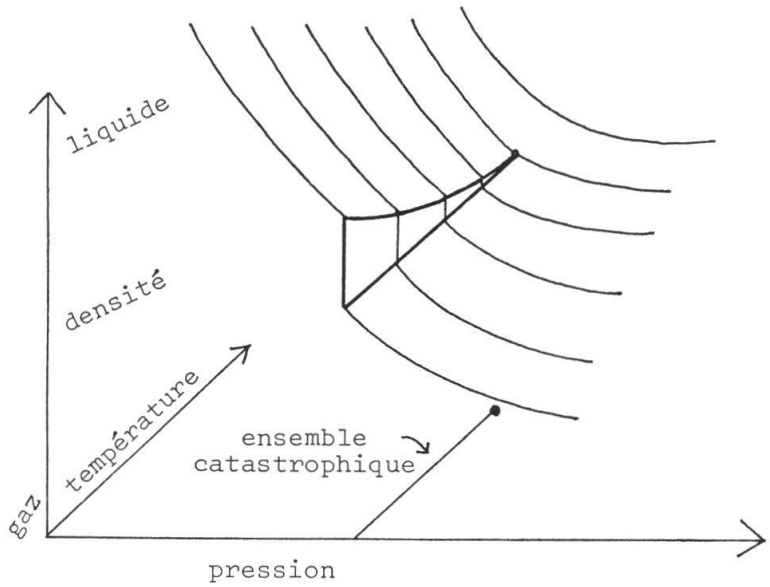

Fig. 16

Cette surface illustre donc l'équation de van der Waals. Remarquons toutefois que, lors de certains états sursaturés, on observe des phénomènes de délai: la règle d'attente joue aussi, parfois, un certain rôle.

Les catastrophes élémentaires

Retournons à l'exemple de l'influence de l'opinion publique sur la politique; mais tenons compte cette fois d'une possibilité de position de compromis entre colombes et faucons. Les graphiques de sondage changeraient donc comme suit (fig. 17):

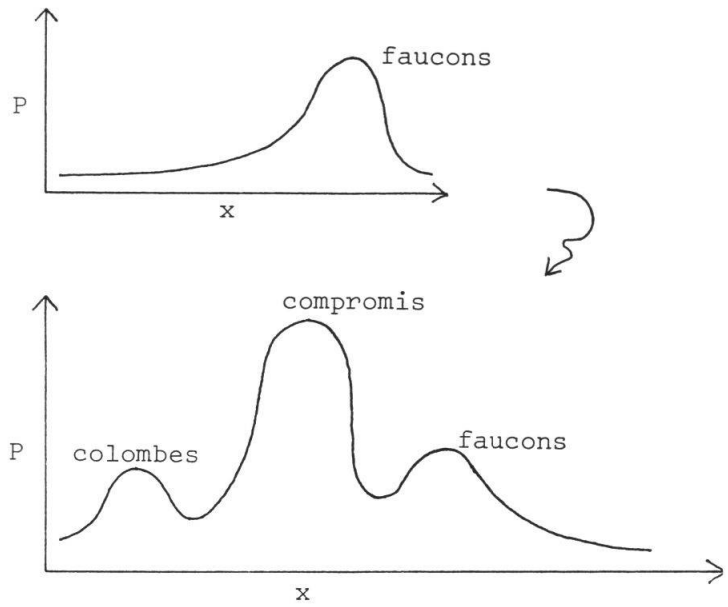

Fig. 17

La classification des singularités de THOM implique qu'il faut tenir compte d'au moins quatre facteurs influençant l'opinion pour bien suivre la dynamique de cette situation. Ces quatre facteurs sont la menace et le coût, comme plus haut, plus l'invulnérabilité et le temps. De même que dans le cas de la catastrophe de la fronce, *la clé pour une compréhension de la dynamique est fournie par l'ensemble catastrophique* $\mathfrak{B}$ *et sa position dans le domaine des facteurs d'influence.* C'est ici un objet à trois dimensions dans un espace à quatre dimensions; il est donc difficile de le représenter. Une section plane révèle pourtant la forme d'un papillon:

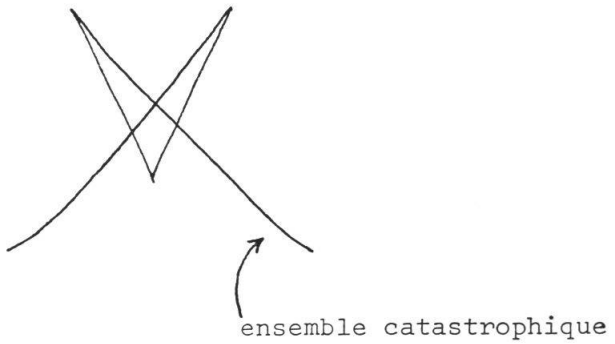

Fig. 18. — Vulnérabilité et temps constants, menace et coût variables.

On dit donc que la situation avec compromis est justiciable de la *catastrophe du papillon* [4].

Quittons là l'administration cherchant à maximiser le support public. On pourrait aussi examiner le cas d'un gouvernement qui a ses propres idées et qui veut les imposer au peuple. La catastrophe du papillon fournit de nouveau un modèle. On considère l'opposition x du peuple contre le gouvernement et quatre facteurs qui l'influencent; par exemple: le malaise économique, les promesses de réformes, l'échec des réformes et la pression du gouvernement. Le papillon fournit encore des modèles pour décrire les négociations entre la direction et les travailleurs d'une usine, ou les manifestations d'étudiants dans certaines universités [4].

Les exemples mentionnés jusqu'ici se réfèrent à l'une des catastrophes de la fronce ou du papillon. De fait, il existe une *classification de certains types de catastrophes*. Tous les exemples précédents mettent en scène un système dont le comportement x est influencé par une variable de contrôle C. Pour un C donné, le système tend à maximiser (ou minimiser) une certaine « fonction-potentiel » $P_C(x)$. Pour la machine à catastrophes, P_C est l'énergie potentielle des élastiques; dans l'exemple de la défense nationale, P_C est la distribution d'opinion publique. Dans d'autres cas, la variable x peut être pluri-dimensionnelle, de même que C. Pour comprendre le comportement du système via $P_C(x)$, il faut connaître l'ensemble catastrophique associé à une telle *famille de potentiels*.

Soit $\mathcal{C}$ *l'ensemble des contrôles*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les valeurs possibles des paramètres de contrôle. Soit $\mathfrak{X}$ *l'ensemble des états* du système considéré. Dans le cas de la machine à catastrophes, $\mathcal{C}$ a deux dimensions et $\mathfrak{X}$ une. On détermine en premier lieu la *« surface » catastrophique* S: c'est l'ensemble des couples (C, x) dans $\mathcal{C} \times \mathfrak{X}$ tels que

$$\frac{\partial P_C(x)}{\partial x} = \text{grad } P_C(x) = 0$$

La dimension de S est celle de $\mathcal{C}$. On peut alors trouver *l'ensemble catastrophique*, ou *de bifurcation*, noté $\mathfrak{B}$; c'est l'ensemble des points C dans $\mathcal{C}$ ayant la propriété suivante: il existe x dans $\mathfrak{X}$ avec (C, x) dans S « au-dessus » de C et tel que la projection de S sur $\mathcal{C}$ ait une « singularité » en (C, x); par exemple, le pli du graphique (4) est une telle singularité.

Il est donc naturel de chercher à classer qualitativement (c'est-à-dire à un changement de coordonnées près) les familles paramétrées par C de potentiels $P_C(x)$, x et C étant pluri-dimensionnels. Plus précisément, il s'agit de classer à un changement de coordonnées près les projections possibles de S sur $\mathcal{C}$ associées à des familles « génériques » de potentiels. La solution de ce problème de classification existe: elle est due à THOM [1] et MATHER [1]; voir aussi ZEEMAN [13]. Si $\mathcal{C}$ est de dimension supérieure ou égale à six, il y a un nombre infini de types distincts de catastrophes. Mais si $\mathcal{C}$ est de dimension cinq au plus, il n'y a qu'un nombre fini de types distincts:

dimension de $\mathcal{C}$	1	2	3	4	5	6
types distincts de catastrophes	1	2	5	7	11	∞

Fig. 19

L'un des résultats fondamentaux est que le nombre de types ne dépend que de la dimension de $\mathcal{C}$, et pas du tout de celle de $\mathfrak{X}$. Dans le cas où la dimension de $\mathcal{C}$ est inférieure ou égale à 5, la théorie montre d'ailleurs le fait suivant: si un système peut être décrit par un ensemble $\mathfrak{X}$ quelconque et par une famille de potentiels comme plus haut, alors ses caractéristiques sont déjà observables avec un système plus simple pour lequel le $\mathfrak{X}$ correspondant est de dimension 1 ou 2; ceci parce que la dynamique du système est décrite par la « surface » catastrophique.

Considérons par exemple les concentrations x des cent protéines d'intérêt à différents endroits d'un *embryon en développement* : $\mathfrak{X}$ est de dimension cent. L'espace des contrôles $\mathcal{C}$ est l'« espace-temps », qui est de dimension 4. Il résulte donc de la théorie de THOM [5] et du tableau (fig. 19) qu'il n'y a que sept modifications fondamentales susceptibles d'apparaître au cours du processus de développement de l'embryon. La géométrie de ces sept « catastrophes élémentaires » est extrêmement riche; voici la liste des familles de potentiels associées:

nom	dim $\mathcal{C}$	dim $\mathfrak{X}$	potentiel
pli	1	1	$\frac{1}{3}x^3 + ax$
fronce	2	1	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$
queue d'aronde	3	1	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$
papillon	4	1	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx$
ombilic hyperbolique	3	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$
ombilic elliptique	3	2	$x^3 - 3xy^2 + ax + by + c(x^2+y^2)$
ombilic parabolique	4	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

Fig. 20. — Catastrophes élémentaires: les coordonnées sur $\mathcal{C}$ sont a, b, c, d; les coordonnées sur $\mathfrak{X}$ sont x, y.

Les *caustiques lumineuses* fournissent un autre exemple de l'occurrence des catastrophes dans la nature. La figure 21 représente une section plane de caustique qui est de nouveau une fronce: on l'observe à la séparation des régions d'ombre et de lumière derrière un verre de vin rouge exposé aux rayons du soleil. On savait depuis la fin du dix-neuvième siècle qu'il y a cinq types fondamentaux de caustiques. Localement, ces surfaces lumineuses sont précisément les ensembles catastrophiques des cinq « catastrophes élémentaires » en dimension trois.

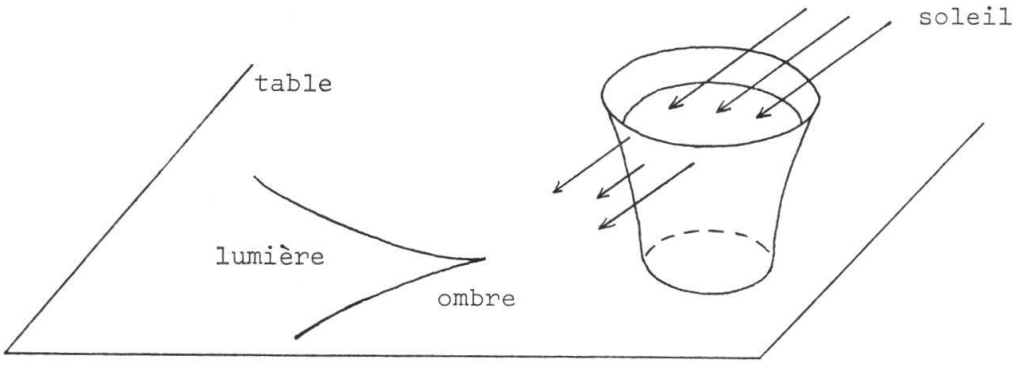

Fig. 21

INFLUX NERVEUX

Notre dernier exemple a de nouveau trait à la catastrophe de la fronce; nous suivrons ZEEMAN dans son étude de l'influx nerveux [9]. Dans le cerveau, les messages entre cellules sont transmis par les *axones* (22); ce processus de transmission est fondamental à la compréhension du fonctionnement du cerveau. Une des contributions majeures à l'étude de ces questions est celle de HODGKIN et HUXLEY [3], qui date des années 50; leurs expériences et leurs travaux théoriques leur ont valu le prix Nobel.

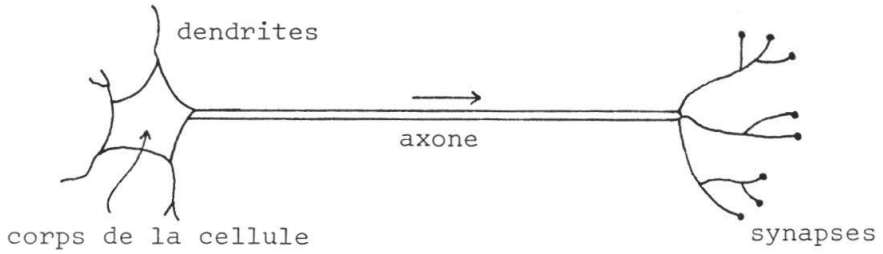

Fig. 22

C'est en particulier eux qui ont mis en évidence l'importance des relations entre les trois grandeurs suivantes: la *différence de potentiel* entre les faces interne et externe de la membrane superficielle de l'axone, la

perméabilité de cette membrane aux *ions sodium* d'une part, aux *ions potassium* d'autre part. Lors de la transmission d'un message, de complexes phénomènes électro-chimiques se manifestent par des variations de ces trois grandeurs, variations à la fois dans le temps et le long de l'axone; on observe à chaque message une suite de « pics » qui se propagent d'une extrémité à l'autre.

Expérimentalement, on peut placer deux électrodes en un endroit de l'axone, l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur de la membrane. Lorsqu'un pic parcourt l'axone, la différence de potentiel entre ces deux électrodes augmente très rapidement, puis diminue plus lentement. Entre-temps, la perméabilité aux ions sodium augmente soudainement, puis revient à sa valeur d'équilibre; quant à la perméabilité aux ions potassium, elle augmente lentement avant de diminuer tout aussi lentement. Ce processus est complexe; on peut isoler trois propriétés dynamiques: (a) un équilibre stable; — (b) le déclenchement rapide d'un certain mécanisme à partir d'un certain seuil d'excitation; — (c) un retour lent à l'équilibre. Prenant ces trois propriétés comme point de départ, ZEEMAN construit le modèle mathématique « le plus simple » qui les exhibe. Ce modèle est un système de trois équations différentielles qui décrit comment les trois grandeurs fondamentales évoluent. La catastrophe de la fronce est l'un des ingrédients sous-jacents essentiels à ce système différentiel; le fait qu'il soit « le plus simple » résulte de la classification des catastrophes élémentaires.

A chaque instant, l'état d'une petite portion d'axone est donc défini par un point dans l'espace à trois dimensions. Les trois coordonnées de ce point sont la différence de potentiel et les deux perméabilités mentionnées plus haut; voir le diagramme (fig. 23). Le processus commence à l'équilibre, c'est-à-dire au point A sur la surface. Lorsqu'un pic traverse la portion d'axone qui nous intéresse, on observe d'abord une brusque augmentation de la différence de potentiel: saut au point B.

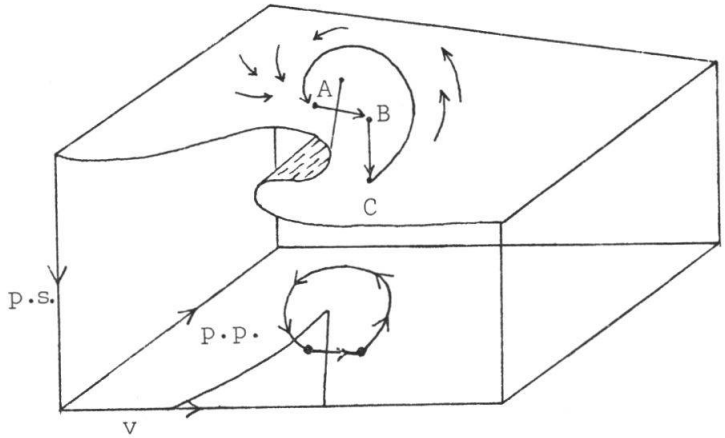

Fig. 23. — v = potentiel; p.p. = perméabilité aux ions potassium; p.s. = perméabilité aux ions sodium.

La perméabilité aux ions sodium croît alors rapidement: le point représentatif tombe en C, sur la surface. Enfin, le retour à l'équilibre, en d'autres termes au point A, se déroule sur la surface.

ZEEMAN obtient de plus des résultats quantitatifs. HODGKIN et HUXLEY avaient d'une part établi, à partir de leurs données expérimentales, la courbe des variations dans le temps de la différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur d'une portion d'axone; ils avaient aussi proposé un modèle théorique consistant en un système de dix équations différentielles, et l'avaient utilisé pour calculer une courbe théorique décrivant ces mêmes variations, proche de la courbe expérimentale. Le fait remarquable dans le travail de ZEEMAN est que sa courbe théorique est encore plus proche de la courbe expérimentale que la courbe théorique de HODGKIN et HUXLEY.

L'idée de ZEEMAN est de partir de la dynamique des phénomènes étudiés plutôt que de la biochimie. Son modèle a l'avantage de la simplicité; il suggère également de nouvelles expériences [9] pour tester certaines hypothèses heuristiques de HODGKIN et HUXLEY. Son modèle est enfin indépendant du contexte dans la mesure où sa construction est celle d'un système différentiel abstrait exhibant les trois propriétés dynamiques de base énumérées plus haut; ZEEMAN suggère ainsi que son modèle pourrait être utile à l'étude de l'épilepsie ou de la migraine.

APOLOGIE

Dans cette conférence introductive, nous avons discuté quelques exemples de la théorie des catastrophes. Nous désirons illustrer comment la théorie des singularités, qui s'est considérablement développée dans les années soixante comme un chapitre de mathématiques pures, s'est révélée être un nouvel outil applicable à de multiples domaines. Présentement, de nombreux chercheurs travaillent activement dans ce contexte. Le sujet se développe, les méthodes s'affinent, la critique s'aiguise; les conséquences en sont importantes et vont continuer à marquer profondément les mathématiques, aussi bien pures qu'appliquées.

RÉFÉRENCES

[1] BRÖCKER, Th. et LAUDER, L. — Differentiable germs and catastrophes, *London Mathematical Society Lecture Notes Series* 17, Cambridge University Press, 1975.

[2] HARRISON, P. J. et ZEEMAN, E. C. — Applications of catastrophe theory to macroeconomics, Symposium on Applications of Global Analysis, Utrecht, 1973.

[3] HODGKIN, A. L. et HUXLEY, A. F. — A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, *117* (1952), pp. 500-544.

[4] ISNARD, C. et ZEEMAN, E. C. — Some models from catastrophe theory in the social sciences, Edinburgh Conference on Models in Social Sciences, 1972 (éd. L. Collins), Series — social issues in the seventies: (Tavistock, London, 1974).

[5] THOM, R. — Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, New York, 1972.

[6] —. — Topological models in biology, *Topology*, *8* (1969), pp. 313-335.

[7] ZEEMAN, E.C. — On the unstable behaviour of the stock exchange. *Journal of Mathematical Economics*, 1 (1974), pp. 39-49.

[8] —. — Applications of catastrophe theory, Tokyo International Conference on Manifolds, 1974.

[9] —. — Differential equations for heartbeat and nerve impulse, Towards a theoretical biology, 4 (éd. C. H. Waddington), Edinburgh, 1972.

[10] —. — A catastrophe machine, Towards a theoretical biology, 4 (éd. C. H. Waddington), pp. 276-282.

[11] —. — Conflicting judgments caused by stress, preprint from Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, 1974.

[12] —. — Geometry of catastrophe, *Times Literary Supplement*, 10 December 1971.

[13] —. — The classification of elementary catastrophes of codimension at most five, Lectures by E. C. Zeeman, notes written and revised by D. J. A. Trotman, University of Warwick.

[14] MANNING, A. K. (editor) — Dynamical systems and catastrophe theory, Springer-Verlag Lectures Notes in Mathematics, Vol. 468, 1975.

Vient de paraître:

ZEEMAN, E. C. — Catastrophe Theory. *Scientific American*, avril 1976.

Manuscrit reçu le 12 mars 1976.