Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 27 (1901)
Heft: 20

Artikel: L'intégraphe Abdank Abakanowicz
Autor: Lossier, Henry
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22148

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

n° 22 ; c'est le stand moderne le plus perfectionné, le stand de St-Georges un jour de grand tir, et les nombreux personnages sont autant de portraits que les initiés reconnaîtront facilement.

Ce n'est point tout. Les Exercices possèdent une galerie de portraits de leurs rois, qui contribue à son tour à la décoration de la grande salle. Il y a là quelques bons morceaux de peinture et de précieux documents iconographiques.

Comme on le voit par cette rapide promenade, les Exercices sont bien logés. Leur hôtel complète les installations de Saint-Georges, dues les unes et l'autre à l'habile architecte, M. Gédéon Dériaz, dont nous donnons le portrait. Ajoutons qu'il fut entouré de collaborateurs zélés, mais qui nous excuseront, vu leur nombre, de ne pas donner leurs noms.

Les clichés qui illustrent cet article ont été exécutés d'après d'excellentes photographies de M. Fréd. Boissonnas. *(Patrie Suisse.)*

L'intégraphe Abdank Abakanowicz

par Henry LOSSIER, Ingénieur Civil

(Suite)

Effets tranchants et moments fléchissants

Considérons (fig. 1) une poutre droite $A\ B$ encastrée en B et soit $m.n$ sa ligne de charge dont nous désignerons l'ordonnée par η.

Pour une section S située à une distance a du point A, l'effort tranchant Q est égal à :

$$Q = \int_0^a \eta\, dx$$

et le moment fléchissant M relatif à la même section :

$$M = \int_0^a \eta\, dx.x.$$

D'après ce qui précède, on voit que la première courbe intégrale $I\,I'$ de $m.n$ est la courbe des efforts tranchants et la seconde $II\,II'$ celle des moments fléchissants.

Cette double intégration revient à tracer la courbe funiculaire de $m.n$.

En effet, l'équation de cette courbe étant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\eta}{H}$$

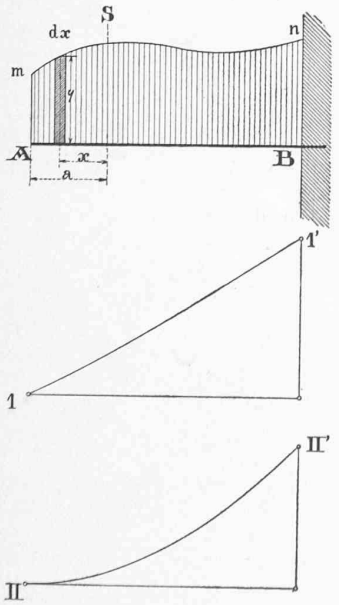

FIG. 1

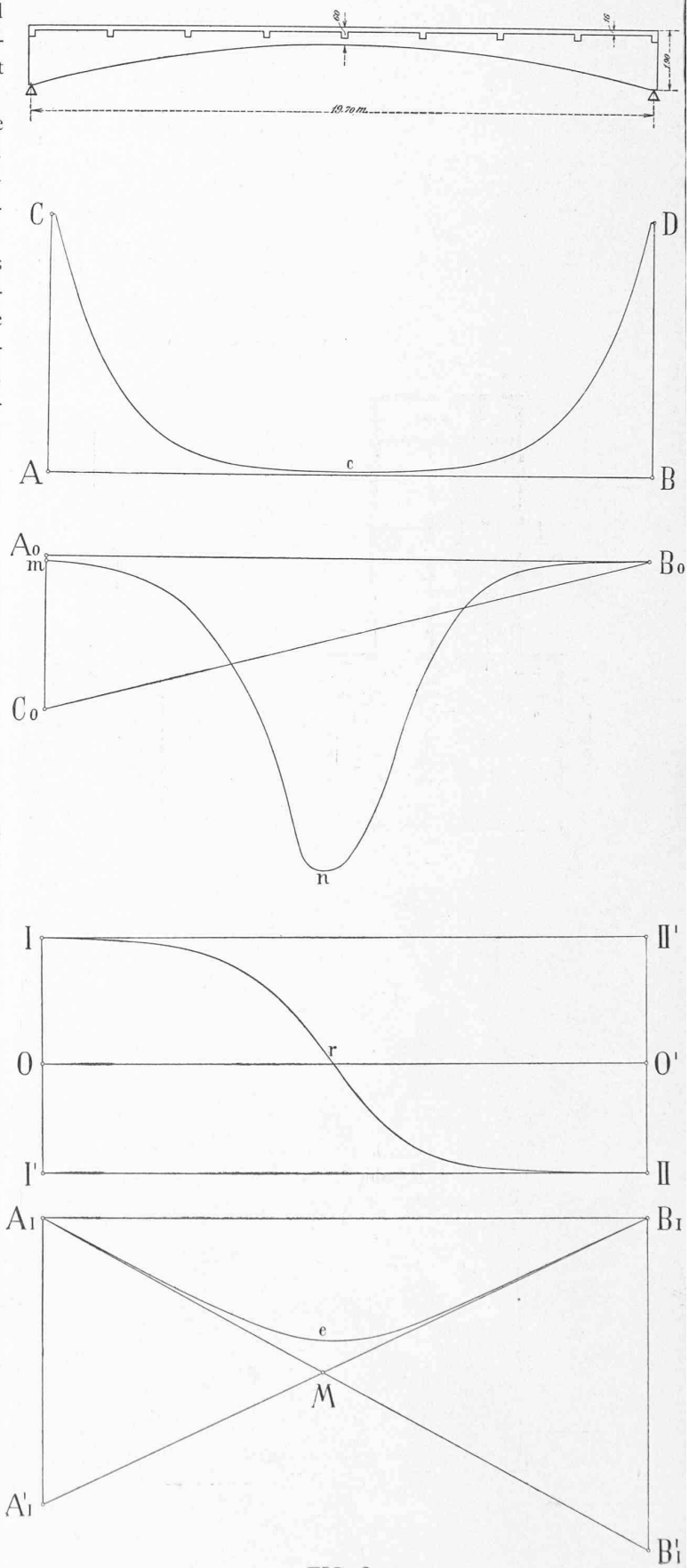

FIG. 2

(H = distance polaire du polygone des forces), nous obtiendrons la courbe funiculaire en intégrant 2 fois la courbe d'ordonnée η.

Ligne élastique

L'équation de la ligne élastique est donnée généralement sous la forme :

$$\frac{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\pm M}{JE}.$$

Dans cette équation M représente le moment fléchissant, J le moment d'inertie et E le coëfficient d'élasticité.

La déformation d'une poutre étant ordinairement très faible, le rapport $\dfrac{dy}{dx}$ est très petit et l'on peut, sans commettre d'erreur notable, considérer le dénominateur comme étant égal à 1.

L'équation devient alors :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M}{JE}.$$

Si le moment d'inertie J est constant, il suffit d'intégrer 2 fois la courbe des moments fléchissants.

Si, par contre, le moment d'inertie est variable, on construit la courbe d'ordonnée $\xi = \dfrac{M \cdot Jc}{J}$, Jc étant un moment d'inertie quelconque, mais *constant*. La ligne élastique s'obtient en intégrant 2 fois cette dernière courbe.

Comme le tracé des lignes d'influence se ramène, dans la plupart des cas, à la détermination de lignes élastiques, on conçoit tout le parti que l'on peut tirer de ce qui précède.

Exemple

Nous avons choisi comme exemple un problème qui se présente dans le calcul des poutres continues à section variable (méthode du professeur W. Ritter).

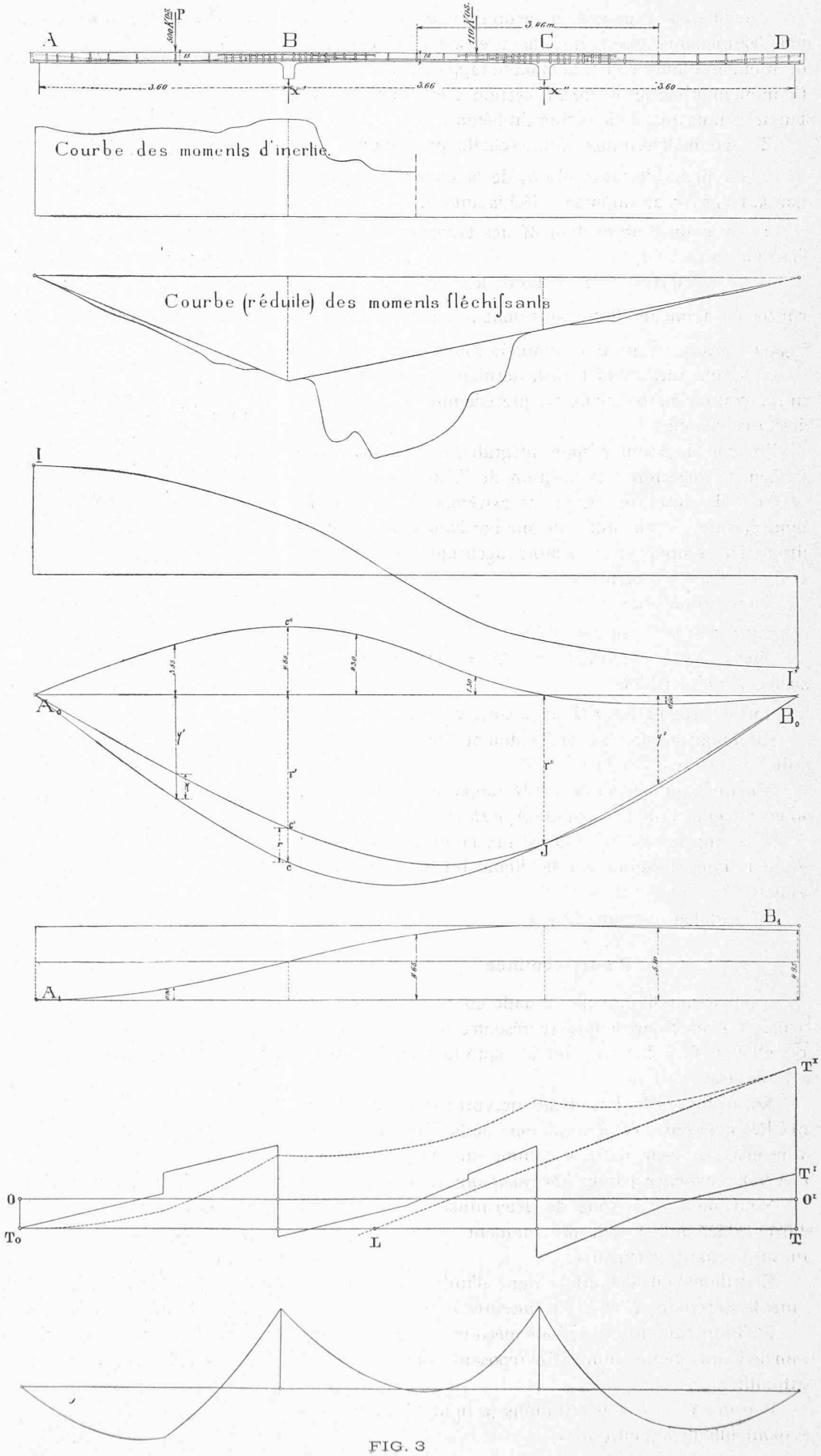

FIG. 3

Considérons la poutre en béton de ciment armé, système Hennebique, représentée fig. 2 et soit $Cc\,D$ la courbe du moment d'inertie correspondante rapportée à l'axe $A\,B$ (le moment d'inertie de chaque section a été calculé en ne tenant compte que de la section du béton).

Il s'agit de déterminer, à une échelle quelconque :

1° La ligne élastique $A_1 e\,B_1$ de la poutre correspondant à la surface des moments fléchissants $A_0\,C_0\,B_0$.

2° Le point d'intersection M des tangentes à la ligne élastique en A_1 et B_1.

Nous réduisons tout d'abord les ordonnées de la courbe des moments fléchissants dans le rapoort $\frac{Jc}{J}$ ($Jc = {}^{35}/_{1000}$ de $Jmax$), ce qui nous donne la courbe $m.n.B_0$.

La double intégration de cette dernière courbe nous conduira, comme nous l'avons vu précédemment, à la ligne élastique cherchée.

Traçons la première ligne intégrale $I\,r\,II$ de $m.n.\,B_0$. Il s'agit de déterminer la position de l'axe des abscisses $O\,O'$ de telle sorte que les points extrêmes A_1 et B_1 de la ligne élastique soient situés sur une horizontale. Cette condition sera remplie si la somme algébrique des surfaces $O\,I\,r$ et $O'\,II\,r$ est égale à zéro.

Nous aurons donc :

Surface OIr = surface $O'IIr$.

Surface OIr + surface $IrO'II'$ = surface $O'IIr$ + surface $IrO'II'$; d'où :

Surface rectangle $O\,I\,II'\,O'$ = surface $I\,r\,II\,II'$.

La longueur cherchée $O\,I$ s'obtient donc en divisant l'aire $I\,r\,II\,II'$ par la distance $I\,II'$.

En intégrant la courbe $I\,r\,II$ rapportée à l'axe $O\,O'$, nous obtenons la ligne élastique $A_1\,e\,B_1$ cherchée.

Les tangentes $A_1 B_1'$ et $B_1 A_1'$ aux points extrêmes A_1 et B_1 de la ligne élastique sont les lignes intégrales des horizontales $I\,II'$ et $II\,I'$.

Le problème est ainsi résolu.

Poutre continue

Considérons la tranche de dalle en béton de ciment armé, système Hennebique, représentée fig. 3. (Les figures relatives à ce chapitre sont la reproduction à l'échelle 1/4, des tracés originaux.)

En négligeant la flexion des nervures et la résistance qu'elles opposent aux déformations de la dalle, nous pouvons envisager cette dernière comme une *poutre continue à section variable reposant librement sur ses appuis.*

Nous nous proposons de déterminer la courbe des efforts tranchants et celle des moments fléchissants pour un cas de charge particulier.

Calculons tout d'abord la ligne d'influence relative à l'une des réactions X' et X'' des mesures B et C.

L'élimination des 2 réactions méconnues X' et X'' nous ramène à une poutre simple $A\,D$ reposant librement en ses extrémités.

Faisons $X' = 1$ et déterminons la ligne élastique correspondante de la poutre $A\,D$.

Pour cela, nous traçons d'abord, comme nous l'avons indiqué précédemment, la courbe d'ordonnée $\xi = \frac{MJc}{J}$.

$J\,c$ = moment d'inertie constant quelconque,

J = moment d'inertie variable.

(Le calcul des ordonnés ξ s'effectue le plus rapidement avec la règle à calcul.)

Dans notre exemple nous avons choisi pour $J\,c$ le moment d'inertie maximum.

La double intégration de la courbe d'actionnée ξ nous conduit à la ligne élastique cherchée $A_0\,c\,J\,B_0$. L'axe des abscisses de la première courbe intégrale II' a été déterminé comme dans l'exemple précédent.

Supposons qu'il agisse maintenant sur notre poutre $A\,D$ les 3 forces verticales P, X' et X''. En appliquant le théorème de notre Maxwell sur la réciprocité des déplacements des points d'application des forces extérieures, nous pouvons exprimer les flexions en B et C comme suit :

En B : $\delta' = \text{constante}\,(P\eta' - X'r' - X''r'')$;

En C : $\delta'' = \text{constante}\,(P\eta'' - X'r'' - X''r')$,

et comme $\delta' = \delta'' = O$

$$X'r' + X''r'' = P\eta' \text{ et } X'r'' + X''r' = P\eta''$$

d'où nous tirons la valeur de X' :

$$X' = \frac{\eta' - \eta''\frac{r''}{r'}}{r' - r''\frac{r''}{r'}}.$$

Si nous traçons la ligne élastique relative à $X'' = 1$ en multipliant ses ordonnées par $\frac{r''}{r'}$ (ligne $A_0\,c'\,J\,B_0$), nous aurons, en tenant compte de la notation de la figure :

$$\eta = \eta' - \eta''\frac{r''}{r'}$$

et

$$r = r' - r''\frac{r''}{r'}$$

d'où

$$X' = P\,\frac{\eta}{r}.$$

La surface comprise entre les 2 courbes $A_0\,c\,J\,B_0$ et $A_0\,c'\,J\,B_0$ est donc la surface d'influence relative à X'.

Comme seul le rapport $\frac{\eta}{c}$ entre en considération, il n'est pas nécessaire de connaître l'échelle à laquelle nos lignes élastiques ont été tracées.

Lorsque nous avons à envisager des *charges uniformément réparties*, il est avantageux de déterminer la ligne d'influence relative aux charges de cette espèce.

Cette dernière ligne s'obtient en intégrant une fois la ligne d'influence relative aux charges isolées.

En effet, soit p la charge uniforme par unité courante.

Un élément de charge $p\,d\,x$ produit une réaction

$$dX' = \frac{\eta}{r}\,p\,dx.$$

Si la charge considérée est répartie de a à b, nous aurons :

$$X'_{ab} = \int_a^b \frac{\eta}{r}\, p\, dx = \frac{p}{r}\int_a^b \eta\, dx.$$

L'intégrale $\int_a^b \eta\, dx$ n'est pas autre chose que la partie de la surface d'influence comprise entre les ordonnées d'abscisses a et b.

Si nous désignons respectivement par β_a et β_b les ordonnées d'abscisses a et b de la courbe intégrale $A_1 B_1$, nous aurons :

$$\int_a^b \eta\, dx = \mu\,(\beta_b - \beta_a)$$

μ étant la base d'intégration, d'où

$$X'_{ab} = \mu\, \frac{p}{r}\,(\beta_b - \beta_a).$$

Dans notre exemple, nous avons rapporté la surface $A_0\, c\, J\, B_0\, J\, c'\, A_0$ à l'axe horizontal $A_0\, B_0$ en doublant ses ordonnées pour plus d'exactitude ($A_0\, c''\, B_0$).

La ligne d'influence pour charges uniformément réparties $A_1\, B_1$ a été obtenue en intégrant la ligne $A_0\, c''\, B_0$ avec une base d'intégration égale à 20 centimètres.

Il nous reste à déterminer la courbe des efforts tranchants et celle des moments fléchissants relatives au cas de charge suivant, choisi d'une façon quelconque (voir la figure):

1) Charge uniforme de 400 kg par mètre linéaire répartie sur toute la portée $A\, D$;

2) Charge uniforme de 300 kg par mètre linéaire répartie de part et d'autre de C sur une longueur totale de 3,46 mètres ;

3) Charge isolée de 500 kg entre A et B ;

4) Charge isolée de 110 kg entre B et C.

En introduisant les valeurs numériques dans les formules relatives à X' et X'', nous obtenons :

$$X_1' = X_1'' = \mu\,.\,\frac{p}{r}\,(\beta_b - \beta_a) =$$

$$\frac{0{,}20 \text{ m} \times 400 \text{ kg} \times 4{,}95 \text{ cm}}{4{,}85 \text{ cm}} \times 20 \text{ (échelle du tracé)}$$

$$X_1' = X_1'' = 1630 \text{ kg.}$$

$$X_2'\mu\,.\,\frac{p}{r}\,(\beta_h - \beta_a) =$$

$$\frac{0{,}20 \text{ m} \times 300 \text{ kg}}{4{,}85 \text{ cm}}\,(5{,}10 \text{ cm} - 4{,}65 \text{ cm})\, 20 = 111 \text{ kg}$$

$$X_3' = \frac{P\eta}{r} = \frac{500 \text{ kg} \times 3{,}55 \text{ cm}}{4{,}85 \text{ cm}} = 366 \text{ kg.}$$

$$X_4' = \frac{P\eta}{r} = \frac{110 \times 1{,}30}{4{,}85} = 29{,}5 \text{ kg.}$$

$$X' = X_1' + X_2' + X_3' + X_4' = 2.136 \text{ kg.}$$

$$X_2'' = \frac{0{,}20 \times 300}{4{,}85}\,(4{,}65 - 0{,}90)\, 20 = 927 \text{ kg.}$$

$$X_3'' = \frac{500 \times (-0{,}6)}{4{,}85} = -62 \text{ kg.}$$

$$X_4'' = \frac{110 \times 4{,}3}{4{,}85} = 97{,}5 \text{ kg.}$$

$$X'' = X_1'' + X_2'' + X_3'' + X_4'' = 2.592 \text{ kg.}$$

Nous sommes ramenés au calcul d'une poutre simple reposant librement sur ses 2 extrémités. Comme nous n'avons que des charges isolées et des charges uniformément réparties, la ligne des efforts tranchants se composera uniquement de droites.

Dans notre exemple, nous l'avons tracée à l'échelle de 3 cm par 1000 kg ($T_0\, T'$).

Il nous reste à déterminer l'axe des abscisses $O\, O'$ de cette dernière ligne ou ce qui revient au même, les réactions des appuis A et D.

Pour cela, nous traçons la courbe intégrale $T_0\, T''$ de $T_0\, T'$ et, à partir de T'', la ligne intégrale de l'horizontale passant par T'. Le point d'intersection L de cette dernière ligne intégrale avec la droite $T_0\, T$ est, d'après ce que nous avons vu précédemment au sujet des centres de gravité, un point de la résultante des forces agissant sur la poutre $A\, D$.

Nous aurons donc :

$$T\,T' \times L\,T = T\,O' \times T_0\,T = T_0\,O \times T_0\,T$$

d'où

$$T_0\,O = T\,O' = \frac{T\,T' \times L\,T}{T_0\,T}.$$

Enfin, la courbe des moments fléchissants a été obtenue en intégrant la courbe des efforts tranchants avec une base d'appareil égale à 2,5 cm.

Une ordonnée de 1 centimètre de la courbe des moments fléchissants représente donc :

$$1 \text{ cm ordonnée} = \frac{2{,}5 \text{ cm} \times 20}{3 \text{ (cm p. 1 t)}} = \frac{50}{3}\, \text{t} \times \text{cm.}$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

Je termine ici cette première publication dont le seul but était, comme je l'ai dit au début, de faire connaître l'intégraphe Abdank Abakanowicz et quelques unes de ses applications à la statique ; j'aurai l'occasion de revenir dans la suite sur la résolution de quelques problèmes spéciaux.

Qu'il me soit permis, en terminant, de remercier ici Monsieur le professeur W. Ritter, pour les conseils éclairés qu'il m'a prodigués au cours de cette première étude.

Note au sujet du calcul des ponts de chemin de fer en béton armé

Dans l'ordonnance fédérale concernant le calcul, l'inspection et l'épreuve des ponts et des charpentes métalliques, du 19 août 1892, le Conseil fédéral prescrit que pour le calcul des petits ponts, jusqu'à 1500 m d'ouverture, la surcharge sera majorée de :

$$2\,(15 - l)\,\%$$

l étant la portée de l'ouvrage exprimée en mètres.