Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 29 (1903)
Heft: 18

Artikel: L'arc élastique sans articulation
Autor: Guidi, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23508

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En conséquence, il semble que la résistance des constructions armées du type nouveau ne dépend pas plus et dépend peut-être moins de l'exécution que celle des constructions métalliques.

A. CONSIDÈRE,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées en France.

L'arc élastique sans articulation

par C. GUIDI, professeur.

(Extrait de *Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino*, Seria II, Tom. LII.)

Traduit de l'italien par A. PARIS, ingénieur.

(Suite)[1].

14. — Réaction produite à la culée gauche par une force extérieure parallèle à l'axe x'. Au moyen des polygones p_2 et p_4 (fig. 8) et d'un polygone p_6 (fig. 11) reliant des forces parallèles à l'axe x', proportionnelles aux moments wx et agissant aux nœuds correspondants de la construction, on peut déterminer les paramètres de la réaction de la culée gauche, produite par une force 1 sec ε parallèle à l'axe x' et appliquée à l'un quelconque des nœuds de la travée.

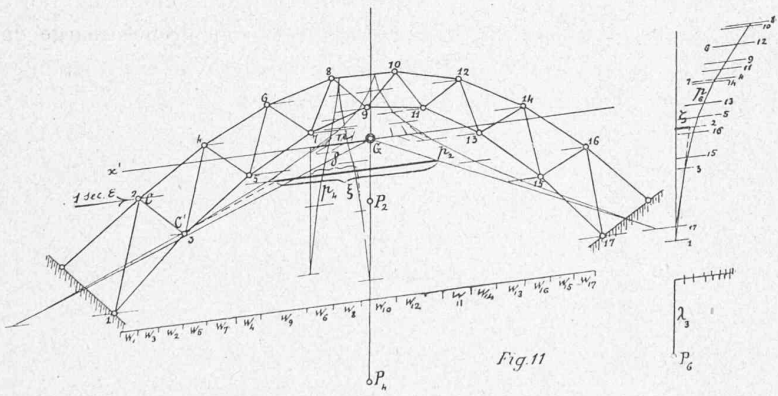

Fig. 11

Soit, en effet, η l'ordonnée d'un nœud quelconque de la construction, comptée dès la ligne d'action de la force 1 sec ε considérée, agissant de gauche à droite. Nous avons :

$$19)\quad \mathfrak{M} = -\frac{\Sigma_{c^B} M_0 w}{\Sigma w} = -\frac{\Sigma_{c^B}(-1\,.\,\eta\,.\,w)}{\Sigma w} = \frac{1\,.\,\lambda_2}{\Sigma w}\,\xi,$$

où ξ représente le segment (à lire à l'échelle des longueurs, si λ_2 l'a été à celle de Σw) déterminé sur 1 sec ε entre le côté extrême de droite du polygone p_2 et le prolongement de celui qui précède la force w appliquée en C', car les côtés à gauche de $C\,C'$ ne supportent aucun effort dès qu'on suppose l'arc libre à la culée gauche.

De même, si δ désigne le segment (à lire à l'échelle de n) déterminé sur 1 sec ε entre le côté extrême de p_4 et le prolongement de celui qui précède la force, proportionnelle à wy, appliquée en C', on a :

$$20)\quad H_A = \frac{\Sigma_{c^B} M_0 wy}{\Sigma wy^2} = -\frac{\Sigma_{c^B}(1\,.\,\eta\,.\,w\,.\,y)}{\Sigma wy^2}$$
$$= -\frac{1\,.\,\lambda_2\,.\,1\,.\,\delta}{\lambda_2\,.\,1\,.\,n} = -\frac{\delta}{n}\,1.$$

Enfin, soit ζ le segment (à lire à l'échelle des forces) déterminé sur 1 sec ε entre le côté extrême vertical du polygone p_6 et le prolongement de celui qui précède la force proportionnelle à wx appliquée en C', on a :

$$21)\quad A = \frac{\Sigma_{c^B} M_0 wx}{\Sigma wx^2} = -\frac{\Sigma_{c^B} 1\,.\,\eta\,.\,w\,.\,x}{\Sigma wx^2}$$
$$= -\frac{1\,.\,\Sigma w\,.\,\lambda_3\,.\,\zeta}{\Sigma w\,.\,\lambda_3\,.\,1} = -\zeta.$$

On peut éviter la construction du polygone p_6 si l'on remarque que

$$\Sigma_{c^B}\eta\,.\,w\,.\,x = \Sigma_{c^B}(y - y_c)\,wx = \Sigma_{c^B} wxy - y_c\,\Sigma_{c^B} wx.$$

Ces deux dernières sommes sont données par les polygones p_5 et p_1 (fig. 8).

15. — Ligne des pressions pour un système de forces parallèles à l'axe x'. De même que cela a été fait au N° 12 pour des forces verticales, on peut, pour le système de forces considéré, construire la ligne de pression sans déterminer d'abord la réaction R_A de la culée gauche (N° 14). Toutefois, il faut déterminer d'abord la réaction H_A au moyen de la troisième des équations 14) ou de la 20). Supposons, pour fixer les idées, qu'une partie de l'extrados de l'arc représenté à la figure 12 soit sollicité en ses nœuds par des forces parallèles à l'axe x'. Ces forces pourraient représenter les composantes de l'action du vent sur un pan de toiture.

Supposons tracés le polygone des pressions et l'axe y, et donnée la direction de l'axe x'. Nous menons une parallèle à x' par un nœud quelconque (pôle d'une barre de membrure). Nous nommerons ξ la projection horizontale du segment déterminé sur une telle parallèle entre le pôle et la résultante correspondante du polygone des pressions; et ξ' celle du segment compris entre la résultante et l'axe y, A conservant sa signification habituelle, nous avons

$$22)\quad M = -A\,\xi = A\,(\xi' - x)$$

et les équations 13) deviennent :

$$23)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma w\xi = \Sigma w\xi' - \Sigma wx \\ 0 = \Sigma w\xi x = \Sigma w\xi' x - \Sigma wx^2 \\ 0 = \Sigma w\xi y = \Sigma w\xi' y - \Sigma wxy. \end{cases}$$

Si nous choisissons les axes x' et y comme de coutume, les équations 23) deviennent :

$$24)\quad 0 = \Sigma w\xi'\ ,\quad 0 = \Sigma w\xi' x - \Sigma wx^2\ ,\quad 0 = \Sigma w\xi' y.$$

La 1re équation 24) exprime que l'axe de gravité y l'est encore dans le système des poids w appliqués à l'intersec-

[1] Voir N° du 10 septembre 1903, page 231.

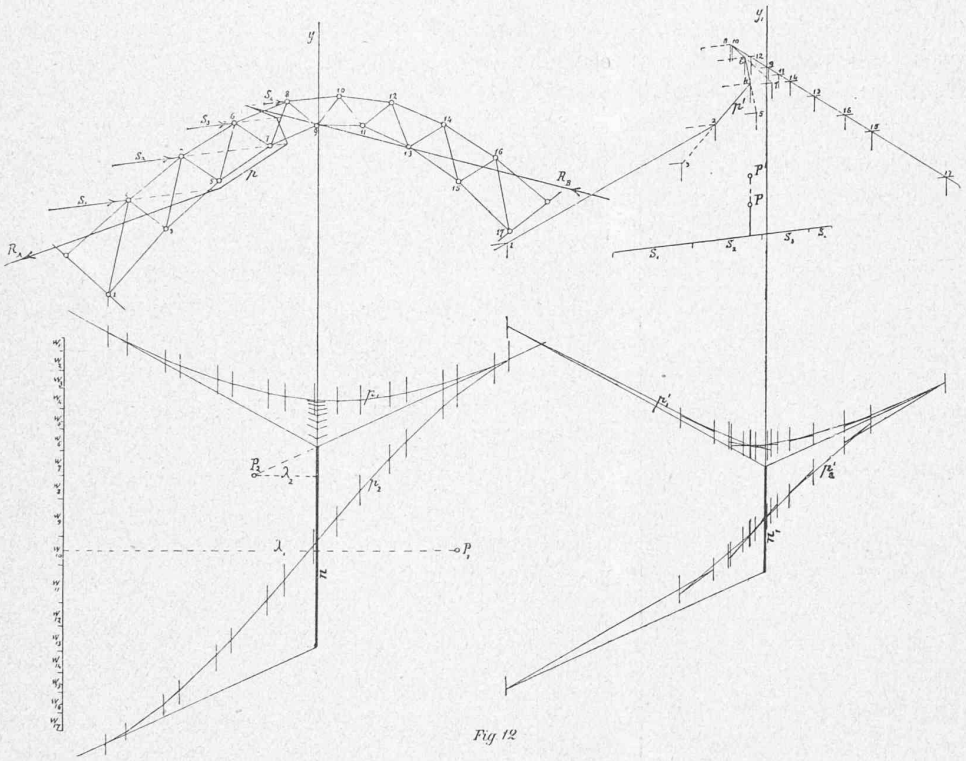

Fig 12

tion des parallèles à x' avec les côtés correspondants de la ligne des pressions, et la 3e exprime que les axes x' et y sont encore conjugués par rapport au nouveau système.

Supposons déterminés d'abord l'axe y et sa direction conjuguée. (Si la travée est symétrique, l'axe y est la verticale médiane et sa direction conjuguée est horizontale). On relie les forces w parallèles à x' par un polygone funiculaire de distance polaire verticale arbitraire A_1, mais portée sur la verticale divisant la droite des forces en parties proportionnelles à H_A et H_B, H_A ayant été déterminée d'avance, comme cela a été indiqué.

On fait alors agir verticalement les poids w aux points d'intersection des parallèles à x' avec les côtés de ce polygone (prolongés, s'il le faut) et l'on trouve l'axe de gravité y_1 relatif à ce système, c'est-à-dire la résultante des poids w. On obtient ainsi deux figures affines : l'axe y_1 correspondant à y et le polygone funiculaire A_1 au polygone des pressions cherché. Pour déterminer ce dernier, il suffit de posséder le rapport d'affinité des deux figures. La 2e équation 24) le fournit. On peut l'écrire

$$0 = A\Sigma w\xi' x - A\Sigma w x^2$$

ou bien, en nommant ξ_1 les segments analogues à ξ' pris dans le polygone A_1

$$0 = A_1\Sigma w\xi_1 x - A\Sigma w x^2$$

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\Sigma w\xi_1 x}{\Sigma w x^2}.$$

Si, enfin, on prend les distances polaires arbitraires λ_1 et λ_2 pour construire les moments centrifuge et d'inertie, on a $\Sigma w\xi_1 x = \lambda_1\lambda_2 n_1$ et $\Sigma w x^2 = \lambda_1\lambda_2 n$, ce qui donne :

$$25)\qquad \frac{A}{A_1} = \frac{n_1}{n}.$$

Les constructions ci-dessus ont été exécutées dans la figure 12 qui suffit à les expliquer.

16. — Réaction due à une variation de température. On trouve les trois paramètres de la réaction de gauche due à un changement de température en annulant dans les équations 12) le moment M_0 ainsi que tous les termes provenant d'un mouvement des culées. Cette variation de température et le coefficient de dilatation linéaire supposés uniformes pour tout l'arc, les équations 12) deviennent :

$$26)\quad \mathfrak{M} = -\frac{a\,t\,\Sigma S's}{\Sigma w};\quad A = \frac{a\,t\,\Sigma S''s}{\Sigma w x^2};\quad H = \frac{a\,t\,\Sigma S'''s}{\Sigma w y^2}.$$

On peut calculer directement les sommes figurant au numérateur, en introduisant pour $S'\,S''\,S'''$ leurs valeurs 2) 5) 7). Mais il est plus aisé d'employer la construction graphique indiquée dans la *Statique des constructions*[1], de Müller-Breslau. Nous l'indiquons pour plus de clarté.

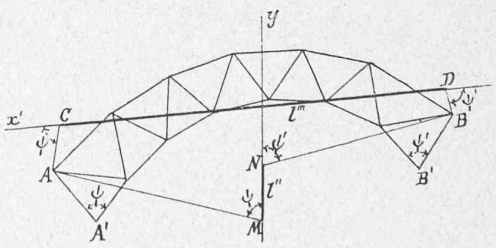

Fig. 13

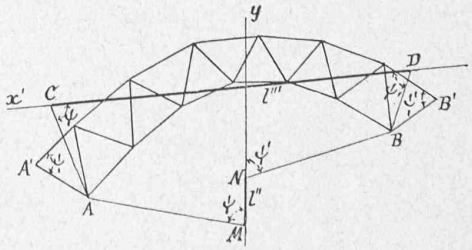

Fig. 14

Par les extrémités A et B d'une membrure de l'arc, d'où partent aussi les premières et dernières barres de treillis (fig. 13 et 14), on mène les droites AC et BD. Les

[1] H. F. B. Müller-Breslau. *Die graphische Statik der Baukonstructionen.* Leipzig, 1887-96.

angles (extérieurs dans la figure 13 et intérieurs dans la 14) formés par ces droites avec l'axe x' sont égaux à ψ et ψ' formés par l'autre membrure avec la culée. Par A et B on mène encore les droites AM et BN inclinées sur l'axe y des mêmes angles ψ et ψ'. Si l'on pose $MN = l''$, $CD = l'''$ on a :

$$27) \qquad \Sigma S's = \operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi' ; \qquad \Sigma S''s = l'' ;$$
$$\Sigma S'''s = l''' \sec \varepsilon.$$

Pour démontrer la troisième des équations 27) supposons l'arc, sans poids et libre de toute autre action extérieure, détaché de ses appuis (remplacés par les barres c et d) et tenu en équilibre par deux forces opposées, égales à 1 sec ε, situées dans l'axe x' et agissant sur les extrémités de l'arc par l'intermédiaire des barres additionnelles AC, $A'C$, BD et $B'D$, que nous désignerons par a', a, b' et b. Les efforts produits dans les barres de membrures par ce cas de charge sont

$$1 \,.\, \frac{y}{r} = S'''.$$

En outre, nous désignons par S_a, $S_{a'}$, S_c les efforts produits dans a, a', c. De même pour l'autre extrémité. Soit ω un allongement unitaire quelconque, mais très petit, constant pour toutes les barres et pour la longueur $CD = l'''$. Si l'on pose l'équation du travail virtuel dans ces conditions, on a :

$$1 \,.\, \sec \varepsilon \,.\, \omega\, l''' = \Sigma S'''\omega s + \Sigma S\omega s,$$

où $\Sigma S'''\omega s$ se rapporte à la travée donnée et $\Sigma S\omega s$ aux barres additionnelles. Si l'on divise par le facteur constant ω on trouve

$$28) \qquad l''' \sec \varepsilon = \Sigma S'''s + \Sigma Ss.$$

Les forces S_a, $S_{a'}$ et S_c, sont déterminées graphiquement. Si dans la figure on trace la ligne AE faisant avec $A'C$ l'angle $AEC = \psi$, on trouve par similitude de triangles :

$$\frac{S_a}{-S_c} = \frac{c}{A'E}; \qquad \frac{S_a}{-S_{a'}} = \frac{a'}{EC},$$

d'où l'on tire

$$S_a \,.\, a + S_{a'} \,.\, a' + S_c \,.\, c = 0.$$

On trouverait de même

$$S_b \,.\, b + S_{b'} \,.\, b' + S_d \,.\, d = 0.$$

La troisième des équations 27) est ainsi prouvée.

On démontrerait de même la deuxième.

Pour démontrer la première, on suppose l'arc soumis à la seule action de deux couples opposés, égaux à 1. Chacun d'eux contient deux forces égales à 1, éloignées de l'unité de longueur, l'une agissant vers l'intérieur suivant x', et l'autre inverse, sur une parallèle à x', d'ordonnée positive. Les efforts produits dans les barres sont donc les S'.

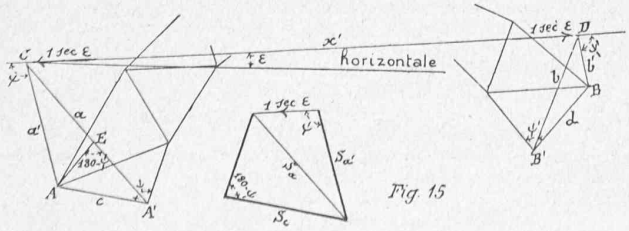

Fig. 15

Supposons (fig. 15) les droites AC et BD prolongées jusqu'à la parallèle à x' et soient C' et D' leurs points d'intersections avec elle. En appliquant séparément aux deux paires de forces opposées la démonstration ci-dessus, on trouve bien

$$\Sigma S's = CD - C'D' = \operatorname{cotg} \psi + \operatorname{cotg} \psi'.$$

17. — Si l'arc est symétrique, on a $l'' = 0$ et par suite $A = 0$. Alors la poussée due aux variations de température est horizontale.

Si, en outre, on a $\psi = \psi' = 90^\circ$, comme c'est quelquefois le cas et souvent admissible avec une approximation suffisante, on a, de même, $\mathfrak{M} = 0$ et la poussée agit suivant l'axe x[1]. Elle est alors

$$29) \qquad H = \frac{\alpha t l'''}{\Sigma w y^2},$$

où l''' est la distance horizontale des points des culées d'où partent les barres extrêmes du treillis.

[1] Dans la théorie de Culmann-Ritter la poussée due à la variation de température passe toujours par le centre G. Cela tient à ce qu'on suppose implicitement que la ligne AA' des ancrages se dilate comme la construction métallique, tandis que dans la théorie ci-dessus on la suppose invariable. Cette deuxième hypothèse nous semble plus approchée de la réalité dans la plupart des cas.

(A suivre).

Divers.

A propos de béton armé.

Nous avons lu avec intérêt, mais non sans désappointement, l'article consacré par M. l'ingénieur Alph. Vautier, dans l'avant-dernier numéro du *Bulletin*, aux poutres et dalles en béton armé du système Lossier.

Ce n'est point faute de sympathie pour le jeune inventeur, au contraire ! Mais, à la veille de la publication des nouvelles normes de la Société suisse des Ingénieurs et des Architectes pour les travaux en béton armé, il nous paraît fâcheux qu'un des organes attitrés de cette Société répande, dûment signées par un des plus compétents et des plus respectables de ses collaborateurs, des affirmations propres à fausser le jugement de la galerie.

Nous cherchons, depuis deux ans, à consigner au *Bulletin*, sous le titre de « faits nouveaux, » certains résultats acquis par l'expérience dans le domaine du béton armé. Quelques-uns de ces faits ne sont plus bien nouveaux aujourd'hui, mais ils n'en sont que moins discutés et personne en effet n'y a contredit jusqu'à présent.

Il semble donc étrange de voir imprimer tout à coup qu'en 1903 on ignore encore autant de choses : les essais de M. le professeur Guidi sur l'adhérence (voir *Bulletin* du 5 septembre 1901, pages 142 et 145) et les nombreuses expériences analo-