Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 59 (1933)

Heft: 12

Artikel: Sur l'application du calcul des probabilités dans les projets de l'ingénieur

Autor: Kummer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45655

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

59e année 10 juin 1933 N° 12

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Rédaction : H. Demierre et J. Peitrequin, ingénieurs.

Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

SOMMAIRE : *Sur l'application du calcul des probabilités dans les projets de l'ingénieur* (suite et fin), par le Dr W. Kummer, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich. — *Les établissements balnéaires en Suisse* (suite et fin), par M. Beda Hefti, ingénieur-conseil, à Fribourg. — Chronique. — *Construction des routes et circulation routière.* — *Un geste opportun.* — *Le IIIe congrès du chauffage industriel.* — *Congrès du chauffage et de la ventilation des bâtiments habités.* — Carnet des concours. — Bibliographie.

Sur l'application du calcul des probabilités dans les projets de l'ingénieur,

par le Dr W. KUMMER,
professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich.

(Suite et fin.) [1]

2. Evaluation a priori suivant des méthodes diverses.

Il y a bien des cas, où, au lieu d'une estimation exacte, l'ingénieur projetant peut déterminer, par des calculs habituels, les limites extrêmes de la grandeur, dont il a besoin dans ses projets ; ensuite, par des réflexions *ad hoc*, il peut trouver la valeur la plus probable d'après le dessin obtenu. Naturellement, il n'est pas possible d'indiquer une méthode qui serait universellement applicable pour les évaluations basées sur ce principe. Le principe même peut cependant être démontré par un exemple caractéristique.

Nous voyons un tel exemple dans le problème des pertes de charge dans le transport des fluides de toute sorte, pour des débits de service très variables, dans les canalisations techniques. Quant au fluide électrique, nous avons traité le problème en 1929 ; quant aux fluides gazeux, aux vapeurs et aux liquides ordinaires, nous avons donné la solution [2] en 1931. Dans ce qui suit, nous allons condenser nos développements y relatifs dans un sommaire. A la place du débit J du fluide, nous considérons une grandeur relative, i, plus petite que 1 mesurée par rapport au débit maximum J_{max}, par :

$$i = \frac{J}{J_{max}}.$$

Aussi le temps t, mesuré pendant la durée du service, sera exprimé par des nombres plus petits que 1, le temps 1 signifiant la durée complète considérée, c'est-à-dire un jour, une semaine, ou un an. Comme le fait voir la figure 4, nous traçons un diagramme des i sur les t, les

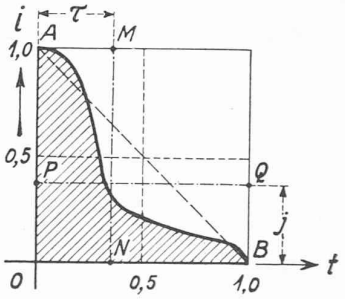

Fig. 4.

i rangés suivant leurs valeurs décroissantes. La surface hachurée du diagramme est mesurée par :

$$\int_0^1 i \,.\, dt = 1 \cdot j = 1 \cdot \tau$$

où $1 \cdot j$ est la surface du rectangle $O\,P\,Q\,B$ horizontal, tandis que $1 \cdot \tau$ mesure le rectangle $O\,A\,M\,N$ vertical. Quant aux pertes de charge, nous partons de leur maximum c'est-à-dire de leur valeur instantanée pour le débit maximum, dont la valeur i relative est égale à 1. Le travail des pertes correspondant à une surface partielle $\int i \cdot dt$ du diagramme, figure 4, est mesuré ensuite par la durée δ moyenne d'utilisation du maximum des pertes. Les valeurs δ que nous obtiendrons seront autres pour le mouvement électrique et le mouvement laminaire d'une part, où la valeur instantanée des pertes est mesurée par i^2, et le mouvement turbulent d'autre part, la valeur instantanée des pertes étant alors mesurée par i^3.

Pour le mouvement électrique (loi de Joule), et pour le mouvement laminaire (loi de Poiseuille) de liquides, nous avons donc la définition :

$$\delta = \frac{1}{1^2} \int_0^1 i^2 \cdot dt.$$

Dans la figure 4, le rectangle $O\,P\,Q\,B$ horizontal représente le cas extrême d'un service qui est caractérisé, pour $t = 0$, par le maximum $i = 1$ pendant une durée infiniment petite, et ensuite, pour $t > 0$, par le

[1] Voir *Bulletin technique* du 27 mai 1933, page 129.

[2] Voir pages 185 et 210 des numéros du 10 et du 24 octobre 1931 de la « Schweizerische Bauzeitung ».

débit relatif $i = j =$ constant ; or, pour ce cas, δ prend la valeur spéciale δ', qui est donnée par :

$$\delta' = \frac{1}{1^2}\int_0^1 i^2 \cdot dt = \frac{1}{1^2} \cdot j^2 = \tau^2.$$

A la rigueur, au lieu de τ^2, il faudrait mettre $\frac{\tau^2}{1}$, le chiffre 1 étant l'unité de temps, pour que la véritable dimension de δ' soit apparente. Dans la figure 4, le rectangle $O\,A\,M\,N$ vertical représente un autre cas de service extrême, à savoir le cas, où pour une durée $t = \tau$, le débit i est constamment égal à 1 ; or, pour ce cas, δ prend une valeur :

$$\delta'' = \frac{1}{1^2}\int_0^1 i^2 \cdot dt = \tau.$$

Un cas quelconque de service, par exemple celui du diagramme, figure 4, caractérisé par la surface hachurée, accuse une valeur δ entre les valeurs extrêmes δ' et δ''. Cette valeur δ du cas quelconque doit donc, comme l'indique la surface hachurée de la figure 5, être plus petite

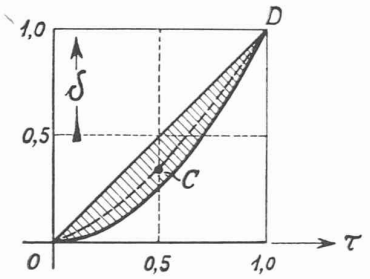

Fig. 5.

que $\delta = \tau$ (la droite $O\,D$) et plus grande que $\delta = \tau^2$ (la parabole OD sous la droite et formant la bordure inférieure de la surface hachurée, figure 5). Le point C à l'intérieur de la surface hachurée, figure 5, correspondant au cas de service qu'indique la figure 4 par le triangle OAB, accuse les coordonnées $\tau = 0{,}5$ et $\delta = 0{,}333$. On peut considérer la ligne pointillée, réunissant dans la figure 5 le point C avec O et avec D comme forme la plus probable de la fonction :

$$\delta = f(\tau).$$

Pour le mouvement turbulent, tel qu'il est la règle pour le transport des liquides dans les canalisations industrielles, la grandeur δ doit être définie par :

$$\delta = \frac{1}{1^3}\int_0^1 i^3 \cdot dt.$$

Les rectangles $OPQB$ et $OAMN$ doivent être interprétés comme diagrammes de cas extrêmes, tout à fait comme tout à l'heure. Les valeurs correspondantes δ' et δ'' sont maintenant les suivantes :

Pour $OPQB$:

$$\delta' = \frac{1}{1^3}\int_0^1 i^3 \cdot dt = \frac{1}{1^3}\, j^3 = \tau^3.$$

Pour $OAMN$:

$$\delta'' = \frac{1}{1^3}\int_0^1 i^3 \cdot dt \cdot \tau.$$

Pour τ^3 aussi, il faudrait, à la rigueur, écrire autrement, pour que la véritable dimension de δ' soit apparente ; il faudrait mettre $\frac{\tau^3}{1^2}$ le chiffre 1 signifiant l'unité de temps. Un cas quelconque de service, le mouvement étant turbulent, est caractérisé par un point de la surface hachurée de la figure 6, OD étant la droite $\delta = \tau$, ou bien la parabole cubique $\delta = \tau^3$, aux limites de la surface hachurée. Quant au point C caractérisé comme il l'est

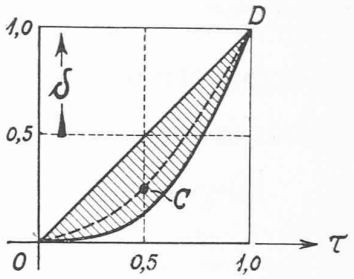

Fig. 6.

aussi dans l'autre régime (non turbulent), il est donné maintenant par les coordonnées $\tau = 0{,}5$; $\delta = 0{,}25$. Le trait pointillé OCD de la figure 6 peut représenter ainsi la forme la plus probable de la fonction :

$$\delta = f(\tau)$$

caractérisant le transport des liquides animés d'un mouvement turbulent.

3. Utilisation de l'empirisme généralisé par la statistique mathématique.

L'empirisme qui peut être généralisé par la statistique mathématique est formé par des observations prises sur un groupe de faits ou d'états que l'on examine par rapport à une certaine condition. Ce sont surtout les produits fournis par une fabrication mécanique qui sont propres à un pareil examen. La série des observations est représentée graphiquement comme courbe, les abcisses étant les chiffres mesurant la condition examinée, par exemple l'allongement de rupture d'un matériel de construction, les ordonnées indiquant le nombre des pièces dont la condition est mesurée justement par le chiffre de l'abscisse correspondante. Les courbes obtenues de cette façon sont appelées « courbes de fréquence ». Leur type est généralement donné par la courbe en cloche, symétrique ou asymétrique, suivant les cas. Le type idéal d'une pareille courbe, la courbe dite « normale », est donné par la formule de Gauss, dont l'équation suivant notre formule (4), a été exprimée par :

$$P = \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \mu^2}}$$

dans la première partie de ce travail. Au lieu de la condition examinée, l'abscisse x indique alors l'écart des chiffres mesurés vis-à-vis de leur moyenne, l'ordonnée P étant le nombre des pièces correspondant à la valeur x par rapport au nombre de toutes les pièces soumises à l'examen. Notre figure 7 fait voir le type de cette courbe, indiquant en même temps son emploi dans des marchés

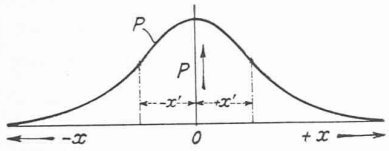

Fig. 7.

de livraison pour certains produits de fabrication, x' étant la tolérance admise dans la qualité garantie du produit en question.

Les courbes de fréquence que l'on obtient empiriquement, quant aux faits ou aux états intéressant l'ingénieur projetant ne sont guère du type symétrique de la figure 7 ; leur type est surtout d'une asymétrie plus ou moins prononcée, quelquefois très semblable à notre figure 2. La variable de ces courbes n'étant pas continue, le caractère varie par petits sauts ; toutefois, il est souvent permis de remplacer le diagramme en échelons par une courbe régulière, sans qu'il y ait altération manifeste de la vérité. Alors, l'ajustement mathématique d'une telle courbe permet d'en tirer des grandeurs caractéristiques pouvant être utiles dans les projets de l'ingénieur. Nous allons donner la définition de pareilles grandeurs, les courbes ayant comme abscisses x les nombres de la condition examinée, tels qu'ils sont obtenus, et comme ordonnées les nombres relatifs P, comme d'habitude. Ainsi, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P \cdot dx = 1.$$

Soit n le nombre des différents mesurages, correspondant aux abscisses :

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n,$$

on définit comme *moyenne arithmétique* $\bar{x}$ la valeur :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x)}{n}.$$

Par *mode* x_p, l'on entend la valeur de la condition examinée, qui s'est manifestée le plus souvent, l'abscisse pour le maximum P_{max} est donc égale à x_p. Enfin, suivant la définition :

$$\int_{-\infty}^{x_m} P \cdot dx = \int_{x_m}^{+\infty} P \cdot dx$$

on introduit la *médiane* x_m. Les trois grandeurs caractéristiques, la moyenne, le mode et la médiane, sont confondues, si la courbe de fréquence est symétrique ; si elle ne l'est pas, on peut constater assez souvent la relation approximative :

$$2 \cdot \bar{x} + x_p = 3 \cdot x_m.$$

Pour l'ajustement mathématique des courbes asymétriques des débits d'un cours d'eau, intéressant le génie civil à plusieurs points de vue, *R. Gibrat*, à Saint-Etienne (France) [1], et *H. Grassberger*, à Vienne (Autriche) [2], ont donné récemment de bonnes méthodes de calcul, qui sont, l'une comme l'autre, caractérisées par l'application de la formule de Gauss à des variables logarithmiques. Dans ce qui suit, nous allons démontrer la méthode de Gibrat, que nous connaissons plus à fond, étant donné qu'avant son application à un problème purement technique, R. Gibrat s'en est déjà servi lors de l'examen de plusieurs problèmes économiques [3]. Simplifiant la formule de Gauss, en posant $2 \cdot \mu^2 = 1$, et substituant à la variable x une nouvelle variable z, on obtient, d'après R. Gibrat, une fonction :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2}$$

les variables x et z étant liées par :

$$z = a \cdot \log(x - x_0) + b.$$

Afin d'utiliser ces deux formules, liées l'une à l'autre, aisément pour l'ajustement mathématique d'une courbe de fréquence asymétrique, on passe de la courbe de fréquence à la courbe de sommation des valeurs P consécutives, c'est-à-dire on passe de la fonction :

$$P = f(x)$$

à la fonction :

$$S = \int_{-\infty}^{x} P \cdot dx.$$

Ainsi, partant de la courbe de fréquence P, représentée par la figure 8, et traitant un exemple, que nous discu-

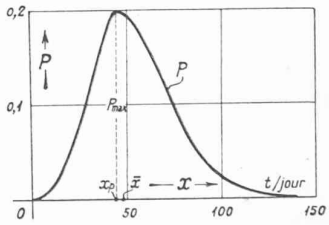

Fig. 8.

terons plus loin, on obtient la courbe de sommation S de la figure 9. Les différentes valeurs S doivent alors être

[1] Voir la « Revue générale de l'Electricité » (Paris) du 15 et du 22 octobre 1932.

[2] Voir les numéros 1 à 6 de 1932 de la revue « Wasserwirtschaft « (Vienne).

[3] Voir le livre « Les inégalités économiques », par R. Gibrat ; nous en avons donné une analyse dans la « Schweizerische Bauzeitung » du 18 mars 1933, en expliquant aussi la méthode de Gibrat.

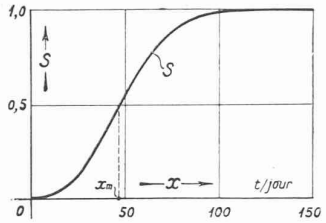

Fig. 9.

comparées avec les valeurs consécutives de l'intégrale :

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2} \cdot dz$$

en posant :

$$z = a \cdot \log(x - x_0) + b.$$

Lors de cette comparaison l'on peut trouver par tâtonnement les constantes a, b, z_0. L'intégrale $R(z)$, dont on a besoin, est facilement déduite de l'intégrale J bien connue des statisticiens. En effet, on a :

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-z^2} \cdot dz = \frac{2}{\pi} \cdot \left(z - \frac{z^2}{3 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \frac{z^7}{7 \cdot 3!} \cdots \right).$$

Or, les intégrales $R(z)$ et J sont liées comme suit :

De $z = -\infty$, à $z = 0$, on a : $R(z) = \frac{1}{2}(1 - J)$.

De $z = 0$, à $z = +\infty$, on a : $R(z) = \frac{1}{2}(1 + J)$.

La fonction :

$$z = a \cdot \log(x - x_0) + b$$

étant connue, les trois grandeurs caractéristiques $\bar{x}$, x_p, x_m de la courbe de fréquence d'origine, peuvent être formulées analytiquement. Pour la médiane x_m, conditionnée par $z = 0$, on a :

$$\log(x_m - x_0) = -\frac{b}{a}.$$

Quant à la moyenne $\bar{x}$, elle est à déduire du principe des moments ; on obtient :

$$\log(\bar{x} - x_0) = \frac{1}{4 \cdot a^2 \cdot \log e} - \frac{b}{a}.$$

Pour le mode x_p correspondant au maximum de la courbe de fréquence, on a :

$$\log(x_p - x_0) = -\frac{1}{2 \cdot a^2 \cdot \log e} - \frac{b}{a}.$$

Les trois grandeurs caractéristiques sont liées ensemble par la relation :

$$(\bar{x} - x_0)^2 \cdot (x_p - x_0) = (x_m - x_0)^3$$

que l'on obtient par le développement en séries des expressions ci-dessus. La constante a étant assez grande, la relation se transforme en la relation approximative, plus simple

$$3 \cdot \bar{x} + x = 3 \cdot x_m$$

dont il a déjà été question.

Il y a lieu de démontrer l'application de la méthode par un exemple. Les courbes, figures 8 et 9, se rattachent à l'exemple d'un trafic moderne sur une grande route intercommunale ; le trafic grevant la route est mesuré en tonnes par heure ; sa répartition n'est pas symétrique, comme la figure 8 le fait voir. Nous admettons que l'ingénieur, chargé de renforcer la route, doive connaître au plus juste la moyenne du trafic actuel. Comment peut-il déduire ce chiffre d'une façon incontestable, sinon par l'ajustement mathématique de la courbe de fréquence ? En appliquant la méthode de Gibrat, on obtient :

$$z = 9{,}3 \cdot \log(x + 60) - 18{,}8$$

pour la fonction z. Les grandeurs caractéristiques, dont, à la rigueur, $\bar{x}$ seulement est désiré, ont été évaluées comme suit :

$\bar{x} = 48{,}8$ t/jour ; $x_m = 47{,}2$ t/jour ; $x_p = 45{,}1$ t/jour.

Il y a lieu de remarquer que notre exemple traite d'une courbe de fréquence, dont l'asymétrie n'est pas très grande, de sorte que les trois grandeurs ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre.

* * *

Les méthodes et les exemples relatifs à l'application du calcul des probabilités dans les projets de l'ingénieur, que nous venons de discuter, devraient prouver qu'assez souvent il est possible de remplacer les chiffres provenant d'une estimation arbitraire par des chiffres obtenus par un raisonnement inattaquable. Toutefois, ce n'est qu'un commencement de l'application que nous avons pu donner. Nous ne pouvons que souhaiter que ce commencement ait de bonnes suites, en engageant l'un ou l'autre de nos lecteurs à faire mieux.

Les établissements balnéaires en Suisse

par M. Beda HEFTI, ingénieur-conseil, à Fribourg.

(Suite et fin) [1]

Installations sanitaires. — Il va sans dire que la question des installations sanitaires doit jouer un rôle de premier plan dans l'établissement d'un projet et retenir toute l'attention désirable de la part du constructeur. La moindre négligence, sur ce point, pourrait avoir des répercussions néfastes sur la fréquentation de l'établissement. Les W.-C. doivent être d'une construction parfaite, à tous points de vue. Il y a lieu de pourvoir à des installations de douches chaudes et de bains de pieds, dans des locaux fermés. Ces installations doivent permettre aux baigneurs de se laver complètement. Des douches ouvertes, combinées avec de grands bassins pour bains de pieds, doivent se trouver à l'entrée de la piscine. Il est à recommander de garnir le voisinage des bassins de haies vives et de massifs de fleurs. Dans les

[1] Voir *Bulletin Technique* du 27 mai 1933, page 132.