**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande

**Band:** 69 (1943)

**Heft:** 17

**Artikel:** Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre: l'énoncé de Bélanger-Böss généralisé

**Autor:** Jaeger, Charles

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-52524

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

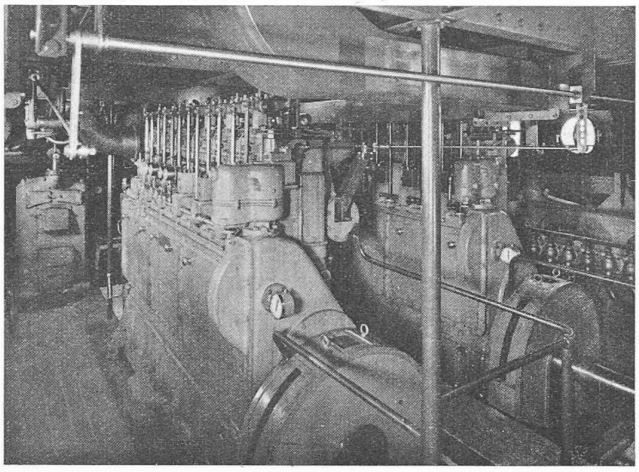

Fig. 8.

point (35 000 cal/h) fonctionne par les grands froids et pour chauffer le bateau à l'arrêt.

Tel qu'il sort de cette reconstruction, le *Léman* a un déplacement de 163 t à lège, 197 t avec son plein chargement de 450 passagers. Du temps qu'il était à vapeur, avec 220 t à lège, sa machine de 530 CVi lui donnait une vitesse unihoraire maximum de 27 km/h. Aujourd'hui, avec ses deux moteurs développant leur puissance nominale de 340 CVe à 500 t/min, il fait 31,8 km/h ce qui le place en tête de tous les bateaux des lacs suisses pour la vitesse. Le bateau ne laisse presque pas de sillage. Sa stabilité est remarquable. Hélices et moteurs se comportent parfaitement. Les aptitudes manœuvrières ne laissent rien à désirer : les démarrages sont énergiques.

Cette réadaptation, cette récupération d'un ancien bateau, est sans conteste une œuvre réussie ; elle est des plus intéressantes quand on l'examine sous l'angle des difficultés des temps présents. Elle tend à prouver qu'avec des frais relativement peu élevés, de nombreux bateaux surannés de nos lacs peuvent être modernisés avec avantage.

---

# Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre.

## L'énoncé de Bélanger-Böss généralisé,

par Charles JAEGER, Dr ès sc. techn.,
Privat-docent à l'Ecole polytechnique fédérale,
Collaborateur du Laboratoire de recherches hydrauliques E.P.F.
à Zurich.

*(Suite et fin.*[1]*)*

### Le théorème de Bélanger-Böss généralisé.

a) *Cas d'une fluide parfait en écoulement potentiel.*

Dans le cas d'un fluide parfait en écoulement potentiel, l'équation ($g$) se réduit à

$$H_\sigma^* = \text{const.}$$

[1] Voir *Bulletin technique* du 7 août 1943, p. 185.

Les solutions sont donc données géométriquement par l'intersection du plan horizontal $H_\sigma^* = \text{const.}$ avec la surface $f_1 = 0$. Admettons — seul cas dont la discussion présente quelque intérêt — que la surface $f_1 = 0$ possède au moins une selle. Quelles peuvent être les positions respectives des deux surfaces ? En aucun cas la surface $H_\sigma^* = \text{const.}$ ne peut se trouver au-dessous du point culminant de la selle la plus élevée, car dans ce cas il y aurait une certaine région où il n'y aurait point de courbe d'intersection réelle, ce qui est hydrauliquement impossible [1]. Si le plan $H_\sigma^* = \text{const.}$ est en tout point au-dessus de la selle la plus élevée, il y a deux courbes d'intersection bien distinctes, l'une sur chaque face de la surface en $U$, $f_1 = 0$. Il se peut que l'une des deux courbes seule représente une solution hydraulique.

Supposons, seconde possibilité, que la surface $H_\sigma^* =$ const. soit tangente au sommet de la selle. Ce point appartient à la fois aux deux courbes d'intersection et fait donc partie des solutions. Nous avons vu qu'en ce point :

$$dE^* = 0$$

avec toutes les conséquences hydrauliques qu'entraîne cette condition. L'écoulement est tel que le débit est maximum et l'énergie minimum (avec les restrictions faites) : la condition $dE^* = 0$, appliquée à la selle la plus élevée, représente vraisemblablement la solution du problème posé par Boussinesq dans le cas particulier d'écoulements potentiels. Le point où $dE^* = 0$ est un « point critique *réel* » de l'écoulement.

Nous verrons un peu plus loin que la condition en question entraîne deux conséquences : il y a passage d'un régime à un autre, et l'écoulement à l'amont du point critique est indépendant de ce qui se passe à l'aval.

b) *Cas d'écoulements quasi parfaits (avec pertes de charge) et d'écoulements turbulents.*

La plupart des écoulements hydrauliques s'effectuent avec une certaine perte d'énergie, par suite du frottement le long des parois ou de tourbillons internes. Dans certains cas, cependant, l'action du frottement reste confinée dans une mince « couche limite » bordant l'écoulement, sans pénétrer dans la masse d'eau dont l'écoulement suit, assez sensiblement, les lois d'un écoulement potentiel. De tels écoulements sont « quasi parfaits ». L'exemple classique est le déversoir à crête arrondie.

On se fait une idée élémentaire des mouvements turbulents en imaginant ce qui se passe à l'intérieur de la masse d'eau animée de puissants tourbillons, dans le cas du ressaut hydraulique, ou dans le cas d'écoulements avec pertes à la Borda de quelque importance. Entre les écoulements quasi parfaits et les écoulements à très forte turbulence, il y a toute la gamme des possibilités. Quoiqu'on sache encore fort peu de choses quant aux mouvements turbulents, on montre qu'ils peuvent être représentés — aux restrictions près faites — par les

[1] Böss, par de tout autres arguments, a bien élucidé ce point.

mêmes équations générales que les écoulements potentiels. Certes, nous serions à l'heure actuelle embarrassés de dessiner exactement la surface $\Phi_1 = 0$, ou la surface $f_1 = 0$ pour un mouvement turbulent. Mais l'existence de ces surfaces ne fait point de doute et leur forme ne peut différer essentiellement des surfaces obtenues pour des écoulements potentiels. Elles seront, par rapport à ces dernières, plus ou moins gauchies. La surface $f_1 = 0$ reste une surface à double courbure, en forme générale de vallée, avec deux versants, un talweg et, éventuellement, un certain nombre de selles.

L'ignorance où nous sommes quant à la forme exacte de la surface $f_1 = 0$ ne nous empêche nullement de faire à son sujet des raisonnements analogues à ceux des paragraphes précédents.

Dans le cas des liquides parfaits en écoulement potentiel, nous avons tracé un plan $H^*_\sigma =$ const., dont l'intersection avec la surface $f_1 = 0$ est, pour un problème donné, une courbe dont l'une des branches « représente la solution » de ce problème. Le procédé est légitime, car le plan $H_\sigma =$ const. est un lieu géométrique des solutions. Ce mode de représentation est d'ailleurs une simple transposition du procédé employé pour l'étude des écoulements normaux dans les canaux cylindriques. Nous avions alors tracé le plan de bout, d'inclinaison $J_e = i$, dont l'intersection avec la surface $f_{norm} = 0$ donne les deux solutions du problème en régime tranquille et en régime torrentiel.

Tout autre est le cas général. Remarquons que toute « courbe solution » de la surface $f_1 = 0$ peut être considérée comme l'intersection de $f_1 = 0$ avec une surface cylindrique $\Phi_2 = 0$ dont la section droite est la courbe:

$$\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial x} = -J_e,$$

où $J_e$ est nécessairement positif dans le sens du courant.

Cette surface cylindrique $\Phi_2 = 0$ coupe la surface $f_1 = 0$ selon deux courbes, puisque $f_1 = 0$ est une surface en forme de vallée. L'une de ces courbes est la solution réelle que nous examinons ; l'autre, qui lui fait vis-à-vis sur l'autre versant de la vallée, est une « pseudo-solution ». Il peut d'ailleurs exister, dans certains cas, une seconde solution sur cet autre versant. Elle est donnée par l'intersection de $f_1 = 0$ avec une surface $\Phi'_2 = 0$, différente de $\Phi_2 = 0$. Si l'écoulement est normal à l'infini amont, $\Phi_2 = 0$ et $\Phi'_2 = 0$ sont, à l'amont, asymptotiques au même plan debout d'inclinaison $J_e = i$.

Remarquons que nous pourrions nous passer totalement de la surface cylindrique $\Phi_2 = 0$ et raisonner sur la seule « courbe-solution ». L'emploi de cette surface $\Phi_2 = 0$ est simplement un mode plus commode de représenter les choses et d'exprimer que la pente $J_e$ est toujours positive, seule propriété de la surface $\Phi_2 = 0$ dont nous ayons à faire usage au cours de la démonstration qui va suivre.

Traçons donc, dans l'espace $x$, $h$, $H^*_\sigma$, la surface $f_1(x, h, H^*_\sigma) = 0$ et la surface cylindrique $\Phi_2 = 0$ dont la section droite est définie par l'équation :

$$\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial x} = -J_e$$

et qui représente la variation le long de l'axe des $x$ de la loi des pertes de charges totales : pertes par frottement et pertes par tourbillons (pertes à la Borda) y comprises. La seule hypothèse que nous ayons à faire quant à ces surfaces, est qu'elles sont continues, tout au moins dans la région où nous observons des solutions réelles. Il ne pourrait guère en être autrement en hydraulique.

L'une des courbes d'intersection de ces deux surfaces est, nous l'avons vu, la solution de l'écoulement. On en tire $h$ et $H^*_\sigma$.

Si la surface $f_1 = 0$ possède, ainsi que nous l'admettrons, certains cols, nous avons vu que $\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial x} = 0$ au sommet de ces cols. Mais on voit immédiatement qu'il n'est pas possible qu'en ces points la surface cylindrique $\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial x} = -J_e$ soit tangente à la surface gauche $f_1 = 0$, la pente $J_e$ de la ligne d'énergie d'un écoulement avec pertes de charge et à débit constant étant partout différente de zéro. S'il existe un point de contact entre les deux surfaces, il se trouvera nécessairement en aval du point le plus élevé de la selle, en un point où la tangente commune aura la pente $-J_e$.

Le point de contact des deux surfaces, s'il en existe un, est le *point critique réel de l'écoulement.*

Pour étudier ce point, nous faisons passer par l'origine des axes une surface parallèle à la surface cylindrique $\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial x} = -J_e$. Elle trace sur le plan vertical $H^*_\sigma Ox$ une courbe $Ox'$ (Fig. 6), telle que l'ordonnée d'un point de cette courbe d'abscisse $x$ est :

$$\Delta H_e = \int_0^x (-J_e)\, dx. \tag{11}$$

En désignant par $H^*_0$ la valeur de $H^*_\sigma$ à l'origine $x = 0$, où $\Delta H_e = 0$, nous avons, pour un point quelconque, la relation évidente

$$H^*_\sigma + \Delta H_e = H^*_0 = \text{const.} \tag{12}$$

et :

$$\frac{\partial H^*_o}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

pour n'importe quel point de la surface réglée et, en particulier, pour le point de contact avec la surface $f_1 = 0$.

Le peu que nous savons des pertes de charge nous apprend que $\Delta H_e$ est, en général, une fonction de $h$ (par exemple relations de Chezy ou Strickler), et que, $\frac{\partial \Delta H_e}{\partial h} \neq 0$. Si l'on a, au point critique réel, $\frac{\partial H^*_\sigma}{\partial h} = 0$ on aura, par contre, $\frac{\partial H^*_o}{\partial h} \neq 0$, en sorte qu'il n'est pas possible de caractériser les propriétés du point critique

réel, dans le cas d'écoulements avec pertes de charge, par une différentielle totale, comme dans le cas de liquides parfaits en écoulement potentiel. Nous désignerons cependant symboliquement les propriétés de ce point par $(dE)^* = 0$, en nous rappelant que

$$(14) \qquad (dE)^* = 0 \text{ signifie : } \begin{cases} \dfrac{\partial H_\sigma}{\partial h} = \dfrac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial h} = 0. \\ \dfrac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

L'examen de la figure 6 nous livre, en outre, l'une des propriétés essentielles du point critique. Le fait que la surface cylindrique est tangente à la surface $f_1 = 0$ permet, en ce point, et en ce point seul, le passage d'un des versants de la surface en forme de $U$ à l'autre versant, c'est-à-dire en nous plaçant au point de vue hydraulique, le passage d'un régime torrentiel à un régime tranquille, ou inversement. Il est essentiel de remarquer que la réciproque de ce théorème est, elle aussi, nécessairement vraie : si l'on reconnaît, le long d'un écoulement à surface libre, le passage d'un régime à un autre, on est certain qu'un point critique réel existe, quelque part, entre les profils, où l'on a pu établir avec certitude la nature de l'écoulement.

Cette remarque est particulièrement importante pour l'étude de certains écoulements turbulents, qui échappent encore à une analyse mathématique, mais le long desquels on peut reconnaître avec certitude le passage d'un régime à un autre : par exemple, le ressaut hydraulique.

L'autre propriété, non moins importante — quoique peut-être moins nette — du point de contact des deux surfaces, est de marquer une séparation certaine entre ce qui se passe à l'amont du point et ce qui se passe à l'aval. Nous avons vu, et nous le montrerons encore avec plus de détails ailleurs, que la hauteur critique $h_c$ est une grandeur caractéristique de la seule section en travers et des sections voisines. Elle ne dépend, par exemple, pas directement des pertes de charge. Ce qui se passe à l'aval ne peut donc influencer la valeur de $h_c$, du moins en première approximation. Représentons-nous maintenant, pour fixer les idées, le cas d'un déversoir. Supposons d'abord l'écoulement « noyé ». Cela signifie, d'après ce que nous avons vu, que la surface cylindrique coupe la surface $f_1 = 0$ sans lui être tangente. Il n'y a pas de point de contact et nulle part le régime de l'écoulement ne change. Supposons maintenant que, peu à peu, en modifiant l'écoulement à l'aval, nous arrivions à baisser la surface cylindrique jusqu'au moment où elle touche la surface $f_1 = 0$, créant ainsi un point critique réel. A partir de ce moment, on peut modifier encore le régime aval : la surface cylindrique ne peut, nous l'avons vu, descendre plus bas que le point de contact. Elle reste comme accrochée à ce point : l'écoulement aval est sans influence sur l'écoulement amont. C'est la seconde caractéristique des écoulements ayant un point critique réel.

La réciproque de ce théorème n'est peut-être pas aussi évidente : on peut cependant raisonner comme suit : que l'écoulement soit normal ou graduellement varié, toute modification du régime aval ou amont se transmet indéfiniment (en diminuant asymptotiquement) vers l'amont ou l'aval. Cette progression vers l'amont ou l'aval ne peut être interrompue que par la présence d'un point critique. On ne peut pas se représenter un écoulement qui, à partir d'un certain profil, n'est plus influencé ni par l'écoulement aval ni par l'amont, sans qu'il y ait en ce point, une section critique, avec $h = h_c$. On doit cependant signaler, à titre d'exception, le cas d'un écoulement torrentiel sur toute la longueur, influençable d'amont en aval seulement, mais non d'aval vers l'amont.

Nous avons fait une certaine réserve en écrivant : « en première approximation ». Il existe, en effet, des cas où l'écoulement aval peut influencer, en une mesure restreinte, la surface $f_1 = 0$. On a alors des surfaces $f_1 = 0$ qui sont « à double nappe » ou à nappes multiples ; ce qui laisse entrevoir qu'il y a plusieurs solutions hydrauliques possibles. L'exemple classique de ces types d'écoulement est le ressaut hydraulique sur fond avec décrochement (étudié par Escande [1]).

Les deux propriétés du profil critique que nous venons de décrire étaient déjà connues depuis longtemps pour le cas des écoulements avec filets rectilignes. Elles restent donc vraies pour n'importe quel écoulement : à filets curvilignes, potentiel ou turbulent.

C'est donc la même propriété de la surface $f_1 = 0$ qui explique le passage du régime torrentiel au régime tranquille dans le cas d'un ressaut hydraulique, ou le passage du régime tranquille au régime torrentiel dans le cas d'une variation de la pente d'un canal, dans le cas d'un déversoir à large crête (cas de Bélanger), ou encore dans le cas d'un déversoir à crête arrondie.

Dans ce qui précède, nous avons étudié les propriétés des écoulements possédant un point critique réel. *Resterait à montrer quelles conditions doivent être satisfaites pour qu'un point critique réel s'établisse.*

A l'heure actuelle, l'énoncé d'un théorème général qui se prononcerait sur cette question nous échappe. Contentons-nous de deux remarques : quand un point critique réel existe, la surface réglée $\Phi_2 = 0$ ne peut descendre plus bas, et *la position de la ligne d'énergie est minimum.* D'autre part, il est difficile de se représenter un écoulement entièrement « à l'air libre » qui ne possède point, quelque part, un point critique réel. Prenons le cas d'un déversoir noyé. Pour noyer l'écoulement pardessus le déversoir, il nous faut relever artificiellement le niveau aval, soit par un second déversoir, soit par une

[1] L. Escande : *Recherches théoriques et expérimentales sur l'écoulement par vanne de fond.* Revue générale de l'Hydraulique, janvier à juin 1939.

vanne. Dans les deux cas, il y a un point critique et minimum d'énergie au droit du second ouvrage.

On peut cependant décrire un cas d'écoulement où il n'y a aucun point critique : considérons deux bassins infiniment grands, à niveau stable, réunis par un canal profond et peu incliné, dans lequel le seul régime possible est le régime tranquille. Nulle part il n'y a de point critique et, cependant, la ligne d'énergie occupe bien une position parfaitement déterminée dont dépend le débit.

### Enoncé de Bélanger-Böss généralisé.

Tout courant permanent à surface libre et à débit constant, qu'il soit potentiel ou turbulent, avec ou sans débit solide, peut être représenté par l'intersection de deux surfaces : la surface $f_1(x, h, H_\sigma^*) = 0$ et la surface $\Phi_2 = 0$. La surface $f_1 = 0$ est une surface à double courbure, en forme de vallée. La surface $\Phi_2 = 0$ est une surface cylindrique dont la pente est constamment négative dans le sens du courant.

En aucun cas, la surface $\Phi_2 = 0$ ne peut passer au-dessous de la surface $f_1 = 0$. Elle est constamment au-dessus de cette dernière, ou peut lui être tangente en un ou plusieurs points. Lorsque les deux surfaces sont tangentes, le point de contact est dit « point critique réel de l'écoulement ».

Dans le cas d'un liquide parfait en écoulement potentiel, dont l'énergie totale, mesurée par rapport à un plan de référence fixe, est $E^* = \gamma H_\sigma^* \cdot Q$, le point critique coïncide avec une selle de la surface $f_1 = 0$, et l'on a :

$$dE^* = 0.$$

Dans le cas général d'un écoulement turbulent, avec pertes de charge par frottement, s'il existe un point de contact des deux surfaces, il ne peut coïncider avec une selle. On aura toujours, en un point critique réel :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial h} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = \dfrac{\partial H_\sigma}{\partial h} = 0 \\ \dfrac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

conditions que nous écrivons symboliquement :

$$(dE)^* = 0.$$

et qui exprime, entre autres, qu'en ce point la position occupée par la ligne d'énergie est minimum pour un débit donné et que pour $H_\sigma^*$ donné, le débit est maximum.

Le sens physique du théorème de Boussinesq serait donc de ramener l'étude des courants à surface libre à des considérations d'énergie.

En un point critique réel, la hauteur d'eau $h_c$ prend une valeur caractéristique $h_c$, que l'on obtient en écrivant :

$$\frac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial Q}{\partial h} = 0.$$

Cette valeur ne dépend pas du frottement.

Une première propriété du point critique réel est de permettre le passage d'un écoulement tranquille à un écoulement torrentiel, ou inversement. Une seconde propriété non moins essentielle du point critique est que, tant que le point critique existe, l'écoulement aval est sans influence sur l'écoulement amont. Il est essentiel de remarquer que les réciproques de ces énoncés sont vraies. Si l'on observe l'une des deux propriétés, l'autre doit nécessairement être satisfaite, elle aussi, et il existe un point critique réel de l'écoulement.

L'écoulement en régime uniforme ou normal ($h = h_n$) correspond à l'intersection de la surface $f_1 = 0$, dégénérée en surface cylindrique, à courbure simple, avec le plan

$$\frac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = \text{const.}$$

Il importe, pour calculer les lignes de remous, de connaître exactement la position du profil critique et la valeur de la hauteur critique $h_c$. C'est parce qu'il permet, dans un certain nombre de cas, le calcul des valeurs $h_c$, que l'énoncé de Bélanger-Böss a une portée pratique immédiate.

## DIVERS

### Assemblées générales de l'Association suisse des Electriciens et de l'Union des centrales suisses d'électricité.

Les assemblées générales de ces deux importantes associations auront lieu à Montreux, les 28 et 29 août 1943 ; des excursions suivront le 30 août.

En plus des séances administratives, sont inscrites au programme des conférences sur les usines à bassins d'accumulation du Rheinwald et de la vallée d'Urseren ; sur le passé, le présent et l'avenir de la traction électrique en Suisse. Des excursions sont prévues aux Ateliers de constructions mécaniques à Vevey, à la fabrique de produits chimiques de la « Ciba » à Monthey, à la S. A. pour l'industrie de l'Aluminium à Chippis, à l'Usine de Chandoline et au barrage de la Dixence. Les dames sont priées de prendre part à une course en funiculaire aux Rochers de Naye et à une visite du château de Chillon.

Les inscriptions doivent parvenir à l'administration commune de l'A. S. E. et de l'U. C. S., Seefeldstrasse 301, Zurich, avant le 24 août 1943. On peut obtenir à cette adresse tous renseignements concernant ces manifestations.

### Assemblée générale de la Société suisse de l'industrie du gaz et des eaux.

Cette assemblée générale aura lieu les 4 et 5 septembre 1943, à Berne. Elle coïncidera avec la commémoration du centenaire de l'Usine à gaz de cette ville et de l'industrie gazière suisse. Diverses manifestations sont prévues au programme de ces journées. Notons en particulier des exposés sur les sujets suivants : « 100 Jahre Gasindustrie in der Schweiz », « Die Technischen Leistungen der Schweizerischen Gaswerke », « Die Bedeutung der Schweizerischen Gasindustrie für die Industrie unseres Landes ».

Des excursions sont prévues le lundi 6 septembre 1943. Tous renseignements peuvent être obtenus auprès du secrétariat de la *Société suisse du gaz et des eaux*, Dreikönigstrasse 18, Zurich.