Les séries de Fourier et leur application à certaines intégrations

Autor(en): **Blanc, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **69 (1943)**

Heft 23

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-52533

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

69e année — 13 novembre 1943 — N° 23

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 13.50 francs
Etranger : 16 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 11 francs
Etranger : 13.50 francs
Prix du numéro : 75 centimes.
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : M. Imer, à Genève ; secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; P. Joye, professeur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur ; E. Elskes, ingénieur ; Epitaux, architecte ; E. Jost, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte ; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur ; E. Martin, architecte ; E. Odier, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur ; A. Méan, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur ; A. de Kalbermatten, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts.
Tarif spécial pour fractions de pages.
En plus 20 % de majoration de guerre.
Rabais pour annonces répétées.

ANNONCES-SUISSES S.A.
5, Rue Centrale,
LAUSANNE
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; M. Imer.

SOMMAIRE : *Les séries de Fourier et leur application à certaines intégrations*, par Ch. Blanc, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne. — *Quelques aspects du calcul des ouvrages en béton précontraint* (suite et fin), par F. Panchaud, professeur à l'Ecole d'Architecture de Lausanne. — *Société suisse des ingénieurs et des architectes : Procès-verbal de l'assemblée des délégués du 11 septembre 1943.* — Correspondance : *A propos du projet de la route de grande communication par la vallée de la Venoge.* — Bibliographie. — Service de placement.

Les séries de Fourier et leur application à certaines intégrations,

par Ch. BLANC, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

On peut distinguer deux problèmes essentiellement différents où interviennent les séries de Fourier.

Le premier (l'analyse harmonique) est la recherche d'une série destinée à représenter une *fonction donnée* ; en soi, il n'y a pas d'intérêt particulier à chercher la série de Fourier d'une fonction ; mais on sait (et on le verra plus loin par certains exemples) qu'il peut être avantageux de le faire si cette fonction constitue le second membre d'une équation différentielle linéaire.

Le second problème est la recherche, sous forme d'une série de Fourier, d'une *fonction inconnue a priori* et définie par certaines conditions, particulièrement par une équation différentielle avec conditions aux limites. La recherche d'une *fonction* est ainsi transformée en la recherche d'une *suite de coefficients*, problème souvent plus simple : on a alors une méthode de *transformation*, analogue, pour les problèmes aux limites, à la transformation de Laplace pour les problèmes à conditions initiales [1].

En général, les deux points de vue se rencontrent simultanément dans une même question ; mais les moyens propres à fournir le résultat sont fort différents. Les formules pour le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction donnée sont bien connues (on les rappellera ci-dessous) ; nous sortirions de notre sujet en parlant des méthodes numériques, graphiques ou mécaniques qui réalisent ces formules. Nous nous attacherons par contre à indiquer dans quel esprit il faut user des séries de Fourier lorsqu'elles sont utilisées comme méthodes d'intégration d'équations différentielles. Nous donnons, en guise de préambule, l'extension de certaines formules classiques de calcul intégral au cas de fonctions discontinues : on voudra bien ne pas y voir une spéculation de pure mathématique, mais au contraire des calculs nécessaires, les fonctions discontinues jouant un rôle essentiel, et souvent trop négligé, dans les mathématiques de l'ingénieur (charges concentrées, percussions, ondes de choc, etc.).

Nous donnons ensuite une définition de la série de Fourier qui est assez différente de celles que l'on rencontre dans les traités classiques. Elle a, pensons-nous, l'avantage de faire ressortir très simplement les propriétés de ces séries, tout en exigeant des démonstrations plus simples. Cette définition permet d'établir les formules (3. 1) qui sont la clé de cette étude. Nous terminons par quelques exemples.

1. Formule d'intégration par parties.

Lorsque nous parlerons d'une fonction quelconque $f(x)$, nous supposerons implicitement qu'elle est définie dans l'intervalle $(-l, +l)$, cet intervalle étant composé d'un nombre fini d'intervalles partiels où la fonction est analytique ; en d'autres termes, cette fonction est continue et dérivable partout excepté en un nombre fini de

[1] Voir Ch. Blanc : « Transformation de Laplace et équations différentielles », *Bulletin technique*, 6 février 1943, p. 25-30.

points, et sa dérivée jouit des mêmes propriétés. Les seules discontinuités possibles sont des *sauts*. Soit x_K l'abscisse d'un de ces sauts : $f(x_K - 0)$ et $f(x_K + 0)$ représentent les limites à gauche et à droite de $f(x)$ en $x = x_K$; on pose $\delta_K = f(x_K + 0) - f(x_K - 0)$.

Ces discontinuités introduisent quelques modifications dans les formules d'intégration. La fonction $f(x)$ étant continue dans (x_K, x_{K+1}), on a

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f'(x)\,dx = f(x_{K+1} - 0) - f(x_K + 0),$$

et, en faisant la somme pour tous les intervalles partiels,

$$\int_{-l}^{+l} f'(x)\,dx = \delta_o - \Sigma\delta_K \qquad (1.\,1)$$

où $\delta_o = f(l) - f(-l)$.

De même, si $g(x)$ est partout dérivable et continue,

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f'(x)g(x)dx = f(x_{K+1} - 0)\,g(x_{K+1}) - f(x_K + 0)g(x_K) - \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)\,g'(x)\,dx,$$

et, en faisant la somme,

$$\int_{-l}^{+l} f'(x)g(x)dx = f(l)g(l) - f(-l)g(-l) - \Sigma\delta_K g(x_K) - \int_{-l}^{+l} f(x)g'(x)dx \qquad (1.2)$$

formule qui constitue une généralisation de la formule usuelle d'intégration par parties.

2. Série de Fourier.

Soient une fonction quelconque $f(x)$ et une somme (polynôme trigonométrique)

$$\varphi_n(x) = a_o + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.\,1)$$

On se propose de déterminer les $(2n + 1)$ coefficients de $\varphi_n(x)$ de façon que l'intégrale

$$M_n^2 = \int_{-l}^{+l} [f(x) - \varphi_n(x)]^2 dx \qquad (2.\,2)$$

soit *minimum*. M_n^2 est un polynôme du second degré en $a_o, a_1, \ldots b_n$; on obtient le minimum en annulant les dérivées de M_n^2 par rapport à ces inconnues. On obtient ainsi un système de $(2n + 1)$ équations du premier degré, qui se simplifie considérablement par le fait que les fonctions qui figurent dans l'expression de $\varphi_n(x)$ sont *orthogonales* dans $(-l, +l)$, par quoi il faut entendre que l'intégrale du produit de deux d'entre elles (différentes) est toujours nulle. On tire alors très simplement les formules (formules d'Euler) :

$$a_o = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx$$

$$a_p = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{p\pi x}{l}\,dx \qquad (2.\,3)$$

$$b_p = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{p\pi x}{l}\,dx.$$

On remarque que le résultat ne dépend pas de n : ainsi, quel que soit le nombre de termes que l'on se propose de calculer, l'écart minimum sera réalisé si l'on donne aux a_p et aux b_p les valeurs indiquées par les relations (2. 3). Cet écart se calcule facilement ; en tenant compte de l'orthogonalité et des relations (2. 3), on obtient

$$M_n^2 = \int_{-l}^{+l} f^2(x)\,dx - l[2a_o^2 + a_1^2 + \ldots + b_n^2] \qquad (2.\,4)$$

Lorsque n augmente, M_n^2 ne peut que diminuer, et puisque $M_n^2 \geqq 0$, on a

$$2a_o^2 + a_1^2 + \ldots + b_n^2 \leqq \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f^2(x)\,dx. \qquad (2.\,5)$$

Il en résulte que, si $n \to \infty$, la série

$$2a_o + a_1^2 + \ldots + a_p^2 + b_p^2 + \ldots \qquad (2.\,6)$$

converge, et sa somme ne dépasse pas $\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f^2(x)\,dx$; on démontre même que cette somme est exactement égale à sa borne supérieure, en d'autres termes, *l'écart M_n^2 tend vers zéro lorsque $n \to \infty$*. Le *polynôme* trigonométrique (2. 1) devient alors une *série* trigonométrique

$$a_o + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_p \cos\frac{p\pi x}{l} + b_p \sin\frac{p\pi x}{l} + \ldots \qquad (2.\,7)$$

la *série de Fourier* de $f(x)$. Cette série converge, elle converge *en moyenne* vers $f(x)$, ce qui signifie que la limite de l'écart M_n^2 est nulle ; sa somme, pour chaque valeur de x, est égale à $f(x)$ si $f(x)$ est continue ; en un point de discontinuité, elle est égale à la moyenne des valeurs limites à gauche et à droite.

On peut montrer qu'une série telle que (2. 7), donnée *a priori* et dont la somme des carrés des coefficients converge, est convergente ; sa somme est une fonction $g(x)$ dont la série de Fourier, calculée par les formules (2. 3), est précisément la série donnée (il convient de remarquer que cette fonction $g(x)$ peut ne pas être du type de celles que nous voulons considérer ici, mais ce fait n'a pas d'importance pour nous).

Les exemples de calcul de coefficients de Fourier par les formules (2. 3) sont assez connus pour que l'on puisse se dispenser d'en donner ici de nouveaux.

3. Coefficients de Fourier de la dérivée d'une fonction.

Considérons une fonction $f(x)$ et le polynôme correspondant

$$\varphi_n(x) = a_o + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + \ldots \qquad + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

où les coefficients sont calculés au moyen de (2. 3) ; on a le droit de calculer $\varphi_n'(x)$ en dérivant terme à terme (puisqu'il s'agit d'une somme d'un nombre fini de termes) ; mais rien ne nous permet d'affirmer alors que la somme obtenue est l'expression que l'on aurait trouvée en appliquant les formules (2. 3) à $f'(x)$. En d'autres termes, nous ne pouvons affirmer qu'à la dérivée d'une fonction correspond la dérivée du polynôme trigonométrique associé par (2. 3). Un examen plus précis est nécessaire.

Représentons par

$$\varphi_n^\star(x) = a_o^\star + a_1^\star \cos\frac{\pi x}{l} + \ldots \qquad + b_n^\star \sin\frac{n\pi x}{l}$$

le polynôme lié à $f'(x)$ par (2. 3). On a donc

$$a_o^\star = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f'(x)\,dx,$$

d'où, par (1. 1),

$$a_o^\star = \frac{1}{2l}(\delta_o - \Sigma\delta_K) ;$$

puis

$$\begin{aligned} a_p^\star &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f'(x)\cos\frac{p\pi x}{l}\,dx \\ &= \frac{1}{l}\left[f(l)\cos p\pi - f(-l)\cos p\pi\right] - \frac{1}{l}\Sigma\delta_K\cos\frac{p\pi x_K}{l} + \\ &\qquad + \frac{p\pi}{l^2}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{p\pi x}{l}\,dx \\ &= \frac{1}{l}\left[(-1)^p\delta_o - \Sigma\delta_K\cos\frac{p\pi x_K}{l}\right] + \frac{p\pi}{l}\,b_p. \end{aligned}$$

On peut faire un calcul semblable pour $b_p^\star$, et on a ainsi, entre les coefficients de $\varphi_n(x)$ et ceux de $\varphi_n^\star(x)$, les relations fondamentales suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} a_o^\star &= \frac{1}{2l}(\delta_o - \Sigma\delta_K) \\ a_p^\star &= \frac{(-1)^p}{l}\delta_o - \frac{1}{l}\Sigma\delta_K\cos\frac{p\pi x_K}{l} + \frac{p\pi}{l}\,b_p \\ b_p^\star &= \qquad - \frac{1}{l}\Sigma\delta_K\sin\frac{p\pi x_K}{l} - \frac{p\pi}{l}\,a_p \end{aligned}} \qquad (3.\ 1)$$

Remarquons que si $f(x)$ est continue et périodique, de période $2l$, on a $\delta_o = \delta_K = 0$, d'où

$$a_o^\star = 0, \quad a_p^\star = \frac{p\pi}{l}\,b_p, \quad b_p^\star = -\frac{p\pi}{l}\,a_p. \qquad (3.\ 2)$$

Dans ce cas, mais *dans ce cas seulement*, on passe de $\varphi_n(x)$ à $\varphi_n^\star(x)$ par dérivation.

Les relations (3. 1) simplifient le calcul des coefficients de Fourier de certaines fonctions. Les exemples qui suivent permettent de s'en rendre compte.

Exemple 1 : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ égale à $-A$ si $-l < x \leq 0$ et à A si $0 < x < l$. On a $f'(x) = 0$, d'où $a_p^\star = b_p^\star = 0$. Puis $\delta_o = A - (-A) = 2A$. Il y a une discontinuité, pour $x = 0$, avec $\delta_1 = 2A$. D'où par (3. 1),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2l}(2A - 2A) \\ 0 &= \frac{1}{l}\left[(-1)^p\,2A - 2A\right] + \frac{p\pi}{l}\,b_p \\ 0 &= \qquad\qquad - \frac{p\pi}{l}\,a_p, \end{aligned}$$

et

$$a_o = 0, \qquad a_p = 0,$$

$$b_p = \frac{2A}{p\pi}\left[1 - (-1)^p\right]. \qquad (3.\ 3)$$

Exemple 2 : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = e^{\mu x}$. Cette fonction est continue,

$$\delta_o = e^{\mu l} - e^{-\mu l} = 2sh\,\mu l$$

et d'autre part $f'(x) = \mu . f(x)$, d'où

$$a_o^\star = \mu a_o, \qquad a_p^\star = \mu a_p, \qquad b_p^\star = \mu b_p,$$

et, par (3. 1),

$$a_o^\star = \frac{1}{2l}\,2sh\mu l$$

$$a_p^\star = \frac{(-1)^p}{l}\,2\,sh\mu l + \frac{p\pi}{l}\,b_p ; \qquad b_p^\star = -\frac{p\pi}{l}\,a_p ;$$

un calcul simple donne alors

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{1}{\mu l}\,sh\mu l \\ a_p &= \frac{(-1)^p}{\mu^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\,\frac{2\mu\,sh\mu l}{l} \\ b_p &= \frac{-(-1)^p}{\mu^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\,\frac{2\,\frac{p\pi}{l}\,sh\mu l}{l}. \end{aligned} \qquad (3.\ 4)$$

Exemple 3 : Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction impaire $f(x)$, égale dans $(0, l)$ au moment par rapport au point d'abscisse x de forces appliquées aux points du segment $(0, x)$. Ces forces résultent :

1. d'une charge répartie, de densité linéaire $\mu(x)$;
2. de charges concentrées $\tau_1, \tau_2, \ldots$ aux points d'abscisses $x_1, x_2, \ldots$; soit de plus τ_o la force en $x_o = 0$ (il s'agit toujours de forces perpendiculaires à l'axe, et coplanaires).

On a

$$f(x) = \int_o^x (x - \xi)\,\mu(\xi)\,d\xi + \Sigma'(x - x_K)\,\tau_K$$

la somme Σ' étant étendue aux $x_K < x$. Alors

$$f'(x) = \int_o^x \mu(\xi)\, d\xi + \Sigma' \gamma_K$$

et $$f''(x) = \mu(x).$$

Soit $$\mu(x) = \Sigma \beta_p \sin \frac{p\pi x}{l}$$

le développement en série de Fourier de la fonction impaire coïncidant, sur $(0, l)$, avec la fonction donnée $\mu(x)$. On a alors $\delta_K^* = \gamma_K$, $\delta_o^* = 0$ (f' est paire) ; $f(x)$ est continue, d'où $\delta_K = 0$; par contre

$$\delta_0 = 2\left[\int_o^l (l - \xi)\, \mu(\xi)\, d\xi + \Sigma (l - x_K) \gamma_K\right]$$

$$= 2M \qquad \text{(pour simplifier l'écriture).}$$

On a ainsi, par (3. 1),

$$b_p^{**} = \beta_p = -\frac{2}{l} \Sigma \gamma_K \sin \frac{p\pi x_K}{l} - \frac{p\pi}{l} a_p^*$$

$$a_p^* = \frac{(-1)^p}{l} 2M + \frac{p\pi}{l} b_p$$

et (3. 5)

$$b_p = -\left(\frac{l}{p\pi}\right)^2 \beta_p - \frac{2}{l}\left(\frac{l}{p\pi}\right)^2 \Sigma \gamma_K \sin \frac{p\pi x_K}{l} - 2M \frac{(-1)^p}{p\pi}.$$

4. Application des séries de Fourier à l'intégration d'équations différentielles.

Nous arrivons au second des problèmes dont il a été question au début. On pourra utiliser les relations (3. 1) chaque fois que les conditions imposées à l'intégrale feront intervenir les quantités δ qui figurent dans ces relations. Quelques exemples permettront de le montrer.

Exemple 1 : Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + ry = F(x)$$

avec les conditions

$$y(0) = \alpha, \qquad y(l) = \beta.$$

On va chercher une fonction impaire $f(x)$, égale à y dans $(0, l)$; $f(x)$ a une discontinuité en $x = 0$, avec $\delta_1 = 2\alpha$; d'autre part $\delta_o = f(l) - f(-l) = 2\beta$. Enfin, $f'(x)$ est paire et continue, d'où $\delta_0^* = \delta_K^* = 0$. La fonction $f(x)$ étant impaire, on a $a_p = b_p^* = a_p^{**} = 0$ (un astérisque désigne une quantité relative à la dérivée première, deux astérisques une quantité relative à la dérivée seconde). Soit de plus

$$F(x) = \Sigma B_p \sin \frac{p\pi x}{l}$$

la série de Fourier de la fonction impaire coïncidant avec $F(x)$ dans $(0, l)$. On a alors, par l'équation différentielle et par les relations (3. 1),

$$b_p^{**} = -\frac{p\pi}{l} a_p^*$$

$$a_p^* = \frac{(-1)^p}{l} 2\beta - \frac{2\alpha}{l} + \frac{p\pi}{l} b_p$$

$$b_p^{**} + r b_p = B_p,$$

d'où

$$b_p = \frac{1}{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 - r}\left[\frac{2p\pi}{l^2}\{\alpha - \beta(-1)^p\} - B_p\right]$$

ce qui résoud le problème.

Si, en particulier, $\alpha = \beta = 0$ et $F(x) = -\varphi$ (constante), alors, par (3. 3),

$$B_p = \frac{-2\varphi}{p\pi}[1 - (-1)^p]$$

d'où

$$b_p = \frac{1}{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 - r} \cdot \frac{2\varphi[1 - (-1)^p]}{p\pi}.$$

Exemple 2 : Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + ry = F(x)$$

avec les conditions

$$y'(0) = \alpha^*, \qquad y'(l) = \beta^*.$$

On cherchera une fonction paire $f(x)$ coïncidant avec y sur $(0, l)$; de même, on écrira la série de Fourier de la fonction paire coïncidant avec $F(x)$ sur $(0, l)$:

$$F(x) = \Sigma A_p \cos \frac{p\pi x}{l} ;$$

les calculs seront conduits comme dans l'exemple précédent ; on a

$$a_p^{**} = \frac{(-1)^p}{l} 2\beta^* - \frac{2}{l}\alpha^* + \frac{p\pi}{l} b_p^*$$

$$b_p^* = -\frac{p\pi}{l} a_p$$

$$a_p^{**} + r a_p = A_p$$

d'où

$$a_p = \frac{-1}{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 - r}\left[\frac{2}{l}\{\alpha^* - (-1)^p \beta^*\} + A_p\right]$$

Exemple 3 : Intégrer l'équation différentielle

$$y'' + ry = F(x).$$

On demande une intégrale périodique de période $2l$, continue et dont la dérive première présente certaines discontinuités données (problème de *choc*). Soient $x_1, \ldots, x_K, \ldots$ les abscisses de ces discontinuités, $\delta_1^*, \ldots, \delta_K^*, \ldots$ leur valeur. On cherche la fonction inconnue y sous forme d'une série de Fourier dans $(-l, +l)$, A_p et B_p étant les coefficients de Fourier (connus) de $F(x)$ dans ce même intervalle. On a, par (3. 1),

$$a_p^* = \frac{p\pi}{l} b_p \qquad b_p^* = -\frac{p\pi}{l} a_p$$

$$a_p^{**} = -\frac{1}{l} \Sigma \delta_K \cos \frac{p\pi x_K}{l} + \frac{p\pi}{l} b_p^*$$

$$b_p^{**} = -\frac{1}{l} \Sigma \delta_K \sin \frac{p\pi x_K}{l} - \frac{p\pi}{l} a_p^*$$

et, par l'équation différentielle,

$$a_p^{**} + r a_p = A_p$$
$$b_p^{**} + r b_p = B_p ;$$

d'où, en résolvant le système,

$$a_p = \frac{1}{r - \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\left[A_p + \frac{1}{l}\Sigma\delta_K \cos\frac{p\pi x_K}{l}\right]$$

$$b_p = \frac{1}{r - \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\left[B_p + \frac{1}{l}\Sigma\delta_K \sin\frac{p\pi x_K}{l}\right].$$

En particulier, si $F(x) = 0$ et s'il n'y a qu'une discontinuité δ, pour $x = 0$,

$$a_p = \frac{1}{r - \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}\frac{\delta}{l}\,; \qquad b_p = 0.$$

On est conduit au même problème lorsqu'on cherche la série de Fourier d'une fonction *linéaire par intervalles*. On a alors $y'' = 0$, donc $r = 0$, $F = 0$, d'où

$$a_p = \frac{-l}{(p\pi)^2}\Sigma\delta_K \cos\frac{p\pi x_K}{l} \qquad b_p = \frac{-l}{(p\pi)^2}\Sigma\delta_K \sin\frac{p\pi x_K}{l};$$

ces expressions donnent très simplement les coefficients de Fourier des fonctions dont la représentation graphique est un polygone.

De ces trois exemples, on peut déduire ceci : si l'on cherche une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, intégrale prenant, pour deux valeurs $x = 0$ et $x = l$ de la variable, des valeurs données, on cherchera à donner cette intégrale sous forme d'une série de Fourier en *sinus* ; les formules (3.1) permettent alors d'écrire les coefficients. Si la fonction est donnée par ses dérivées aux limites, on prendra une série en *cosinus* ; enfin, si la fonction est astreinte à être périodique, avec des discontinuités données (ainsi que sa dérivée), on prendra une série générale, en sinus et cosinus.

5. Série double de Fourier

On peut établir, de la même manière, une théorie des séries doubles de Fourier ; on trouve des formules généralisant les relations (3. 1), ce qui permet d'appliquer ces séries doubles à l'intégration d'équations aux dérivées partielles, dans les cas tout au moins où le domaine d'intégration est un rectangle. Nous ne donnerons pas le détail des calculs.

On étend tout d'abord la formule de Green à des fonctions discontinues (comme la relation (1. 2) généralisait la formule d'intégration par parties). Il faut alors distinguer : les discontinuités de la fonction, celles de son gradient, et enfin les points isolés où le laplacien de la fonction cesse d'être défini. Supposons la fonction $f(x, y)$ impaire, définie dans le rectangle $|x| < l, |y| < m$; appelons b_{pq} le coefficient de $\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{q\pi y}{m}$ et $b_{pq}^{\star\star}$ le coefficient du même terme pour Δf (laplacien de f). Soient encore : Γ_K une courbe sur laquelle f présente une discontinuité $\delta_K(x, y)$; Γ'_K une courbe sur laquelle $\frac{df}{dn}$ (dérivée normale de f) présente une discontinuité $\eta_K(x, y)$; $P_K(x_K, y_K)$ un point où Δf cesse d'être défini, avec $\rho_K = \lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{df}{dn}\,ds$, C_r étant le cercle de centre P_K et de rayon r. Enfin, $f(x, y)$ est donnée sur le contour du rectangle $o \leqq x \leqq l$, $o \leqq y \leqq m$. On a alors

$$\begin{aligned}
-b_{pq}^{\star\star} = \pi^2\left[\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q}{m}\right)^2\right]b_{pq}
&+ \frac{4q\pi}{lm^2}\int_o^l [(-1)^q f(x, m) - f(x, o)]\sin\frac{p\pi x}{l}\,dx \\
&+ \frac{4p\pi}{l^2 m}\int_o^m [(-1)^p f(l, y) - f(o, y)]\sin\frac{q\pi y}{m}\,dy \\
&+ \frac{4}{lm}\sum_K\int_{\Gamma_K}\delta_K(x, y)\,\frac{d}{dn}\left(\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{q\pi y}{m}\right)ds \\
&+ \frac{4}{lm}\sum_K\int_{\Gamma'_K}\eta_K(x, y)\sin\frac{p\pi x}{l}\sin\frac{q\pi y}{m}\,ds \\
&+ \frac{4}{lm}\sum_K \rho_K \sin\frac{p\pi x_K}{l}\sin\frac{q\pi y_K}{m}. \qquad (5.\ 1)
\end{aligned}$$

Donnons en juste deux exemples.

Exemple 1 : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction impaire égale à la constante A dans le rectangle

$$o \leqq x \leqq l, \qquad o \leqq y \leqq m.$$

Ici, $b_{pq}^{\star\star} = 0$, et il n'y a aucune discontinuité, d'où

$$o = \pi^2\left[\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q}{m}\right)^2\right]b_{pq}$$

$$+\frac{4q\pi A}{lm^2}[(-1)^q - 1]\int_o^l \sin\frac{p\pi x}{l}dx + \frac{4p\pi A}{l^2 m}[(-1)^p - 1]\int_o^m \sin\frac{q\pi y}{m}\,dy$$

et

$$b_{pq} = \frac{4A}{\pi^2 pq}[(-1)^p - 1][(-1)^q - 1.] \qquad (5.\ 2)$$

Exemple 2 : La fonction est impaire, nulle pour $x = 0, l$ et pour $y = 0, m$; elle est régulière, son laplacien est nul, excepté au point $P(x_o, y_o)$ où on a la singularité de mesure ρ. Alors

$$o = \pi^2\left[\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q}{m}\right)^2\right]b_{pq} + \frac{4}{lm}\rho\sin\frac{p\pi x_o}{l}\sin\frac{q\pi y_o}{m}$$

donc

$$b_{pq} = \frac{-4\rho}{\pi^2 lm\left[\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{q}{m}\right)^2\right]}\sin\frac{p\pi x_o}{l}\sin\frac{q\pi y_o}{m}. \qquad (5.\ 3)$$

C'est l'expression que l'on rencontre dans le problème de la plaque rectangulaire soumise à une charge concentrée unique.

Il n'est pas difficile, en s'inspirant de ce qui précède, de trouver des relations semblables.

6. Conclusion.

Moyennant des règles précises et fort simples (qui sont contenues dans les formules (3. 1)), les séries de Fourier sont un instrument très commode pour l'intégration de certains problèmes aux limites. Il ne s'agit toutefois pas d'une méthode universelle : si l'équation est plus compliquée, ou si les conditions sont par exemple mixtes (si elles font intervenir la fonction inconnue *et* sa dérivée), les relations (3. 1) ne sont plus utilisables, et le procédé est en défaut. Toutefois, on peut montrer qu'il existe le plus souvent un type de série (autre que la série de Fourier, mais procédant aussi par fonctions orthogonales) adapté à chaque cas et donnant la solution d'une façon analogue. Nous dépasserions le cadre de cette étude en cherchant à en dire plus.

Lausanne, le 31 juillet 1943.

Quelques aspects du calcul des ouvrages en béton précontraint

par F. PANCHAUD,
professeur à l'Ecole d'Architecture de Lausanne.

(Suite et fin.[1]*)*

12. Essais et réalisations.

Les premières poutrelles en béton précontraint que nous avons exécutées à titre d'essai en 1938 déjà, avaient une armature formée de fils d'acier à haute résistance (rupture 19 t/cm²), de 2 mm de diamètre, ancrées dans le béton soit par un dispositif spécial (tourillon d'ancrage noyé dans les extrémités de la poutrelle), soit par adhérence du béton. Ces poutrelles ont été bétonnées verticalement ; la figure 9 montre l'armature tendue avant le bétonnage. Grâce à ces essais, nous avons pu vérifier expérimentalement le degré d'approximation des hypothèses de calcul et l'exactitude des principes fondamentaux de la résistance du béton précontraint, à savoir :

[1] Voir *Bulletin technique* du 30 octobre 1943, p. 285.

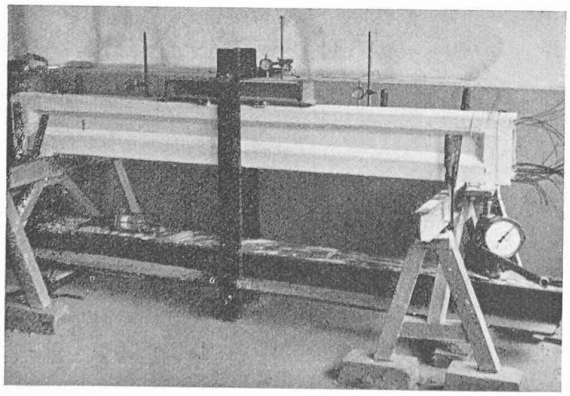

Fig. 10. — Poutrelle d'essai. Résistance à la flexion.

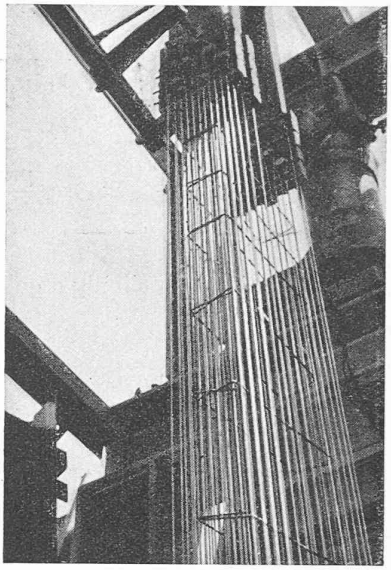

Fig. 9. — Poutrelle d'essai n° 2. Armatures tendues avant bétonnage.

a) avant la fissuration, le béton résiste à la manière d'un matériau homogène et l'acier ne joue qu'un rôle effacé dans la résistance aux charges extérieures;

b) tant que la première fissuration ne s'est pas produite, on est en droit d'admettre la participation à la résistance du béton tendu.

Le tableau de la figure 11 récapitule les résultats principaux de ces essais ; on constate effectivement que

Fig. 11. — Poutrelles d'essai. Tableau des résultats principaux.

Poutrelles n°	1	2	3	4
1. *Dimensions.*				
Portée cm	208	208	350	210
Hauteur cm	27	27	20	12
Section du béton cm²	267	267	173	96
Mod. de résistance béton seul cm³	1440	1440	732	185
Mod. de résist. de la section totale $n = 5$ Wsup. cm³	1470	1500	760	—
Winf. cm³	1550	1565	786	—
Armatures	adhérence + ancrage	adhérence seule	adhérence seule	câbles libres
2. *Précontrainte.*				
Age du béton à la mise en tension	17 j.	11 j.	15 j.	24 j.
Etat initial : Acier t/cm²	13	11,3	12	8
Béton : σsup. kg/cm²	+ 14	— 28	— 7	+ 10
σinf. kg/cm²	—186	—150	—176	—170
Age du béton à l'essai	30 j.	18 j.	4 ans	28 j.
Etat de contrainte σsup. kg/cm²	+ 10	— 32	— 20	+ 0
σinf. kg/cm²	—173	—175	—138	—135
3. *Première fissure visible.*				
Moment fléchissant kg/m	4050	3040	1523	372
Contraints du béton σsup. kg/cm²	—265	—235	—220	—200
σinf. kg/cm²	+ 91	+ 59	+ 56	+ 65
Disparition de la fissure :				
Moment fléchissant kgm	2670	2110	1053	253
Contrainte dans le béton σsup. kg/cm²	—172	—172	—158	—137
σinf. kg/cm²	— 1	+ 1	— 4	+ 2
4. *Rupture.*				
Moment fléchissant kgm	< 5240	4520	3120	506
Etat des armatures	—	Rupture + glissement	Glissement	—