Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 70 (1944)

Heft: 21

Artikel: Etude théorique et expérimentale de la dispersion du jet dans la turbine Pelton

Autor: Oguey, Pierre / Mamin, Marcel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53264

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

70e année 14 octobre 1944 N° 21

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 13.50 francs
Etranger : 16 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 11 francs
Etranger : 13.50 francs
Prix du numéro :
75 centimes.
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : † M. Imer, à Genève ; secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; P. Joye, professeur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur ; E. Elskes, ingénieur ; Epitaux, architecte ; E. Jost, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte ; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur ; E. Martin, architecte ; E. Odier, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur ; A. Méan, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur ; A. de Kalbermatten, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts.
Tarif spécial pour fractions de pages.
En plus 20 % de majoration de guerre.
Rabais pour annonces répétées.
ANNONCES-SUISSES S. A.
5, Rue Centrale,
LAUSANNE
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte.

SOMMAIRE : *Etude théorique et expérimentale de la dispersion du jet dans la turbine Pelton*, par Pierre Oguey, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne, et Marcel Mamin, ingénieur E. I. L. — Les congrès : *Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. — Société suisse des ingénieurs et des architectes ; Communiqué du Comité central ; Communiqué du groupe professionnel des architectes pour les relations internationales.* — Nécrologie : *Emmanuel Dubochet.* — Bibliographie. — Carnet des concours. — Service de placement.

Etude théorique et expérimentale de la dispersion du jet dans la turbine Pelton

par PIERRE OGUEY
professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne
et MARCEL MAMIN
ingénieur E. I. L., assistant au Laboratoire de machines hydrauliques.

1. Introduction.

L'injecteur de la turbine Pelton est un organe indépendant, sur le comportement duquel la roue n'a pas d'influence directe. C'est pourquoi on admet généralement que le rendement global de la machine est égal au produit du rendement de l'injecteur (rapport de l'énergie cinétique du jet à l'énergie hydraulique à l'entrée de la turbine) par le rendement hydraulique de la roue et le rendement dit mécanique qui tient compte des pertes par ventilation, frottements dans les paliers et rejaillissements d'eau.

Il ne faut cependant pas oublier que le rendement même de la roue dépend dans une large mesure de la *structure du jet* ; son calcul basé sur les trajectoires [1] est illusoire si l'on ne connaît pas la répartition des vitesses et des masses liquides dans le jet en toute section de la zone d'intersection avec la roue. De plus, les phénomènes d'érosion par cavitation sont évidemment fonction des vitesses et pressions aux points de contact.

Une connaissance aussi parfaite que possible du jet présente donc un certain intérêt tant au point de vue du rendement à atteindre qu'à celui de la résistance de la turbine à l'usure.

Les éléments intervenant dans la qualité d'un jet sont *d'ordre constructif* : forme et dimensions de la tuyère et du pointeau, paliers et ailettes de guidage de la tige de commande, tuyaux et vannes précédant l'injecteur, nature des parois en contact avec l'eau, etc. ; d'autres sont *d'ordre physique* : énergie totale hydraulique disponible à l'entrée de la turbine, propriétés du liquide, viscosité, turbulence, teneur en air, tension superficielle, et propriétés du milieu ambiant, pression atmosphérique et résistance de l'air.

Un calcul théorique pur est impossible par suite du genre et du nombre des variables indépendantes entrant simultanément en jeu. Par ailleurs, les résultats empiriques actuellement connus donnant le rendement global d'un injecteur sont insuffisants et ne fournissent guère de renseignements sur la voie à suivre dans la recherche des perfectionnements.

L'étude systématique que nous avons entreprise depuis deux ans se propose les buts suivants :

a) Examiner, à la lumière des lois physiques et des expériences techniques, les phénomènes en jeu ; dissocier les divers facteurs physiques et constructifs pour en étudier séparément l'influence ; établir, si

[1] Voir en particulier *Le calcul du rendement de la turbine Pelton*, par *P. Oguey*. (Recueil de travaux publiés à l'occasion du IVe centenaire de l'Université de Lausanne, Editions F. Rouge & Cie S. A., Lausanne.)

faire se peut, les lois régissant l'écoulement dans le jet.

b) Là où le calcul est impuissant, ou inabordable par suite de la complexité des conditions aux limites, établir des lois permettant de déterminer avec une certitude suffisante les caractéristiques réelles du jet sortant d'un injecteur donné, sur la base de mesures effectuées sur un autre injecteur de dimensions différentes fonctionnant sous d'autres conditions de chute et de débit.

Cette étude, qui porte sur l'ensemble du problème, comprend aussi bien l'examen de l'écoulement dans les organes précédant l'injecteur que celui de la contraction à la sortie et de la structure du jet libre. Il s'agit donc d'une œuvre de longue haleine pleine d'intérêt, mais aussi d'imprévus. Nous nous proposons d'en publier au fur et à mesure les résultats qui nous paraîtront suffisamment acquis ; ceci dans l'idée qu'ils pourront être de quelque utilité aux constructeurs comme aux exploitants ; mais dans l'espoir aussi que les fabricants ou possesseurs de turbines qui auront l'occasion de faire des essais voudront bien nous communiquer le résultat de leurs expériences, qu'elles soient concordantes ou au contraire susceptibles de nous conduire à corriger notre point de vue.

Nous traiterons aujourd'hui de *la dispersion du jet* dans la zone de fonctionnement où *les facteurs physiques sont nettement prépondérants*, à l'exclusion presque totale des facteurs constructifs. En précisant toutefois que si, pour rendre possible une étude raisonnée, nous avons été amenés à sérier les questions, nous ne perdons jamais de vue l'interdépendance de ces facteurs ni l'ensemble du problème.

2. Observations préliminaires.

A partir de la section contractée du jet sortant d'un injecteur Pelton, on observe une modification d'aspect. Au lieu de rester cylindrique, ainsi que le voudraient les lois de l'hydrodynamique théorique, le jet change de structure. Dans une section S_x, une zone de diamètre d_i est entièrement liquide (fig. 1) et une zone comprise entre d_e et d_i contient un mélange d'air et d'eau.

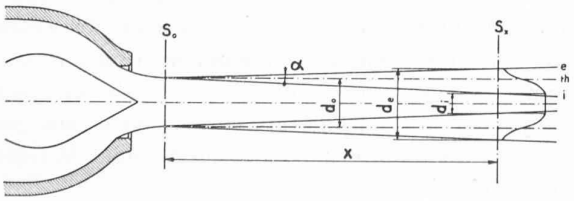

Fig. 1.

Il est évident que l'évasement du jet, soit l'angle apparent de la ligne extérieure limite (*e*) avec la ligne théorique (*th*) parallèle à l'axe donne une première idée de la qualité du jet, au point de vue de son homogénéité. Trois observations générales ont été faites :

1. Dans une installation donnée, lorsque la course diminue de la pleine ouverture à zéro, l'évasement du jet diminue, plus ou moins régulièrement, passe par un minimum et augmente ensuite.
2. Des turbines géométriquement semblables ne donnent pas des jets semblables, et l'évasement semble s'accentuer à mesure que la chute augmente.
3. Les perfectionnements apportés par les constructeurs aux organes précédant la tuyère de sortie ont permis des améliorations notables, mais, les lois régissant le phénomène de la dispersion étant inconnues, on ne sait pas exactement dans quel sens agir pour progresser encore, ni si des raisons déterminantes s'opposent à tout progrès.

Nous avons procédé en laboratoire à des essais systématiques de jets de divers diamètres sortant d'injecteurs divers, sous chute variable. Des méthodes techniques peu à peu améliorées nous ont permis une quantité d'observations propres à guider le calcul théorique [1] et des mesures suffisamment précises pour faire constater, sur documents tirés des essais, des particularités curieuses dont l'existence nous a été révélée par le calcul.

Le diamètre du jet était mesuré à l'aide de vis micrométriques portées par un collier se déplaçant parallèlement à l'axe de la tuyère. Il était contrôlé par photographie.

Le jet était ausculté, dans ses différentes sections, par un tube de Pitot spécial se déplaçant selon deux diamètres. Cet appareillage était naturellement complété par des instruments de mesure soigneusement étalonnés.

D'une manière générale, on constate : dans la région contractée S_0 et quel que soit l'injecteur s'il est de bonne construction, une pression dynamique axiale uniformément répartie à l'exception d'une zone périphérique de faible largeur et d'une partie centrale de petit diamètre où l'influence de l'injecteur se fait encore sentir ; dans une section éloignée de la tuyère, une zone centrale homogène de rayon r_i où le manomètre du tube de Pitot indique la même pression qu'en S_0 alors que dans la zone extérieure la pression baisse entre r_i et r_e, en même temps que le rayon extérieur augmente.

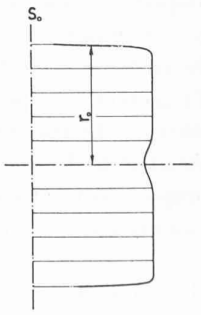

Fig. 2.

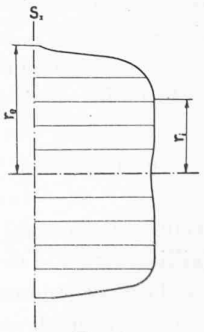

Fig. 3.

Nous précisons d'emblée que les courbes documentaires telles que celles reproduites, figures 2 et 3, don-

[1] Nous avons plaisir à citer ici le nom de M. *Casimir de Rham*, ingénieur E. I. L., assistant de notre Laboratoire en 1940-1941, dont l'ingéniosité et le sens pratique nous ont été précieux lors de la construction et de la mise au point de nos appareils.

nent, en fonction du rayon, *la pression dynamique axiale mesurée par le tube de Pitot, qu'il ne faut confondre en aucun cas, comme on l'a souvent fait, avec une mesure de l'énergie cinétique de l'eau au point considéré.*

Le fait d'une part que pour des injecteurs très différents on obtient, à une distance légèrement variable selon la construction, une répartition semblable à la figure 2, et d'autre part que la région centrale affectée par le pointeau intéresse un débit extrêmement faible, nous autorise à *admettre pour le calcul une vitesse constante uniformément répartie dans une section* S_0 *prise comme origine.*

Il va de soi que les résultats découlant de cette hypothèse ne pourront pas être étendus sans autre aux jets obtenus à très faible ouverture du pointeau et, d'une façon générale, aux jets fortement influencés par l'injecteur ou les organes qui le précèdent.

3. Le phénomène physique de la dispersion.

On sait que les phénomènes hydrauliques sont fonction de l'état de turbulence du liquide, caractérisé par le nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{Vd}{z}.$$

Dans le cas d'un *tuyau cylindrique*, V est la vitesse moyenne, quotient du débit par la section, d le diamètre intérieur et z le coefficient cinématique de viscosité. Lorsque R_e est supérieur à une valeur critique $R_c = 2000$ à 2400, l'écoulement cesse d'être laminaire pour devenir turbulent. En chaque point, la vitesse locale, variant rapidement en grandeur et direction, peut être considérée comme la somme d'un vecteur vitesse moyenne locale V_m et d'un vecteur vitesse de turbulence u. L'effet des parois est sensible dans une zone, dite couche limite, dont l'épaisseur augmente avec la distance à partir de l'entrée du tuyau jusqu'à le remplir entièrement s'il est assez long, ce qui veut dire que l'influence des parois se fait sentir jusqu'à l'axe.

La vitesse u (fig. 4 bis) se décompose en u_x et u_y. La composante radiale u_y doit logiquement diminuer, en fonction de y, et s'annuler au voisinage de la paroi. La turbulence totale, qui tend à libérer les particules liquides les unes des autres, diminue pour y voisin de r et l'influence de la viscosité, peu sensible dans l'axe, devient plus importante, d'où une rapide diminution de la vitesse moyenne près des parois (voir fig. 4).

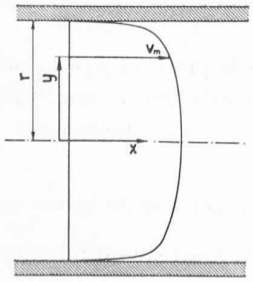

Fig. 4.

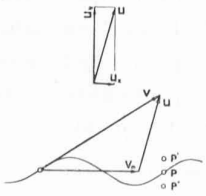

Fig. 4 bis.

Pour un observateur se déplaçant à la vitesse axiale de la particule, celle-ci semble osciller, dans le voisinage du point considéré, autour de deux positions extrêmes P' et P'' de part et d'autre de P, sauf si elle s'échappe pour passer à la couche voisine.

Faisons abstraction de cette évasion accidentelle et examinons le phénomène oscillatoire autour de la position moyenne. Dans le tuyau, le déplacement P' P'' diminue vers la périphérie et s'annule pour $y = r$. Dans un *jet cylindrique* de turbine Pelton, l'égalisation des vitesses est très rapide et l'on peut admettre qu'en une section S_0 prise comme origine (fig. 2) la turbulence est uniformément répartie, soit, statistiquement parlant, qu'en chaque point on mesurerait les mêmes variations de vitesse.

A l'intérieur d'un jet, l'énergie cinétique radiale d'une particule de poids unité passe de $\frac{u_y^2}{2g}$ en P à zéro en P' et en P''. Que cette annulation d'énergie cinétique soit due à l'attraction moléculaire des particules de la même couche, qui tendrait à ramener la particule considérée dans le droit chemin, ou aux couches voisines s'opposant au déplacement, elle implique l'existence d'une force antagoniste. L'effort radial, dans un sens ou dans l'autre, peut être ramené à une pression par unité de surface. Nous pouvons par conséquent dire qu'en un point, une couche liquide exerce sur la couche extérieure une pression locale p_2 variable dans le temps et que nous appellerons *pression instantanée de turbulence.*

A la *surface du jet*, une particule liquide est soumise à une pression centrifuge p_2 provenant de l'intérieur, tandis que les seules forces tendant à la retenir, que nous appellerons extérieures, sont la pression de l'air ambiant p_0 et l'attraction moléculaire, laquelle se traduit par une tension superficielle T_s.

Si les forces « extérieures » sont prépondérantes, le jet restera cylindrique et homogène, c'est-à-dire sans dispersion. Il se transformera en gouttes tendant vers la forme sphérique, à une relativement grande distance de la tuyère, du fait qu'un cylindre soumis à une tension superficielle est une forme instable.

Si les forces « intérieures » sont prépondérantes, des particules liquides s'échapperont, et le diamètre moyen de la zone restée homogène diminuera à mesure qu'on s'éloignera de la tuyère.

4. Direction de fuite des particules quittant le jet et diminution du diamètre de la zone homogène.

Soit, dans une section quelconque d'abscisse x mesurée à partir de la section origine S_0, un point A de la surface de la zone restée homogène (fig. 5).

La composante u_x du vecteur turbulence a vraisemblablement peu d'influence sur la dispersion et peut être négligée par rapport à la vitesse axiale V_1. Une particule

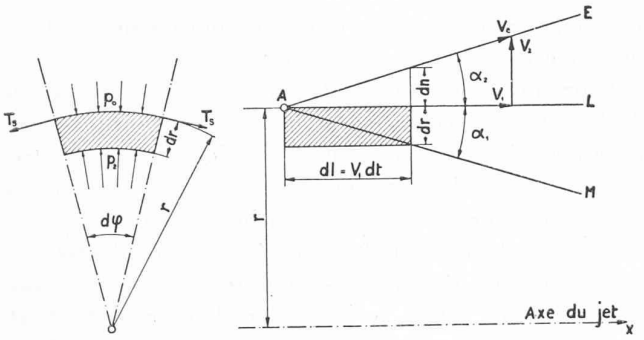

Fig. 5.

liquide s'échappant du jet en A aura donc une vitesse V_e, résultante de la vitesse V_1, dirigée selon la limite du jet théorique AL et d'une vitesse radiale V_2, due à la turbulence.

Considérons, se déplaçant à la vitesse V_1, une tranche de jet de longueur $dl = V_1\,dt$ et de volume

$$dl\,r\,d\varphi\,\frac{r}{2}\cdot$$

Pendant le temps dt, le volume d'eau sorti à travers sa surface extérieure

$$dl\,r\,d\varphi\,V_2\,dt$$

est égal à la diminution du volume de la tranche

$$-\,r\,d\varphi\,dr\,dl$$

d'où

$$dr = -\,V_2\,dt$$

Pendant le même temps dt, la particule libérée en A a parcouru une distance $dn = V_2\,dt$, d'où $dn = -\,dr$,

$$-\frac{dr}{dl} = \frac{dn}{dl} \qquad \text{et} \qquad -\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{V_2}{V_1} \qquad (1)$$

Au point A, *la trajectoire AE de la particule libérée et la tangente AM à la ligne limite de la zone homogène sont symétriques par rapport à la ligne extérieure du jet théorique AL.*

5. Conditions limites de dispersion. Jets homogènes.

Considérons les forces agissant sur un élément liquide de masse spécifique ρ et de masse (dr étant négatif)

$$dm = -\,\rho\,r\,d\varphi\,dr\,dl$$

qui s'échapperait d'un jet cylindrique et homogène de rayon r. Sa vitesse radiale passe de zéro à V_2 et sa quantité de mouvement varie d'une valeur $(V_2 - 0)\,dm = -\,\rho\,r\,d\varphi\,dr\,dl\,V_2$ égale à la somme des percussions des forces agissant sur l'élément, qui sont la poussée due à la pression locale de turbulence

$$(p_2 - p_0)\,r\,d\varphi\,dl$$

et la force due à la tension superficielle T_s par unité de longueur

$$-\,2T_s\,dl\sin\frac{d\varphi}{2} = -\,T_s\,dl\,d\varphi$$

d'où

$$-\,\rho\,r\,dr\,V_2 = [(p_2 - p_0)\,r - T_s]\,dt$$

$$\frac{p_2 - p_0}{\rho} - \frac{T_s}{r\rho} = -\,V_2\frac{dr}{dt} = V_2^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{\rho} - \frac{T_s}{\rho r}} \qquad (2)$$

et

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{p_2 - p_0}{\rho V_1^2} - \frac{T_s}{\rho r V_1^2}}\,.$$

Le second terme de cette expression est bien déterminé. Il n'en est pas de même du premier, où nous avons fait intervenir la turbulence sous la forme d'une pression locale instantanée p_2.

Il est nécessaire, pour pouvoir mettre le problème en équations, de faire un certain nombre d'*hypothèses*, les unes relatives aux facteurs susceptibles d'intervenir de manière appréciable ou au contraire présumés négligeables, les autres destinées à introduire sous forme mathématiquement utilisable des phénomènes dont l'expression n'est pas encore suffisamment connue.

L'observation attentive des jets, l'analyse des essais nous ont, bien entendu, guidés dans notre choix, que l'énoncé à cette place pourrait faire paraître arbitraire ou gratuit, mais qui est en réalité l'aboutissement de nombreux calculs comparatifs.

Ces *hypothèses de base*, qui permettront de formuler des lois théoriques dont nous demanderons à l'expérience de justifier le bien-fondé, sont les suivantes :

Nous admettons que

1° la résistance de l'air est négligeable, en tout cas sur le tronçon qui va de l'injecteur à la dernière section du jet où travaille la roue ;

2° la vitesse axiale V_1 de toutes les particules liquides est constante, et égale à la vitesse V_0 dans la section contractée ;

3° le phénomène est fonction de la masse spécifique ρ et de la viscosité η du liquide, de la vitesse V_1 et du diamètre $d_0 = 2r_0$ de la section contractée du jet.

4° Considérant que la pression instantanée de turbulence varie selon des lois inconnues où devraient intervenir la statistique et le calcul des probabilités, nous admettons que, pendant des intervalles de temps égaux T suffisamment longs, les temps pendant lesquels la pression p_2 a une valeur déterminée sont égaux ; autrement dit, la courbe des valeurs de la pression p_2 classées en fonction de leur durée sera identique pour tous les intervalles de temps T considérés.

5° Enfin, nous admettons que la pression p_2 est portée par le jet, c'est-à-dire qu'elle garde une valeur particulière constante pour un observateur se déplaçant à la vitesse V_1.

Dans ces hypothèses, on peut poser que le terme sans dimension $\dfrac{p_2 - p_0}{\rho V_1^2}$ dépend du produit d'une fonction

$$f(\rho\eta V_1 d_0)$$

qui fixe son amplitude, par une fonction de l'abscisse x et du temps t, que pour raison d'homogénéité nous écrivons

$$g\left(\frac{t-\frac{x}{V_1}}{T}\right)$$

laquelle caractérise la variation de p_2, soit

$$\frac{p_2-p_0}{\rho V_1^2}=f(\rho\eta V_1 d_0)\cdot g\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{V_1 T}\right).$$

Si l'on fait $x = V_1 t$, la fonction g devient constante, ce qui signifie bien qu'un observateur se déplaçant à la vitesse du jet mesurerait une pression de turbulence constante dans le temps, égale à celle qui régnait au temps 0 pris comme origine dans la section origine S_0.

En développant en série la fonction f suivant les puissances des variables

$$f(\rho\eta V_1 d_0)=\sum n\rho^x\eta^y V_1^z d_0^t$$

le terme général du développement doit être sans dimension

$$[ML^{-3}]^x[ML^{-1}T^{-1}]^y[LT^{-1}]^z[L]^t=[0]$$

d'où résulte la seule possibilité : $y = -x$; $z = x$; $t = x$ et le terme général est

$$n\left(\frac{V_1 d_0 \rho}{\eta}\right)^x=n\left(\frac{V_1 d_0}{z}\right)^x=n(R_e)^x=f(R_e)$$

où n est un nombre sans dimension, z le coefficient cinématique de viscosité et R_e le nombre de Reynolds du jet.

Par suite

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{V_1 T}\right)-\frac{2T_s}{\rho d_0 V_1^2}}. \qquad (3)$$

En dessous du nombre critique R_c l'écoulement est laminaire, la pression de turbulence nulle ; on peut donc écrire

$$f(R_e)=a_1(R_e-R_c)+a_2(R_e-R_c)^2+\ldots \qquad (4)$$

Admettons, quitte à revoir cette hypothèse, que les termes d'exposant autres que un n'interviennent pas, et posons

$a_1 g = A$ où A est donc une fonction de $\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{V_1 T}\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\sqrt{(R_e-R_c)\cdot A\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{V_1 T}\right)-\frac{2T_s}{\rho d_0 V_1^2}}.$$

Pour qu'il n'y ait pas de dispersion, il faut que l'expression sous le radical soit nulle ou négative, c'est-à-dire que

$$(R_e-R_c)\cdot A\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{V_1 T}\right)\leqq\frac{2T_s}{\rho d_0 V_1^2}.$$

En désignant par A_{max} la valeur maximum que peut prendre la fonction A dans chacun des intervalles de temps T, cette condition devient

$$(R_e-R_c)\cdot A_{max}\leqq\frac{2T_s}{\rho d_0 V_1^2}.$$

Pour un jet et une vitesse donnés, la dispersion sera nulle si

$$A_{max}\leqq\frac{2T_s}{(R_e-R_c)\,\rho d_0 V_1^2}. \qquad (5)$$

Observons immédiatement que, dans le voisinage de la limite, l'évasement du jet est trop faible pour être mesuré avec exactitude soit par moyen mécanique, soit par photographie, même stroboscopique.

La photographie donne cependant une indication précieuse. En effet, le phénomène de turbulence dans un courant n'est apparent que pour autant qu'il trouble la surface de la veine. On admettra donc comme *limite absolue* de dispersion le point correspondant à une valeur limite maximum A_{max}, où le jet cesse d'avoir l'aspect d'une barre de cristal pour devenir translucide. La dispersion ne devient toutefois *effective* que lorsque des particules en nombre appréciable s'échappent du jet homogène, phénomène qui correspond à une valeur de A'_{max} beaucoup moins aisée à déterminer.

Introduisons, pour un jet d'eau, à 20° cent. dans de l'air, les valeurs suivantes, *dans le système c. g. s. :*

$T_s = 76$ dynes/cm $z = \eta : g = 0{,}01$ cm²/sec
$\rho = 1{,}0$ gramme masse/cm³
$\eta = 0{,}01$ gramme masse/cm. sec.

Il vient

$$R_e=\frac{V_1 d_o}{z}=100\,V_1 d_o$$

$$\frac{2T_s}{\rho d_0 V_1^2}=\frac{152}{d_0 V_1^2}.$$

La valeur du nombre de Reynolds critique R_c avec laquelle il faudrait compter devrait être déterminée par des essais fixant le passage du régime laminaire au régime turbulent dans un jet sortant d'un injecteur *d'un type donné.* Toutefois, nous ne cherchons pas ici à établir des valeurs numériques définitives, d'une part, et, d'autre part, on est très loin de l'écoulement critique, et nous admettrons $R_c = 2400$ comme si le jet sortait d'un tuyau cylindrique de diamètre d_0.

On obtient, en remplaçant dans l'inéquation (5), comme condition de non-dispersion

$$A_{max}\leqq\frac{152}{100\,(V_1 d_0-24)\,d_0 V_1^2}.$$

Calculons la valeur du second membre pour les jets dont l'aspect est donné par les photos, figures 6 à 11, à des distances de la sortie égales à environ 40, respectivement 80 fois le diamètre d_0 à la section contractée (la règle graduée indiquant la distance à partir de l'extrémité de l'injecteur).

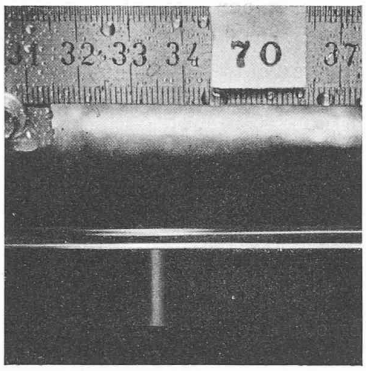

Fig. 6.

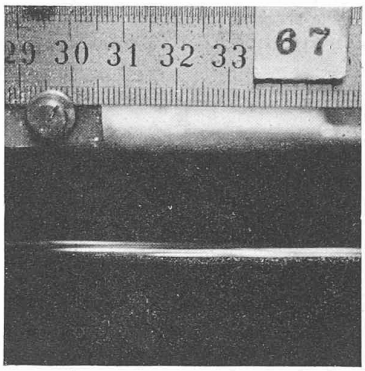

Fig. 7.

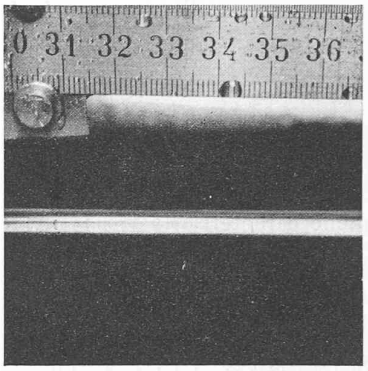

Fig. 8.

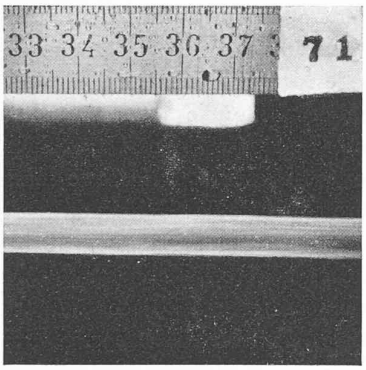

Fig. 9.

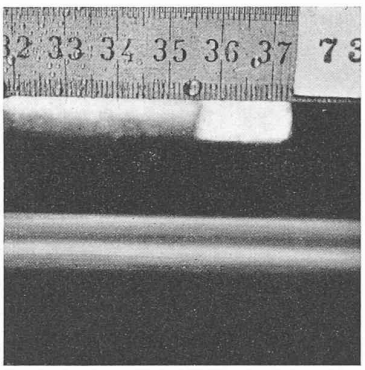

Fig 10.

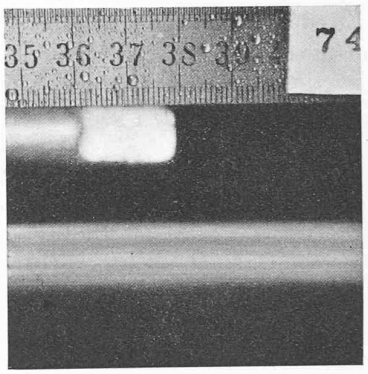

Fig. 11.

Fig.	Essai n°	Chute en m	V_1 cm/sec.	d_0 en cm	$\frac{1,52}{(V_1 d_0 - 24) d_0 V_1^2}$	Observation
6	70	30	2425	0,45	$53,6 . 10^{-11}$	Jet transparent.
7	67	52	3190	0,45	$23,5 . 10^{-11}$	Jet translucide, pas de dispersion appréciable.
8	68	110	4650	0,45	$7,6 . 10^{-11}$	Jet avec dispersion.
9	71	20	1980	0,85	$27,4 . 10^{-11}$	Jet translucide, pas de dispersion appréciable.
10	73	56	3310	0,85	$5,8 . 10^{-11}$	Jet avec dispersion.
11	74	118	4810	0,85	$1,9 . 10^{-11}$	Jet avec forte dispersion.

D'après ces essais, cités à titre d'exemple, et uniquement qualitatifs (d'autres sont en cours), il semble donc que la limite de *dispersion impossible* correspondrait à

$$53,6 \cdot 10^{-11} > A_{max} > 27,4 \cdot 10^{-11}$$

et que la limite de *dispersion effective* correspondrait à

$$23,5 \cdot 10^{-11} > A'_{max} > 7,6 \cdot 10^{-11}$$

6. Jet avec dispersion. Equation des lignes limites absolues de la zone homogène et de la zone dispersée.

Le jet en coupe se présente conformément à la figure 1. Le problème étant de révolution, nous le résoudrons dans un plan méridien en cherchant l'équation

$$y_* = f(x_*)$$

de la ligne de séparation des zones homogène et dispersée (fig. 12).

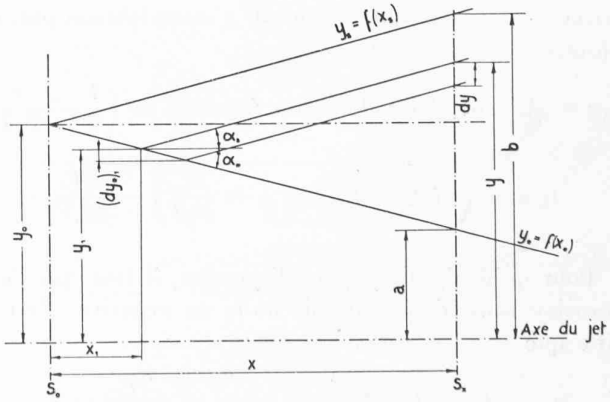

Fig. 12.

Nous avons vu que

$$-\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{V_2}{V_1}$$

et trouvé

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right) - \frac{2T_s}{\rho\, d_j V_1^2}}.$$

Dans une section quelconque *où la dispersion est manifeste*, la surface de la zone homogène est loin d'être cylindrique ; elle est très irrégulière, et indéterminée. Nous admettrons donc que la tension superficielle n'intervient plus et que *le phénomène dépend de la seule turbulence.*

Le terme contenant T_s étant supprimé

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right)}.$$

L'équation différentielle donnant la pente de la ligne de séparation à l'abscisse x_* et à l'instant t sera donc

$$\frac{dy_*}{dx_*} = -\sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right)}. \qquad (6)$$

En posant $x = V_1 t$, la fonction g devient une constante, ainsi que les tg α. Pour un observateur se déplaçant dans l'axe du jet à la vitesse V_1, *la ligne de séparation est une droite* de coefficient angulaire différent selon les conditions initiales (abscisse et temps) du déplacement de l'observateur. A la valeur maximum atteinte par la fonction g dans une section d'abscisse x pendant l'intervalle de temps T précédemment défini correspondent un angle α_{*max} tel que

$$\operatorname{tg}\alpha_{*max} = -\sqrt{f(R_e)\cdot g_{max}} \qquad (7)$$

et une droite, issue du point $x_* = 0$, $y_* = y_0$ et d'équation

$$y_{*min} = y_0 - x_*\sqrt{f(R_e)\cdot g_{max}} \qquad (8)$$

C'est l'équation de la *ligne limite minimum du jet homogène*, puisqu'en aucun point (x, y) compris entre la droite (8) et l'axe du jet ne peut passer une droite de séparation d'équation (6).

La *ligne limite maximum extérieure du jet dispersé*, c'est-à-dire au delà de laquelle il n'y a plus d'eau, est la trajectoire d'une particule s'échappant au point $x = 0$, $y = y_0$, soit une droite $y_s = f(x_s)$, symétrique de la droite limite (8), d'équation

$$y_s = y_0 + x_s\sqrt{f(R_e)\cdot g_{max}} \qquad (9)$$

et de pente

$$\operatorname{tg}\alpha_{s_{max}} = +\sqrt{f(R_e)\cdot g_{max}}.$$

7. Distribution instantanée du poids spécifique dans une section quelconque du jet avec dispersion.

Rappelons l'hypothèse faite, que la résistance de l'air est négligeable. Il en résulte que la variation de la pression dynamique mesurée au tube de Pitot est due à une variation du poids spécifique γ du mélange d'eau et d'air au point considéré.

La forme de la fonction g donnée au paragraphe 5 étant admise, considérons un point (x, y) dans une section S_x à un instant t (fig. 12).

La particule d'eau arrivant au temps t en ce point a quitté la zone homogène à l'abscisse $x_1 < x$ et au temps

$$t_1 = t - \frac{x - x_1}{V_1},$$

sa direction de fuite au point de coordonnées $x_* = x_1$ et $y_* = y_1$ faisant avec l'axe du jet l'angle α_s tel que

$$\operatorname{tg}\alpha_s = \sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{V_1 T}\right)}.$$

Mais

$$g\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{V_1 T}\right) = g\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x_1}{V_1 T} - \frac{x_1}{V_1 T}\right) =$$
$$= g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right) = \text{constante}$$

pour $x = C^{te}$ et $t = C^{te}$ c'est-à-dire indépendante de x_1 et y_1. Par suite, pour tout point de la section S_x, on a $\operatorname{tg}\alpha_s = C^{te}$.

A un instant donné t, tout se passe en S_x comme si les particules d'eau s'étaient échappées d'un jet homogène limité par la droite issue du point $(0, y_0)$ et de tangente

$$\operatorname{tg}\alpha_* = -\sqrt{f(R_e)\cdot g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right)}. \qquad (10)$$

Soit $\gamma_0 dQ = \gamma_0 2\pi y_* (-dy_*) V_1$ le débit en poids dans l'élément annulaire de largeur $-dy_*$ de la zone homogène du jet, où $V_1 = C^{te}$. Il se conserve et arrive à la section d'abscisse x, avec un poids spécifique γ' du mélange d'eau et d'air, sur l'élément annulaire de largeur $-dy$.

$$\gamma_0 2\pi y_* dy_* V_1 = \gamma' 2\pi y dy V'$$

V' étant la vitesse normale à la section en y et, toujours dans l'hypothèse de la résistance de l'air négligeable, on peut poser $V' = V_1$ d'où

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \frac{y_*}{y}\frac{dy_*}{dy}.$$

On voit immédiatement d'après la figure que

$$\frac{dy_*}{dy} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_* = \frac{y + a}{2}$$

en appelant a la valeur particulière de y_* dans la section d'abcisse x, d'où

$$\gamma' = \frac{\gamma_0}{2}\cdot\frac{y + a}{2y} = \frac{\gamma_0}{4}\left(1 + \frac{a}{y}\right) \qquad (12)$$

Equation valable dans la zone dispersée, soit pour $y > a$. Le poids spécifique prend donc la valeur $\gamma' = \frac{\gamma_0}{2}$ pour $y = a$ et diminue selon une courbe d'asymptote $\gamma' = \frac{\gamma_0}{4}$. Dans la zone homogène, $y < a$, il est cons-

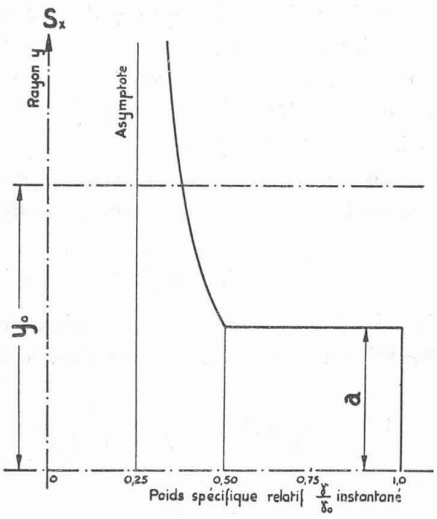

Fig. 13.

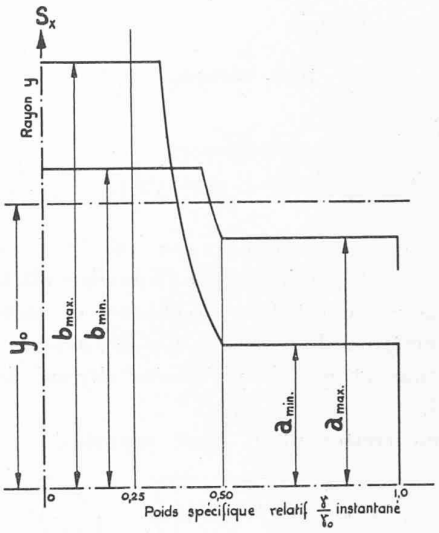

Fig. 14.

tant et égal à γ_0. Cette courbe représente, *dans les hypothèses faites*, la *valeur instantanée* du poids spécifique $\gamma' = f(y)$ dans la section S_x (voir fig. 13).

Elle représenterait également la *valeur permanente* de $\gamma = f(y)$ mesurable au tube de Pitot *si la pression de turbulence*, au lieu d'être variable dans le temps, *avait la valeur constante* p_2 qui donnerait à la ligne limite du jet homogène une pente telle que son ordonnée serait a dans la section S_x[1].

8. Distribution du poids spécifique moyen dans une section quelconque S_x.

La courbe $\gamma' = f(y)$ de la figure 13, donnant en particulier le rayon $a = y_0 + x \operatorname{tg} \alpha_*$, correspond à une valeur instantanée p_2 et un angle α_* tel que

$$\operatorname{tg} \alpha_* = -\sqrt{f(R_e) \cdot g\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T}\right)}.$$

Comme la pression p_2 varie en fonction du temps dans la section origine S_0, le rayon a dans la section S_x est également fonction du temps.

Imaginons donc de classer les valeurs de a pendant l'intervalle de temps T défini au paragraphe 5 ; désignons par t le temps (qui est ici une *durée*, fraction de l'intervalle T) pendant lequel le rayon du jet homogène est inférieur ou au plus égal à une valeur a. Aux temps (durées) $t = 0$ et $t = T$ correspondront deux valeurs extrêmes a_{min} et a_{max}.

Prenons maintenant a comme paramètre et posons

$$t = \text{fonct.}(a)$$
$$dt = F(a) \cdot da$$
$$T = \int_0^T dt = \int_{a_{min}}^{a_{max}} F(a) \cdot da$$

où $F(a)$ est une fonction à déterminer expérimentalement.

[1] C'est d'ailleurs ainsi que nous l'avons déterminée pour la première fois, avant de faire intervenir la variation de p_2.

Pendant l'intervalle T considéré, il passe à travers une section annulaire de rayon y et de largeur dy un poids de liquide (le poids spécifique de l'air étant 1000 fois plus petit que celui de l'eau, le poids de l'air entraîné est négligeable) :

$$2\pi y\, dy\, V_1 T \gamma = \int_0^T 2\pi y\, dy\, \gamma_{ya} V_1\, dt$$

où γ_{ya} est le poids spécifique instantané pour une valeur arbitraire du paramètre a, et γ *le poids spécifique moyen, à distance* y *de l'axe du jet.*

$$\gamma = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma_{ya}\, dt\ ; \qquad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{\gamma_{ya}}{\gamma_0} F(a)\, da}{\int_{a_{min}}^{a_{max}} F(a)\, da} \qquad (15)$$

Pendant l'intervalle T, le paramètre a varie entre deux limites a_{min} et a_{max} auxquelles correspondent (voir fig. 14) deux rayons extrêmes de la zone dispersée b_{max} et b_{min} D'après la figure 12, d'une manière générale $b + a = 2y_0$ d'où $b_{max} = 2y_0 - a_{min}$ et $b_{min} = 2y_0 - a_{max}$.

Pour la discussion et la détermination de $F(a)$, remplaçons *provisoirement* l'hyperbole (12) par une droite $\gamma = \frac{\gamma_0}{2}$ représentée sur la figure 15, considérons des valeurs fixes du rayon y en différentes régions de la section S_x, et cherchons la valeur du poids spécifique relatif $\frac{\gamma_{ya}}{\gamma_0}$ (c'est-à-dire rapporté au poids spécifique de l'eau γ_0 dans le jet homogène) pour différentes valeurs du paramètre a.

Choisissons tout d'abord un *rayon* y *inférieur à* y_0.

Prenons $y < a_{min}$. Quel que soit a, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_y = 1$

Prenons y *entre* a_{min} *et* a_{max}.

Si a est compris entre y et a_{max}, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{ya} = 1$

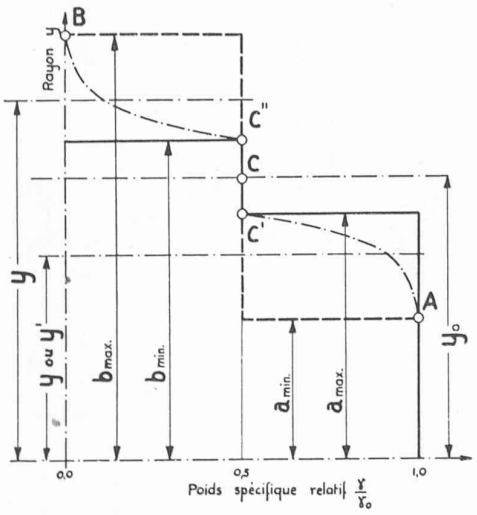

Fig. 15.

Si a est compris entre y et a_{min}, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{ya} = \frac{1}{2}$

Dans cette région du jet, le poids spécifique relatif variera selon une loi inconnue, mais entre les valeurs 1 et $\frac{1}{2}$.

Prenons y *entre* a_{max} *et* y_0.

Quelque soit a, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_y = \frac{1}{2}$

Choisissons maintenant un *rayon* y *supérieur à* y_0.

A ce rayon correspond un rayon y' tel que

$$y' = 2y_0 - y$$

de même qu'à une valeur de a correspond une valeur du rayon extérieur b telle que

$$b = 2y_0 - a$$

Prenons y *compris entre* y_0 *et* b_{min}.

Quel que soit a, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_y = \frac{1}{2}$

Prenons y *entre* b_{min} *et* b_{max}.

Si b est compris entre y et b_{max}, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{ya} = \frac{1}{2}$

Si b est compris entre y et b_{min}, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{ya} = 0.$

Dans cette région du jet, le poids spécifique relatif variera selon une loi inconnue, mais entre les valeurs $\frac{1}{2}$ et 0.

Prenons enfin $y > b_{max}$.

Quel que soit a, $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_y = 0.$

Le poids spécifique relatif en fonction du rayon serait donc représenté par une courbe encore inconnue, par exemple celle tracée en trait mixte sur la figure 15, mais passant certainement par les points

A où $y = a_{min}$, et
B où $y = b_{max}$

et comportant un segment rectiligne entre les points C' et C'' symétriques par rapport au point C, de coordonnées $\frac{\gamma}{\gamma_0} = 0{,}5$ et $y = y_0$

Or aucun essai, à notre connaissance, ne révèle l'existence d'une région où le poids spécifique resterait constant, entre deux régions où il serait variable. Il est donc raisonnable d'admettre que les points C' et C'' sont confondus en C. On aurait alors $a_{max} = b_{min} = y_0$ et, pour $y = y_0$,

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right) = \frac{1}{2}.$$

Or ce premier résultat, assez curieux, se vérifie de façon satisfaisante pour tous nos essais, et les courbes relevées au tube de Pitot donnent, à l'extrémité d'un diamètre égal au diamètre primitif, une mesure au manomètre sensiblement égale à la moitié de la mesure dans la section contractée.

De plus, une courbe passant par les points A, C et B définis par la figure 15 doit nécessairement présenter au moins un point d'inflexion entre A et B, symétriques par rapport au point C. Ce second résultat, également inattendu, est vérifié par toutes celles de nos courbes d'essai qui sont suffisamment nettes.

Introduisons les valeurs de $\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_{ya}$, obtenues par cette discussion, dans l'équation (15).

A l'extrémité d'un rayon y compris entre a_{min} et $y_0 = a_{max}$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\int_{a_{min}}^{y} \frac{1}{2} F(a)\,da + \int_{y}^{y_0} 1 \cdot F(a)\,da}{\int_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da} \qquad (16)$$

Par dérivation, en se souvenant que a_{min} et y_0 sont des constantes pour la section S_x.

$$\frac{d\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)}{dy} = \frac{\frac{1}{2} F(y) - F(y)}{\int_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da} = -\frac{F(y)}{2\int_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da} \qquad (16')$$

où $F(y)$ est donc obtenue en remplaçant a par y dans $F(a)$.

De même, à l'extrémité d'un *rayon* y *compris entre* y_0 *et* b_{max}, auquel correspond un rayon y' compris entre y_0 et a_{min} tel que

$$y' = 2y_0 - y$$

on aurait

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\int_{a_{min}}^{y'} \frac{1}{2} F(a)\,da + \int_{y'}^{y_0} 0 \cdot F(a)\,da}{\int_{a_{min}}^{y_0} F(a)da} \qquad (17)$$

et

$$\frac{d\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right)}{dy} = -\frac{F(y')}{2\int\limits_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da} \qquad (17')$$

Comme le dénominateur des seconds membres de (16′) et (17′) est constant, égal à $2\,T$, ces équations lient la tangente à la courbe $\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right) = f(y)$ à la fonction $F(y)$.

En considérant pour quelques essais la courbe expérimentale

$$\frac{d\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right)}{dy} \quad \text{en fonction de } y$$

entre les points A et C, nous avons essayé d'en donner la forme analytique et trouvé que l'équation qui semblait le mieux convenir était

$$F(y) = F_0 \frac{1}{1+u^2} \qquad (18)$$

où

$$u = k\,\frac{1-\frac{y}{y_0}}{1-\frac{a_{min}}{y_0}} \qquad (19)$$

Montrons la signification du facteur k.

Pour $y = y_0$, on a $u = 0$, $F(y_0) = F_0$ valeur indépendante de a_{min}, et

$$\frac{d\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right)}{dy} = -F_0\,\frac{1}{2\int\limits_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da}$$

En remplaçant y par a dans l'équation (19), on obtient

$$(18\text{bis}) \quad F(a) = F_0\,\frac{1}{1+u^2} \quad \text{où} \quad u = k\,\frac{1-\frac{a}{y_0}}{1-\frac{a_{min}}{y_0}} \quad (19\text{ bis})$$

d'où $$\int\limits_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da = F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\cdot \operatorname{arc\,tg} k$$

et $$\left(\frac{d\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right)}{dy}\right)_{y_0} = -\frac{1}{2y_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k}}.$$

Exprimons également le rayon en valeur relative, en le rapportant au rayon y_0 du jet non dispersé (fig. 16).

La tangente au point C détermine sur la droite $\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = 1$ un segment

$$\overline{MM_0} = -\frac{1}{2\left[\frac{d\left(\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}\right)}{d\left(\frac{y}{y_0}\right)}\right]} = \left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k}$$

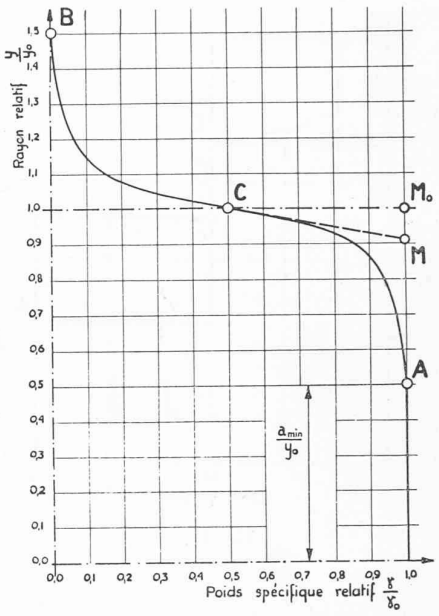

Fig. 16.

d'où $$\frac{\overline{MM_0}}{1-\frac{a_{min}}{y_0}} = \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k}.$$

Ce facteur k caractérise à lui seul le rapport des deux segments

$$\frac{\overline{MM_0}}{\overline{AM_0}} \quad \text{de la figure 10}$$

et, d'après nos essais, $k \cong 8$.

Reprenons maintenant le calcul de $\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0}$.

Par dérivation de l'équation (19 bis)

$$da = -\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\,du$$

D'une façon générale, entre deux limites (1) et (2)

$$\int\limits_1^2 F(a)\,da = -F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\int\limits_1^2 \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\,[\operatorname{arc\,tg} u_1 - \operatorname{arc\,tg} u_2].$$

Par suite, les trois intégrales à introduire dans (16) et (17) sont :

$$\int\limits_{a_{min}}^{y} \frac{1}{2}F(a)\,da = \frac{1}{2}F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\left[\operatorname{arc\,tg} k - \operatorname{arc\,tg} k\,\frac{1-\frac{y}{y_0}}{1-\frac{a_{min}}{y_0}}\right]$$

$$\int\limits_{y}^{y_0} F(a)\,da = F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\left[\operatorname{arc\,tg} k\,\frac{1-\frac{y}{y_0}}{1-\frac{a_{min}}{y_0}}\right]$$

$$\int\limits_{a_{min}}^{y_0} F(a)\,da = F_0\left(1-\frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\,[\operatorname{arc\,tg} k]$$

d'où en définitive, si : $y_0 > y > a_{min}$,

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\operatorname{arc\,tg} k \dfrac{1 - \dfrac{y}{y_0}}{1 - \dfrac{a_{min}}{y_0}}}{\operatorname{arc\,tg} k}\right] \tag{20}$$

et si $b_{max} > y > y_0$,

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\operatorname{arc\,tg} k \dfrac{1 - \dfrac{y'}{y_0}}{1 - \dfrac{a_{min}}{y_0}}}{\operatorname{arc\,tg} k}\right] \tag{21}$$

avec $\dfrac{y'}{y_0} = 2 - \dfrac{y}{y_0}$.

En prenant par exemple la valeur $\dfrac{a_{min}}{y_0} = 0{,}5$, introduite dans ces expressions, on obtiendrait la courbe de la figure 16.

La courbe correspondant à une valeur quelconque de a_{min} s'obtiendrait en multipliant les hauteurs $1 - \dfrac{y}{y_0}$ par $\left(\dfrac{1 - \dfrac{a_{min}}{y_0}}{1 - 0{,}5}\right)$.

Revenons maintenant à un calcul plus exact *en partant des courbes figures 13 et 14*, c'est-à-dire d'un poids spécifique, dans la zone dispersée, distribué selon la loi hyperbolique 12, mais en conservant la fonction donnée par les équations 18 bis et 19 bis.

$$a = y_0\left[1 - \frac{1}{k}\left(1 - \frac{a_{min}}{y_0}\right)u\right]; \quad da = -\left(1 - \frac{a_{min}}{y_0}\right)\frac{y_0}{k}\,du\,;$$

$$du = -k \cdot \frac{1}{y_0\left(1 - \dfrac{a_{min}}{y_0}\right)}\,da\,.$$

Pour $y_0 > y > a_{min}$

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{\displaystyle\int_{a_{min}}^{y}\frac{1}{4}F\,a(da) + \int_{a_{min}}^{y}\frac{a}{4y}F(a)da + \int_{y}^{y_0}F(a)da}{\displaystyle\int_{a_{min}}^{y_0}F(a)\,da} \tag{22}$$

Pour $b_{max} > y > y_0$, soit $y_0 > y' > a_{min}$ avec $y' = 2y_0 - y$,

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{\displaystyle\int_{a_{min}}^{y'}\frac{1}{4}F(a)\,da + \int_{a_{min}}^{y'}\frac{a}{4y}F(a)\,da}{\displaystyle\int_{a_{min}}^{y_0}F(a)\,da} \tag{23}$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\frac{y}{y_0} = \beta\,; \qquad \frac{a_{min}}{y_0} = \beta_1.$$

La première intégrale devient :

$$\int_{a_{min}}^{y}\frac{1}{4}F(a)\,da = \frac{F_0 y_0(1-\beta_1)}{4k}\left[\operatorname{arc\,tg} k - \operatorname{arc\,tg} k\,\frac{1-\beta}{1-\beta_1}\right].$$

La seconde devient :

$$\frac{1}{4y}\int F(a)a\,da = -\frac{1}{4y}\int F_0\,\frac{y_0\left(1 - \dfrac{1-\beta_1}{k}u\right)}{1+u^2}\cdot\frac{y_0}{k}(1-\beta_1)du$$

$$= -\frac{F_0 y_0^2(1-\beta_1)}{4ky}\left[\int\frac{du}{1+u^2} - \frac{1-\beta_1}{k}\int\frac{u\,du}{1+u^2}\right]$$

$$= -\frac{F_0 y_0^2(1-\beta_1)}{4ky}\left[\operatorname{arc\,tg} u - \frac{1-\beta_1}{2k}\ln(1+u^2)\right]$$

soit, en introduisant les limites :

$$\frac{1}{4y}\int_{a_{min}}^{y}F(a)\,a\,da = -\frac{F_0 y_0^2(1-\beta_1)}{4ky}\left[\operatorname{arc\,tg} k\,\frac{1-\beta}{1-\beta_1} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} k - \frac{1-\beta_1}{2k}\ln\frac{1 + k^2\left(\dfrac{1-\beta}{1-\beta_1}\right)^2}{1+k^2}\right].$$

La troisième devient :

$$\int_{y}^{y_0}F(a)\,da = \frac{F_0 y_0(1-\beta_1)}{k}\cdot\operatorname{arc\,tg} k\,\frac{1-\beta}{1-\beta_1}\,.$$

L'intégrale du dénominateur est

$$\int_{a_{min}}^{y_0}F(a)\,da = \frac{F_0 y_0(1-\beta_1)}{k}\operatorname{arc\,tg} k.$$

D'où en définitive :

Pour $y_0 > y > a_{min}$ ou encore $1 > \beta > \beta_1$

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,\frac{\operatorname{arc\,tg} k\,\dfrac{1-\beta}{1-\beta_1}}{\operatorname{arc\,tg} k} + \tag{24}$$

$$+\frac{1}{4\beta}\left[1 - \frac{\operatorname{arc\,tg} k\,\dfrac{1-\beta}{1-\beta_1}}{\operatorname{arc\,tg} k} - \frac{1-\beta_1}{2k\operatorname{arc\,tg} k}\ln\frac{1+k^2}{1+k^2\left(\dfrac{1-\beta}{1-\beta_1}\right)^2}\right]$$

Pour $b_{max} > y > y_0$ ou encore $(2-\beta_1) > \beta > 1$ avec $\beta' = 2 - \beta$

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{arc\,tg} k\,\dfrac{1-\beta'}{1-\beta_1}}{\operatorname{arc\,tg} k} + \tag{25}$$

$$+\frac{1}{4\beta}\left[1 - \frac{\operatorname{arc\,tg} k\,\dfrac{1-\beta'}{1-\beta_1}}{\operatorname{arc\,tg} k} - \frac{1-\beta_1}{2k\operatorname{arc\,tg} k}\ln\frac{1+k^2}{1+k^2\left(\dfrac{1-\beta'}{1-\beta_1}\right)^2}\right]$$

La figure 17 donne les courbes obtenues pour différentes valeurs[1] du paramètre relatif $\beta_1 = \dfrac{a_{min}}{y_0}$.

[1] Les courbes en pointillé, correspondant à des valeurs négatives de $\dfrac{a_{min}}{y_0}$ sont obtenues par un calcul analogue que le lecteur n'aura pas de peine reconstituer et qu'il serait fastidieux de reproduire ici ; elles montrent qu'à partir de la section où $a_{min} = 0$, le poids spécifique dans l'axe du jet devient inférieur à celui de l'eau.

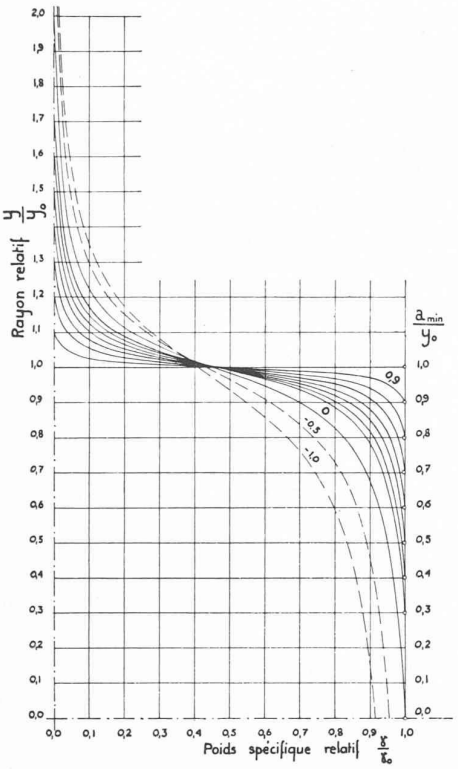

Fig. 17. — Abaque donnant le poids spécifique relatif $\gamma : \gamma_0$ dans une section quelconque en fonction du rayon relatif $y : y_0$, pour différentes valeurs du rayon relatif $a_{min} : y_0$ de la zone homogène du jet.

Elle permet de déterminer pour une section quelconque la courbe du poids spécifique γ moyen en fonction de la distance à l'axe du jet y si l'on connaît le rayon a_{min} de la zone homogène, caractérisée par un poids spécifique γ_0 égal à celui de l'eau.

L'évaluation de $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ par cette méthode est toutefois trop difficile. Si rapprochés que soient les points de mesure, on peut hésiter pour a_{min} entre des limites souvent assez éloignées l'une de l'autre et le choix de la courbe qui convient à une section considérée serait fondé sur un critère peu sûr.

Par contre, après avoir reporté sur un calque les résultats des mesures au tube de Pitot en valeurs relatives, $\frac{y}{y_0}$ pour les ordonnées et $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ pour les abcisses, on peut, par superposition à l'abaque figure 17, choisir avec une certitude satisfaisante la courbe qui convient [1]. La valeur de a_{min} ainsi déterminée est infiniment plus juste, car elle nous intéresse moins comme rayon de la zone homogène que comme critère de la forme de toute la courbe du poids spécifique en fonction du rayon.

A titre d'exemple, nous appliquerons la méthode aux deux jets suivants, sortant d'une tuyère dont l'orifice a un diamètre de 35 mm, obtenus à deux courses différentes du pointeau :

[1] Cette figure sera reproduite dans le tirage à part du présent article à une échelle permettant de l'utiliser directement.

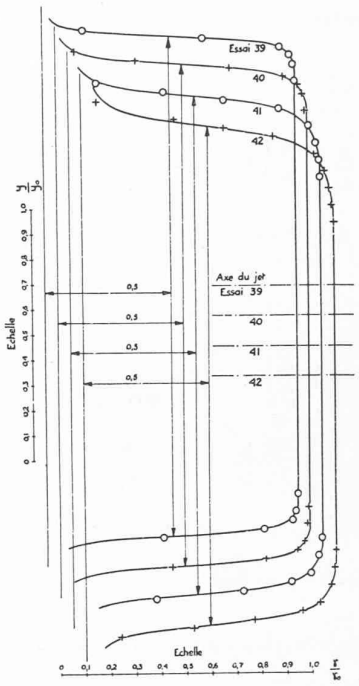

Fig. 18.

Essais Nos		50 à 55	39 à 42
Course	s =	1,20	2,40 cm
Rayon de jet contracté	y_0 =	1,17	1,46 cm

Les distances L_0/y_0 ont les valeurs suivantes :

Essai No	39	40	41	42	
$L : y_0$ =	7,2	9,6	12,0	14,4	
Essai No	50	52	53	54	55
$L : y_0$ =	12,0	17,9	20,9	23,9	26,9

Les figures 18 et 19 donnent, pour ces diverses sections de mesure (avec un décalage qui n'a d'autre but que de rendre le dessin plus clair), les points tirés des mesures et la courbe qui convient, tirée de l'abaque figure 17.

Nous constatons d'une manière générale, d'après nos essais, qu'il est toujours possible (les figures 18 et 19 n'en donnent que deux exemples) de trouver une courbe de l'abaque qui passe par les points résultant des mesures au tube de Pitot.

On pourrait peut-être trouver naturel et évident que, la fonction $F(a)$ introduite étant déduite de certains essais, la courbe ou la famille de courbes calculées s'adapte aussi exactement aux points tirés d'essais analogues, et par suite que cette coïncidence n'apporte pas grand appui à nos calculs. Nous relevons alors qu'avant le choix de cette fonction $F(a)$, *premier élément expérimental introduit*, nécessaire pour traduire l'influence de la variation de la pression de turbulence p_2 dans le temps sur le poids spécifique moyen, nous avons démontré deux choses :

1° La nécessité d'un point d'inflexion de la courbe de mesure jusqu'ici inexplicable, et qui heurtait les notions acquises au point qu'on était tenté de laisser

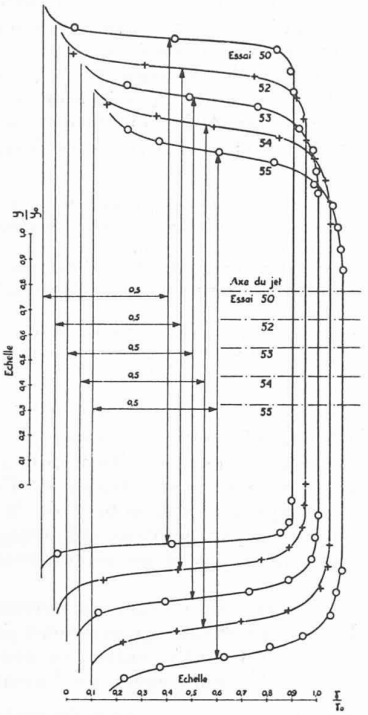

Fig. 19.

de côté des points mesurés, considérés comme peu sûrs, pour obtenir une courbe du genre parabolique. Notre souci d'éviter une interprétation hâtive, fût-elle presque évidente, et de conserver bruts tous les éléments provenant des mesures, a trouvé ici sa légitimation et sa récompense.

2° Le fait qu'à distance y_0 de l'axe du jet le tube de Pitot doit mesurer une pression dynamique égale à environ la moitié de celle mesurée dans la section contractée. Or, bien que nos jets auscultés soient légèrement dissymétriques, comme tous les jets industriels, et par suite donnent dans une même section deux courbes différentes de l'abaque figure 17, on constate (fig. 18 et 19) qu'à l'abcisse $\frac{\Upsilon}{\Upsilon_0} = 0{,}5$ correspond une distance séparant les deux courbes, soit les positions du tube de Pitot, pratiquement égale à 2,0, soit un diamètre $d_0 = 2y_0$ égal à celui du jet contracté avant dispersion.

C'est là, nous semble-t-il, deux premières justifications des hypothèses faites au paragraphe 5 quant à la constance de la vitesse V_1 et au peu d'importance de la résistance de l'air, ainsi que des calculs purement théoriques qui précèdent l'introduction de la fonction expérimentale $F(a)$.

(A suivre.)

LES CONGRÈS

Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale (G. E. P.).

Le 75e anniversaire de la fondation de l'Association.

Zurich, 21-25 septembre 1944.

L'*Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale* (G. E. P.) a tenu, à Zurich, le 24 septembre écoulé, sous la présidence de M. le professeur Dr *C. Bæschlin*, son assemblée générale qui, cette année, revêtit une importance particulière pour célébrer le 75e anniversaire de la fondation de l'Association. Au programme des fêtes de ce Jubilé figuraient en outre une série de conférences données par les professeurs de l'Ecole polytechnique les 21, 22 et 23 septembre et une soirée récréative.

Un très grand nombre d'ingénieurs et d'architectes [1] ont tenu à marquer par leur présence à ces journées leur attachement à l'E. P. F. et ont saisi l'occasion qui leur était offerte pour entrer en contact avec les professeurs de l'Ecole et prendre connaissance des derniers perfectionnements apportés à ses instituts de recherche et d'enseignement, dont plusieurs doivent, pour une part, leur création à la sollicitude que portèrent à leur « alma mater » les membres de la G. E. P.

Les *conférences*, présentées au programme comme devant constituer des « cours de perfectionnement », comportèrent des exposés d'une heure ou deux, touchant aux diverses disciplines allant des sciences mathématiques et physiques aux multiples applications techniques de l'art de l'ingénieur. En architecture l'accent fut mis sur les questions relatives à notre aménagement national. Par chacune de ces 88 leçons l'auditeur devait, dans la spécialité de son choix, pouvoir se rendre compte des récents progrès réalisés dans l'étude de quelques-uns des problèmes techniques les plus actuels ou se faire une idée des résultats auxquels conduit l'usage approprié de telle méthode de calcul ou tel procédé expérimental. Ce cycle d'exposés fut fort heureusement complété par des visites de laboratoires.

L'*Assemblée générale*, après avoir approuvé divers rapports de gestion, prit connaissance du retrait du comité de MM. G. Engi (Bâle), K. Kobelt (Berne), H. Weiss (Berne), A. Ostertag (Zurich) et de M. le professeur C. Bæschlin, président sortant de charge. Elle désigna, pour succéder à ce dernier, M. le professeur Dr *F. Stüssi*. Furent en outre appelés à faire partie du comité MM. R. Casella (Lugano), W. Dürsteler (Thalwil), R. Etienne (Lausanne), A. Frey-Wyssling (Zurich), K. Frey (Bâle), B. Matti (Berne), R. Moser (Zurich), A. Schnetzler (Zurich). M. le Dr C. Bæschlin et M. le conseiller fédéral K. Kobelt furent désignés comme membres d'honneur. La matinée du dimanche s'acheva par une remarquable conférence intitulée « Naturgefühl und Vaterlandsliebe », donnée par M. le professeur F. Ernst.

Au *banquet* prirent la parole, après les souhaits de bienvenue prononcés par le président, M. le professeur Tank, recteur de l'E. P. F., M. le conseiller fédéral Ph. Etter, chef du Département de l'intérieur dont dépend l'E. P. F., et les représentants des autorités cantonales et municipales de Zurich. M. M. Kopp, architecte, président de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, apporta le salut de cet important groupement, de l'Association des anciens

[1] 1300 participants aux conférences, 700 à l'assemblée et au banquet officiel.