Étude stochastique de l'erreur dans la résolution approchée de problèmes d'élasticité plane

Autor(en): **Blanc, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **83 (1957)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-62766

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

83e année 5 janvier 1957 N° 1

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Abonnements:
Suisse: 1 an, 26 francs
Etranger: 30 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 22 francs
Etranger: 27 francs
Prix du numéro: Fr. 1.60
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande » N° II. 57 75, à Lausanne.

Adresser toutes communications concernant abonnements, changements d'adresse, expédition à **Imprimerie La Concorde, Terreaux 31, Lausanne**

Rédaction
et éditions de la S. A. du Bulletin technique (tirés à part), Case Chauderon 475
Administration de la S.A. du Bulletin Technique
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale

Comité de patronage — Président : J. Calame, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. Epitaux, architecte, à Lausanne — Membres : Fribourg : MM. H. Gicot, ingénieur ; M. Waeber, architecte — Vaud : MM. A. Gardel, ingénieur ; A. Chevalley, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; Ch. Thévenaz, architecte — Genève : MM. Cl. Grosgurin, architecte ; E. Martin, architecte — Neuchâtel : MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur — Valais : MM. G. de Kalbermatten, ingénieur ; D. Burgener, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration
de la Société anonyme du Bulletin technique : A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

1/1 page	Fr.	264.—
1/2 »	»	134.40
1/4 »	»	67.20
1/8 »	»	33.60

Annonces Suisses S. A. (ASSA)

Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

SOMMAIRE : *Etude stochastique de l'erreur dans la résolution approchée de problèmes d'élasticité plane*, par CH. BLANC, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — DIVERS : *Electrification Bellegarde-Genève.* — *Commission pour l'étude du plan d'ensemble du réseau des routes principales.* — *Adieu à M. de Kalbermatten.* — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — INFORMATIONS DIVERSES.

ÉTUDE STOCHASTIQUE DE L'ERREUR DANS LA RÉSOLUTION APPROCHÉE DE PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ PLANE [1]

par CH. BLANC, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

1. Nature du problème

L'idée de la méthode d'étude stochastique de l'erreur dans la résolution approchée d'un problème a déjà été exposée à propos de quelques types de problèmes particuliers [2] ; il s'agissait alors en général de problèmes relativement simples ; il a semblé utile d'entreprendre une même étude à propos d'un problème plus compliqué, se rapprochant davantage de ceux auxquels conduit l'art de l'ingénieur. Parmi ces problèmes, ceux de l'élasticité plane reviennent fréquemment ; on les rencontre chaque fois qu'on étudie les déformations d'un milieu élastique dont on peut, tout au moins en première approximation, négliger celles qui se font parallèlement à une certaine direction ; c'est le cas par exemple des barrages.

Mathématiquement, il s'agit alors de déterminer trois fonctions σ_x, σ_y et τ, composantes du tenseur des contraintes, qui satisfont à un système différentiel de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\[2ex] \Delta\,(\sigma_y + \sigma_y) = F\,(x,\, y). \end{cases}$$

et à des conditions aux limites qui sont fixées par les liaisons sur le bord.

On peut du reste substituer à la recherche de ces trois fonctions celle d'une seule, $\Phi(x, y)$, dite *fonction d'Airy*, avec

$$(2)\qquad \Delta\Delta\Phi = F$$

et

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \\[2ex] \tau = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}, \\[2ex] \sigma_y = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \end{cases}$$

[1] Cette étude a été effectuée grâce à une subvention du Fonds national de la Recherche scientifique. M. *W. Liniger*, math. dipl., y a contribué d'une manière essentielle, particulièrement en ce qui concerne les calculs numériques.

[2] Voir [2], [3], [4], [5].

Cette substitution a l'avantage de conduire à un problème ne comportant qu'*une* fonction inconnue, d'où les autres se déduisent par dérivation ; cet avantage est peut-être plus apparent que réel ; s'il simplifie les développements théoriques, il ne semble pas être en général recommandable dès que l'on veut traiter numériquement un problème.

Les équations (1), avec les conditions aux limites, ne peuvent en général s'intégrer d'une manière exacte ; nous allons montrer comment on peut étudier l'erreur commise en les intégrant par la méthode approchée qui consiste à *remplacer les dérivées partielles par des quotients de différences*. Cette méthode approchée n'est pas la seule concevable (on peut, par exemple, employer aussi des méthodes d'approximations linéaires) ; toutefois il semble bien que ce soit celle qui se révèle, en général, comme la plus précise à travail égal.

2. Méthode approchée

Considérons les opérateurs aux différences

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta z}{\delta x} = z\left(x + \dfrac{1}{2},\ y\right) - z\left(x - \dfrac{1}{2},\ y\right), \\ \dfrac{\delta z}{\delta y} = z\left(x, y + \dfrac{1}{2}\right) - z\left(x, y - \dfrac{1}{2}\right), \\ \Delta^o z = z(x+1, y) + z(x-1, y) + z(x, y+1) + \\ \qquad + z(x, y-1) - 4z(x, y)\ ; \end{cases}$$

en remplaçant les opérateurs différentiels de (1) par ces opérateurs aux différences, on obtient un système

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta \sigma_x{}^o}{\delta x} - \dfrac{\delta \tau^o}{\delta y} = 0 \\ \dfrac{\delta \sigma_y{}^o}{\delta y} - \dfrac{\delta \tau^o}{\delta x} = 0 \\ \Delta^o (\sigma_x{}^o + \sigma_y{}^o) = F. \end{cases}$$

qui, combiné avec les conditions aux limites (où l'on remplace également, s'il y a lieu, les dérivées par des quotients de différences), donne une solution

$$\sigma_x{}^o,\ \tau^o,\ \sigma_y{}^o$$

approchée de (1), avec des *erreurs*

$$(6)\qquad \xi = \sigma_x{}^o,\quad \eta = \tau^o - \tau,\quad \zeta = \sigma_y{}^o - \sigma_y.$$

Examinons de plus près à quelles conditions satisfont ces erreurs. Posons pour cela

$$(7)\quad \begin{cases} t = \dfrac{\delta \xi}{\delta x} - \dfrac{\delta \eta}{\delta y}, \\ s = \dfrac{\delta \zeta}{\delta y} - \dfrac{\delta \eta}{\delta x}, \\ r = \Delta^o (\xi + \zeta), \end{cases}$$

puis considérons les opérateurs

$$(8)\quad \begin{cases} L' = \dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\delta}{\delta x}, \\ M' = \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\delta}{\delta y}, \\ N' = \Delta - \Delta^o. \end{cases}$$

On a alors, par un calcul facile

$$(9)\quad \begin{cases} t = L'\ \sigma_x - M'\tau, \\ s = M'\ \sigma_y - L'\tau, \\ r = N'\ (\sigma_x + \sigma_y)\ ; \end{cases}$$

ainsi, les erreurs ξ, η, ζ satisfont à un système d'équations aux différences (7), qui ne diffère du système (5) (qui fournit la solution approchée) que par les seconds membres, ces seconds membres se calculant à partir de la solution exacte par (9).

Il est évident que dans un problème déterminé, où la solution exacte est inconnue, cette remarque n'est que d'un intérêt limité. Il n'en est plus de même si l'on se propose d'étudier les erreurs du point de vue stochastique.

3. Etude stochastique de l'erreur

Supposons désormais que les fonctions figurant dans notre problème ne sont plus des fonctions certaines, mais des *fonctions aléatoires* données. Les erreurs sont dès lors également aléatoires, et la donnée de moments des fonctions σ_x, σ_y et τ permet de calculer ceux des erreurs. Il est clair que le choix de ces fonctions aléatoires comporte un certain arbitraire ; on se laissera guider par deux sortes de préoccupations : d'une part on cherchera à se placer dans des conditions telles que l'on puisse en déduire des conclusions utiles pour les applications ; d'autre part on fera en sorte que les calculs soient aussi commodes que possible.

Si nous conservons les équations (1) sous la forme qu'elles ont ici, ou, ce qui revient au même, si nous utilisons la fonction d'Airy, ces trois fonctions σ_x, σ_y et τ sont liées entre elles d'une façon certaine ; il suffit de préciser la nature de la fonction d'Airy Φ, d'où se déduisent σ_x, σ_y et τ par (3). On peut donc choisir Φ, en déduire σ_x, σ_y et τ par (3), puis t, s, r, par (9), enfin ξ, η, ζ par (7) et les conditions aux limites.

Soit donc Φ de moyenne nulle :

$$E\Phi = 0$$

stationnaire d'ordre deux, avec une covariance donnée :

$$E\Phi\,(P_1)\,\Phi\,(P_2) = G\,(P_1, P_2)\ ;$$

on en tire, en tenant compte de la linéarité des liaisons, les moments d'ordres *un* et *deux* des erreurs.

Il y a une autre façon de procéder, qui se révèle plus simple dans la suite. Elle consiste à faire abstraction de la fonction d'Airy, et à remplacer les deux premières équations (1) par deux relations plus générales :

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \tau}{\partial y} = \Psi_1\ ; \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau}{\partial x} = \Psi_2\ ; \end{cases}$$

on peut dès lors supposer σ_x, σ_y et τ stochastiquement indépendantes, ce qui simplifie considérablement les calculs.

4. Covariances des erreurs, avec la fonction d'Airy

Supposons que la covariance de Φ possède une représentation spectrale permutable avec les opérations que nous aurons à faire sur cette covariance, et de la forme simple

$$E\Phi(P_1)\Phi(P_2) = \iint \sigma(\alpha)\,\sigma(\beta)\quad e^{i[(x_2\alpha+y_2\beta)-(x_1\alpha+y_1\beta)]}\,d\alpha\,d\beta$$

(P_1 est le point (x_1, y_1), P_2 le point (x_2, y_2)).

On a, à partir de (3), (8) et (9),

$$(11)\qquad \begin{cases} t = \left(\dfrac{\delta}{\delta y}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\delta}{\delta x}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ s = \left(\dfrac{\delta}{\delta x}\dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\delta}{\delta y}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \\ r = [\Delta - \Delta^{\circ}]\,\Delta\Phi\,; \end{cases}$$

posons, pour abréger

$$(12)\qquad t = L\Phi,\quad s = M\Phi,\quad r = N\Phi\,;$$

alors

$$Et = Es = Er = 0$$

et (par l'hypothèse de permutabilité)

$$Et(P_1)t(P_2) = L_{P_1}\,L_{P_2}\,E\Phi(P_1)\,\Phi(P_2)$$
$$= \iint \sigma(\alpha)\sigma(\beta)\,L_{P_2}e^{i(x_2\alpha+y_2\beta)}\,L_{P_1}\,e^{-i(x_1\alpha+y_1\beta)}d\alpha d\beta$$

on a, en supposant $\delta x = \delta y = 1$ (ce qui n'est pas réellement restrictif) :

$$L\,e^{i(x\alpha+y\beta)} = i\,e^{i(x\alpha+y\beta)}\,\varphi_1(\alpha, \beta)$$

avec

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = 2\left(\beta^2 \sin\frac{\alpha}{2} - \alpha\beta \sin\frac{\beta}{2}\right),$$

d'où

$$(13)\qquad Et(P_1)t(P_2) = \iint \sigma(\alpha)\sigma(\beta)\varphi_1^2(\alpha, \beta)\,e^{i[(x_2-x_1)\alpha+(y_2-y_1)\beta]}\,d\alpha\,d\beta\,;$$

on trouve une expression analogue pour $Es(P_1)\,s(P_2)$, mais avec une fonction

$$\varphi_2(\alpha, \beta) = 2\left(\alpha^2 \sin\frac{\beta}{2} - \alpha\beta \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

enfin une même expression pour $Er(P_1)\,r(P_2)$ avec

$$\varphi_3(\alpha,\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 + 2\cos\alpha + 2\cos\beta - 4).$$

On a des expressions analogues pour les covariances

$$Et(P_1)\,s(P_2),\quad Et(P_1)\,r(P_2),\quad Es(P_1)\,r(P_2)\,;$$

toutes ces expressions peuvent du reste se simplifier encore en tenant compte du fait que $s(\alpha)$ est une fonction paire. Pour les calculer numériquement, il faut encore choisir cette fonction $s(\alpha)$; nous prendrons ici, comme dans d'autres cas, et toujours pour les mêmes raisons de simplicité et d'efficacité [1] :

$$(14)\qquad s(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\omega} & \text{si } |\alpha| \leq \omega \\ 0 & \text{si } |\alpha| > \omega. \end{cases}$$

[1] Le spectre est « normé », en ce sens que $\int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha)\,d\alpha = 1$; pour passer de là au cas général, il suffit évidemment de multiplier par une constante positive quelconque, donc de remplacer $s(\alpha)\,s(\beta)$ par $As(\alpha)\,s(\beta)$.

Alors le calcul des covariances des fonctions t, s et r se ramène à celui d'un certain nombre d'intégrales simples, nombre assez grand du reste, et représentant un volume de calcul considérable (il y a en tout vingt-quatre intégrales simples à calculer dans ce cas).

Lorsque les covariances des fonctions t, s et r ont été calculées, les relations (7) permettent de calculer les covariances des erreurs elles-mêmes [2].

En effet, ces équations (7) constituent en fait un système d'équations algébriques linéaires, où les inconnues sont les valeurs X_k des fonctions inconnues ξ, η, ζ et les seconds membres des valeurs c_i des fonctions t, s et r ; on peut donc écrire ces équations (7) sous la forme

$$(15)\qquad \sum a_{ik}\,X_k = c_i,$$

d'où, si (b_{ki}) est la matrice inverse des (a_{ik})

$$X_k = \sum b_{ki}\,c_i$$

et

$$X_j = \sum b_{jh}\,c_h,$$

puis

$$(16)\qquad EX_k\,X_j = \sum b_{ki}\,b_{jh}\,Ec_i\,c_h\,;$$

ainsi les covariances $EX_k\,X_j$ des erreurs se déduisent de celles des $c_i c_k$, soit de celles de fonctions t, s et r, dont on vient de voir comment elles se calculent.

5. Covariances des erreurs, sans la fonction d'Airy

En principe, les calculs se font de la même manière si on ne fait pas intervenir la fonction d'Airy, et si on formule d'emblée des hypothèses sur les fonctions σ_x, σ_y et τ.

Supposons ces trois fonctions de moyenne nulle, stochastiquement indépendantes, stationnaires d'ordre deux, avec de plus

$$E\sigma_x(P_1)\sigma_x(P_2) = E\sigma_y(P_1)\sigma_y(P_2) = E\tau(P_1)\tau(P_2) = T(P_1, P_2),$$

où

$$(17)\qquad T(P_1, P_2) = \iint s(\alpha)\,s(\beta)\,e^{i[(x_2\alpha+y_2\beta)-(x_1\alpha+y_1\beta)]}\,d\alpha\,d\beta$$

(la fonction $s(\alpha)$ n'étant pas nécessairement la même que plus haut). On a alors très simplement

$$Et(P_1)\,t(P_2) = (L'_{P_1}L'_{P_2} + M'_{P_1}M'_{P_2})\,T(P_1, P_2),$$

pour $Es(P_1)\,s(P_2)$ la même expression, puis

$$Er(P_1)\,r(P_2) = 2N'_{P_1}N'_{P_2}\,T(P_1, P_2),$$

enfin pour $Et(P_1)s(P_2)$, $Et(P_1)r(P_2)$, $Es(P_1)r(P_2)$ des expressions assez simples à écrire ; en remplaçant ensuite T par son expression (17) et L', M', N' par leur définition (8), on obtient les covariances cherchées sous forme d'intégrales doubles facilement décomposables en intégrales simples ; par exemple :

$$Et(P_1)\,t(P_2) = \iint s(\alpha)s(\beta)\varphi_4(\alpha)\varphi_4(\beta)e^{i[(x_2-x_1)\alpha+(y_2-y_1)\beta]}d\alpha d\beta$$

avec

$$\varphi_4(\alpha) = \alpha - 2\sin\frac{\alpha}{2}\,;$$

[2] On retrouve ici une circonstance qui n'est pas nouvelle ; le calcul des covariances d'erreurs se fait au moyen des mêmes équations que le problème approché lui-même ; voir [5], p. 129 par exemple ; notons qu'il sera toujours possible d'en tirer parti pour simplifier cette recherche des covariances.

on a pour les autres covariances des expressions analogues, qu'il n'est pas nécessaire de reproduire ici ; il suffit pour expliciter numériquement la détermination de ces covariances de choisir la fonction spectrale $s(\alpha)$ (on la choisira comme plus haut, par (14)), puis de calculer dix intégrales définies (et non plus vingt-quatre). Le calcul numérique est ici beaucoup plus commode que si l'on introduit la fonction d'Airy.

La suite des calculs, c'est-à-dire le calcul des covariances d'erreurs, est alors exactement la même.

6. Un problème certain particulier

L'étude des déformations des grands barrages a conduit à tenir compte, dans les calculs, non plus seulement de l'élasticité du barrage lui-même mais aussi de celle du sol sur lequel il repose. Considérons un problème de cette nature, assez simplifié tout de même pour ne pas allonger inutilement les développements purement numériques. Il s'agit d'étudier la déformation d'un mur de section rectangulaire *ABCD* (fig. 1) sous l'effet d'une force unité appliquée en *B* selon *BC* ; le mur est encastré le long de *AD* dans un milieu illimité ; les coefficients d'élasticité du mur et du milieu d'encastrement sont les mêmes.

Pour résoudre numériquement ce problème (ce qui n'est pas possible exactement avec des fonctions élémentaires), on substitue aux équations de l'élasticité plane, dans le rectangle *ABCD*, des équations aux différences (paragraphe 2) ; il n'est plus possible de procéder de même dans le demi-plan illimité ; mais comme on connaît la solution *exacte* des équations de l'élasticité dans ce demi-plan, pour des contraintes données le long de *AD*, on peut rechercher une solution approchée du problème en *raccordant le long de AD* une solution des équations aux différences dans le rectangle à une solution exacte dans le demi-plan ; cela est possible, comme on peut le montrer en partant d'un « modèle » convenable, c'est-à-dire d'une interprétation mécanique des équations aux différences ; voir le mémoire [1], dont les méthodes ont été utilisées ici.

On montre que ce raccord ne fait pas intervenir les constantes élastiques, si on suppose qu'elles sont les mêmes de part et d'autre de la ligne *AD*.

Le problème considéré a été traité en décomposant le rectangle selon le réseau marqué sur la figure 1. Les fonctions σ_x et σ_y sont définies au point milieu de chaque petit carré, τ est définie aux sommets du réseau. Il est clair que l'on prendra en fait, dans les applications, un réseau plus fin ; mais il est inutile de le faire ici, puisqu'il s'agit simplement d'éprouver la méthode.

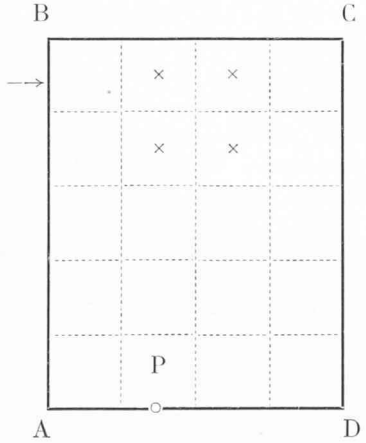

Fig. 1.

Dans le problème considéré ici, les conditions aux limites donnent sur les trois côtés *AB*, *BC* et *CD* les valeurs des fonctions σ_x, σ_y et τ elles-mêmes ; sur le côté *AD*, elles consistent en relations d'une forme plus compliquée, qui impliquent simultanément toutes les valeurs de σ_x, σ_y et τ sur ce côté ; on obtient ces relations en exprimant, à partir de ces σ_x, σ_y et τ, les déformations des deux milieux puis en égalant ces déformations.

Nous donnons ci-après (fig. 2), sur un tableau analogue à la figure 1, les valeurs obtenues pour les fonctions σ_x, σ_y et τ aux points correspondants du réseau.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8
τ	10	0		0		0		0		0
σ_y	9		0		0		0		0	
σ_x	9		—1		—0,6328		—0,2493		0	
τ	8	0		0,3672		0,3835		0,2493		0
σ_y	7		0,3672		0,0163		—0,1341		—0,2493	
σ_x	7		0		—0,0936		—0,0675		0	
τ	6	0		0,2736		0,4096		0,3168		0
σ_y	5		0,6408		0,1524		—0,2270		—0,5661	
σ_x	5		0		0,0052		—0,0034		0	
τ	4	0		0,2790		0,4008		0,3202		0
σ_y	3		0,9198		0,2741		—0,3076		—0,8863	
σ_x	3		0		0,0242		—0,0040		0	
τ	2	0		0,3032		0,3726		0,3242		0
σ_y	1		1,2230		0,3435		—0,3560		—1,2105	
σ_x	1		0		0,0838		—0,0722		0	
τ	0	0		0,3870		0,2167		0,3964		0
σ_y	0		1,4165		0,2583		—0,2661		—1,4087	

Fig. 2.

7. Etude stochastique de l'erreur

Pour étudier du point de vue stochastique l'erreur commise dans la résolution du problème considéré au paragraphe 6, on procédera de la manière suivante.

Tout d'abord on utilise la solution obtenue pour faire une estimation des covariances des fonctions aléatoires σ_x, σ_y et τ. Cette estimation se fait en posant que les moments de second ordre de ces fonctions sont égaux à ceux de la solution approchée elle-même.

Cela étant, on met en œuvre les considérations des paragraphes 3 à 5 ; cela consiste, on l'a vu, à résoudre les équations aux différences du problème considéré, avec des conditions aux limites qui sont homogènes,

mais par ailleurs les mêmes que celles du problème considéré.

Remarquons que la détermination effective de la solution comporte en fait ici la résolution d'un système linéaire algébrique d'une quarantaine d'équations ; elle peut se simplifier considérablement par une élimination préalable permettant d'exprimer toutes les inconnues en fonction de quatre d'entre elles, les valeurs de σ_x correspondant aux quatre points marqués d'une croix sur la figure 1. Cette élimination est particulièrement avantageuse au moment où on veut étudier les erreurs, cette étude exigeant pratiquement l'inversion de la matrice du système algébrique ; lorsqu'on a pu ainsi réduire ce système à l'ordre quatre, l'inversion ne présente pas de difficultés.

Par contre, la détermination numérique des covariances de fonctions t, s et r (c'est-à-dire des grandeurs $Ec_i.c_h$ de la relation (16)) implique un travail considérable, surtout lorsqu'on utilise la fonction d'Airy.

L'estimation du spectre d'après la solution du problème exact donne les valeurs suivantes (les lettres sont définies au paragraphe 4) :

pour la fonction d'Airy : $A = 12{,}9$; $\omega = 0{,}6$.
pour les fonctions σ_x, σ_y, τ : $A = 0{,}334$; $\omega = 0{,}6$.

Pour des raisons de commodité et pour ne pas trop allonger les calculs, on a fait le calcul des moments d'erreurs pour une seule valeur de la solution, en fait pour la valeur de σ_y au point marqué P sur la figure 1 ; de plus, on a dû faire le calcul pour la valeur $\omega = 0{,}8$; il a semblé inutile de consacrer plus de temps à une détermination numérique qui reste forcément longue lorsqu'on ne dispose pour les calculs que de machines de bureau. Ils deviendraient par contre tout à fait abordables avec une calculatrice électronique à programme. En prenant donc pour ω la valeur 0,8 (au lieu de 0,6), mais en conservant les valeurs de A estimées sur le problème particulier, on obtient ainsi :

par la considération de la fonction d'Airy :

$$\sqrt{E\zeta_P^2} = 0{,}0121\,,$$

et par la considération de σ_x, σ_y et τ :

$$\sqrt{E\zeta_P^2} = 0{,}0174\,.$$

Comme le calcul a été fait avec une valeur de ω supérieure à celle qui est estimée à partir de la solution approchée, on peut admettre que la moyenne quadratique de l'erreur sur la valeur de σ_y en P est au plus de 0,01 environ ; en comparant avec la solution trouvée, soit 0,2583, on voit que l'on peut s'attendre ici à une erreur relative de l'ordre de 5 à 10 %.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Banderet, P. : *Une méthode pour le calcul des problèmes d'encastrement.* Volume du Centenaire de l'E.P.U.L., Lausanne, 1953.

[2] Blanc, Ch. : *Etude stochastique de l'erreur dans un calcul numérique approché.* Comment. math. helv. 26, 1952, p. 225-241.

[3] Blanc, Ch. : *Sur les formules d'intégration approchée d'équations différentielles.* Archiv des Math., 5, 1954, p. 301-308.

[4] Blanc, Ch. : *Sur l'intégration approchée d'équations du type parabolique.* Zeitschrift für ang. Math. und Physik, 7, 1956, p. 146-152.

[5] Blanc, Ch. et Liniger, W. : *Stochastiche Fehlerauswertung bei numerischen Methoden.* Zeitschrift für ang. Math. und Mech. 35, 1955, p. 121-130.

DIVERS

Electrification Bellegarde-Genève

Le 27 septembre 1956 a eu lieu, en présence des autorités françaises, suisses, S.N.C.F. et C.F.F., l'inauguration des installations de traction électrique Bellegarde-Genève.

1. Généralités

Le Ministère français des Travaux publics ayant approuvé en 1952 l'électrification de l'Etoile d'Ambérieu, ce projet nécessitait l'électrification par les C.F.F. du parcours Frontière Suisse-Genève, assurant ainsi la traction électrique sur l'ensemble du trajet Paris-Genève *(fig. 1)*.

Il s'agissait alors de choisir le point de jonction du courant français (1500 V, continu) et du courant suisse (15 000 V alternatif, 16 $^2/_3$ Hz). Les C.F.F. ont accepté que cette jonction se fasse en gare de Genève-Cornavin ce qui permettra aux machines françaises d'assurer leur service jusqu'à Cornavin.

2. Alimentation et énergie

La sous-station de Longeray alimente les lignes de contact Bellegarde-Frontière et celles de la section Culoz-Bellegarde.

Près de la halte de Vieux-Bureau est située une sous-station qui assure l'alimentation des lignes de contact

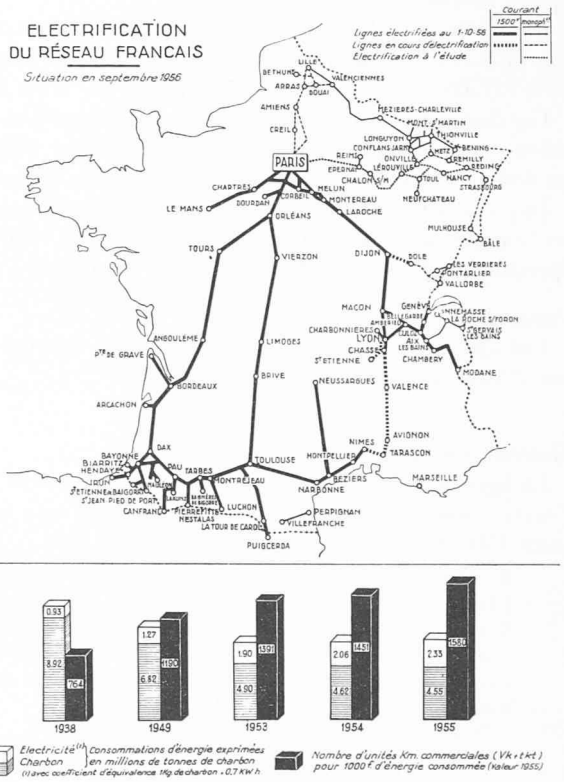

Fig. 1. — Electrification du réseau français.
Situation en septembre 1956.