# Vérifications expérimentales de l'analyse limite plastique des coques métalliques de révolution

Autor(en): **Save, Marcel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **97 (1971)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-71182

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# Vérifications expérimentales de l'analyse limite plastique des coques métalliques de révolution [1]

par Marcel SAVE, professeur à la Faculté polytechnique de Mons, Belgique

## 1. Introduction

L'analyse limite plastique des ossatures est bien connue [1] [2]. Ses concepts fondamentaux se retrouvent, généralisés, dans l'analyse limite des coques qui est basée sur les hypothèses suivantes :

1. Il existe une condition d'écoulement

$$F(Q_i) \leq 1 \qquad (1)$$

pour un élément de coque, exprimée en les « contraintes généralisées » $Q_i$ (moments, forces, etc., $i = 1, 2, \ldots n$). Cette condition d'écoulement est représentée dans l'espace des $Q_i$ par une surface d'écoulement

$$F(Q_i) = 1 \qquad (2)$$

convexe, fixe et indéformable dans cet espace.

2. Pour un état de contrainte représenté par un point de coordonnées $Q_i$ se trouvant sur la surface d'écoulement, les vitesses de déformation généralisées correspondantes $q_i$ sont telles que $\Sigma Q_i q_i$ est la puissance spécifique dissipée dans l'écoulement plastique de l'élément de coque. Si l'on superpose les espaces des contraintes $Q_i$ et des vitesses de déformation $q_i$, la loi d'écoulement plastique se traduit par la normalité du vecteur de composantes $q_i$ à la surface d'écoulement au point dont les coordonnées $Q_i$ satisfont l'équation (2) [3].
3. La ductilité est illimitée.
4. La ruine de la coque survient par écoulement plastique libre (formation d'un mécanisme de ruine). Jusqu'à la ruine plastique, les changements de géométrie de la structure sont négligeables. Dans la phase initiale du mécanisme, les déplacements ont lieu sous charges appliquées constantes.

Lors d'une mise en charge à un seul paramètre, la valeur limite $P_l$ de ce paramètre, atteinte à l'état de ruine, peut se rechercher par deux voies différentes appelées respectivement la méthode statique et la méthode cinématique. Elles s'appuient sur les deux théorèmes fondamentaux de l'analyse limite, à savoir :

— le théorème statique, qui s'énonce :
« Tout champ de contrainte statiquement admissible, c'est-à-dire satisfaisant les conditions d'équilibre et la condition d'écoulement (1), fournit une borne inférieure $P_{l-}$ de la charge limite $P_l$. »

— le théorème cinématique, qui s'énonce :
« Tout mécanisme de ruine cinématiquement admissible dans lequel la puissance des forces appliquées est positive fournit, en égalant cette puissance à la puissance de dissipation du mécanisme, une borne supérieure $P_{l+}$ de la charge limite $P_l$. »

Par conséquent, on a

$$\boxed{P_{l-} \leq P_l \leq P_{l+}} \qquad (3)$$

Lorsque $P_{l-} = P_{l+}$, on a bien entendu $P_{l-} = P_{l+} = P_l$. La charge limite exacte est ainsi obtenue. Cette situation se présente chaque fois qu'un champ de contrainte statiquement admissible et un mécanisme de ruine cinématiquement admissible se correspondent par la loi de normalité. On dit qu'on a alors une *solution complète*.

On trouvera les démonstrations de ces théorèmes, ainsi que des exemples d'applications, dans de nombreux ouvrages, dont en particulier la référence [2].

Au cours des dix dernières années, l'analyse limite des coques plastiques de révolution s'est énormément développée. Les charges limites théoriques et les mécanismes associés doivent être soumis au contrôle de l'expérimentation afin d'évaluer l'influence des divers facteurs qui ont été négligés :

— l'écrouissage du matériau ;
— les changements de géométrie de la coque, à la fois avant et après ruine plastique ;
— le caractère fini de la ductilité.

Nous donnons ci-après un bref résumé des résultats théoriques disponibles actuellement. Nous nous limitons aux coques métalliques de révolution, pour lesquelles des données expérimentales assez importantes déjà permettent d'éprouver la valeur de la théorie, ce que nous faisons ensuite, en apportant une attention particulière au comportement « postlimite ».

## 2. Bref aperçu des résultats théoriques

Pour un type donné de coque, soumise à un type donné de chargement à un paramètre, les solutions peuvent différer selon :

1) la condition d'écoulement utilisée, différente d'un matériau à un autre, et éventuellement simplifiée (linéarisée) à des fins mathématiques ;
2) la méthode utilisée : statique, cinématique ou complète.

Dans le cas des métaux, la condition de plasticité la plus fréquemment employée est celle de Tresca (critère de la contrainte tangentielle maximum) parce que, d'une part elle est bien vérifiée expérimentalement et, d'autre part elle est linéaire par morceau, ce qui est un aspect mathématiquement attrayant. Cependant, lorsqu'on établit la surface d'écoulement d'un élément de coque à partir de la condition de plasticité de son matériau, on obtient en général une surface présentant des portions courbes, même si la condition de plasticité du matériau est linéaire.

[1] Cet article. publié avec l'appui de l'Institut de la Construction mécanique (ICOM), fait suite à une conférence donnée par l'auteur le 26.10.1968 dans le cadre des cours de recyclage "Dimensionnement plastique des structures métalliques".

[2] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

[3] C'est la loi de normalité, ou loi de potentiel plastique.

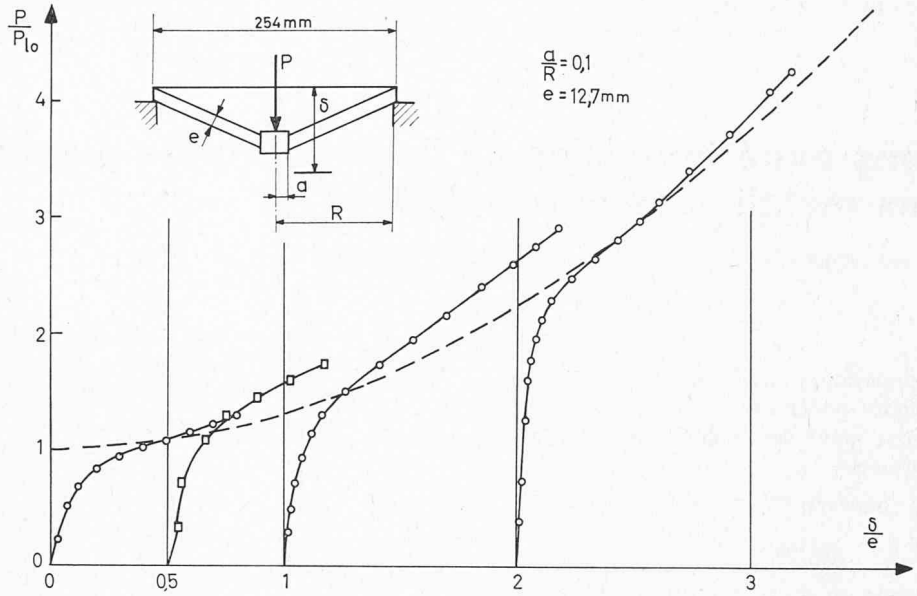



Fig. 1. — Coques coniques tendues sous charge axiale concentrée.

Il y a plus de dix ans, D. C. Drucker [3] a déterminé la surface d'écoulement de Tresca d'un cylindre circulaire chargé avec la symétrie de révolution. Sa publication stimula fortement le développement de l'analyse limite des coques, qui a atteint actuellement un point tel qu'une monographie complète a été publiée en 1963 par Hodge [4] sur les seules plaques et coques de révolution. En 1967, Olszak et Sawczuk ont consacré à l'analyse limite deux chapitres de leur ouvrage de revue sur le comportement inélastique des coques [5]. On peut trouver une étude détaillée d'un nombre important de problèmes de coques dans le livre plus ancien de Hodge [6], ainsi que dans la référence [2].

Le symposium de l'IASS de Varsovie [7] a contribué également pour une large part au progrès de l'analyse limite des coques.

Nous disposons actuellement de solutions complètes pour une grande variété de cas de charge à symétrie axiale de la *coque cylindrique circulaire*, solutions le plus souvent basées sur une condition d'écoulement de Tresca linéarisée :

— Coque cylindrique encastrée aux deux extrémités, soumise à pression uniforme [6], avec éventuellement un anneau de renfort à mi-portée [8].
— Coque cylindrique appuyée aux deux extrémités et soumise à pression uniforme [9].
— Coque cylindrique liée aux deux bouts à des plaques rigides, soumise à une pression radiale et une force axiale indépendantes [10], [4].
— Coque cylindrique encastrée à une extrémité, libre à l'autre, et soumise à pression radiale uniforme et force axiale indépendantes [11], [12].
— Réservoir cylindrique fermé par des fonds plats et soumis à pression interne [13], [14], [15].
— Coque cylindrique renforcée par des raidisseurs [16], [17], [18].
— Coque cylindrique encastrée aux deux extrémités et soumise uniquement à pression radiale [6].
— Coque cylindrique soumise à un anneau mince de pression [19], [20], [21].
— Réservoir cylindrique sous pression hydrostatique [22].

Les problèmes cités ci-dessus ne comportent que trois contraintes généralisées : l'effort normal et le moment longitudinaux ($N_x$ et $M_x$), et l'effort normal circonférentiel ($N_\theta$) [2], [4], [6].

Au contraire, dans le cas d'une coque de révolution de forme quelconque (sous charge de révolution) il y a quatre contraintes généralisées : les efforts normaux et les moments méridiens ($N_\varphi$, $M_\varphi$) et circonférentiels ($N_\theta$, $M_\theta$). Les surfaces d'écoulement, soit pour un matériau de von Mises, soit pour un matériau de Tresca, sont non linéaires et, partant, d'emploi difficile. Diverses approximations ont été proposées. Hodge [23] a suggéré l'emploi d'une condition « d'interaction limitée » qui suppose que ou bien les moments ($M_\varphi$, $M_\theta$) ou bien les efforts ($N_\varphi$, $N_\theta$) sont importants, mais non les deux types de contraintes simultanément. Par conséquent, la surface d'interaction, pour un matériau de Tresca, sera formée de deux (hyper)prismes hexagonaux indépendants, l'un en $M_\varphi$, $M_\theta$, l'autre en $N_\varphi$, $N_\theta$. Comme cette surface d'écoulement est complètement circonscrite à la surface exacte de Tresca, et doit être réduite par un facteur d'homotéthie de 0,618 pour s'y inscrire, une charge limite exacte $P_0$ avec la surface d'interaction limitée fournit les bornes suivantes pour la charge limite $P_l$ avec la condition exacte de Tresca :

$$0{,}618\ P_0 \leqq P_l \leqq P_0 \tag{4}$$

A l'aide d'une approximation meilleure de la surface exacte de Tresca, Flügge et Nakamura [24] ont obtenu des charges limites exactes $P^*$ telles que

$$0{,}851\ P^* \leqq Pl \leqq P^*, \tag{5}$$

améliorant ainsi sensiblement l'approximation de Hodge.

Dans certains cas, la condition d'écoulement de Tresca pour un cylindre peut être employée avec succès pour d'autres coques de révolution, comme l'ont suggéré Drucker et Shield [25], [26].

Nous donnons ci-après la liste de la plupart des solutions complètes disponibles actuellement pour des coques de révolution non cylindriques (dont beaucoup basées sur la condition d'interaction limitée de Hodge) :

— Coupole sphérique articulée au contour, soumise à pression radiale uniforme [23].

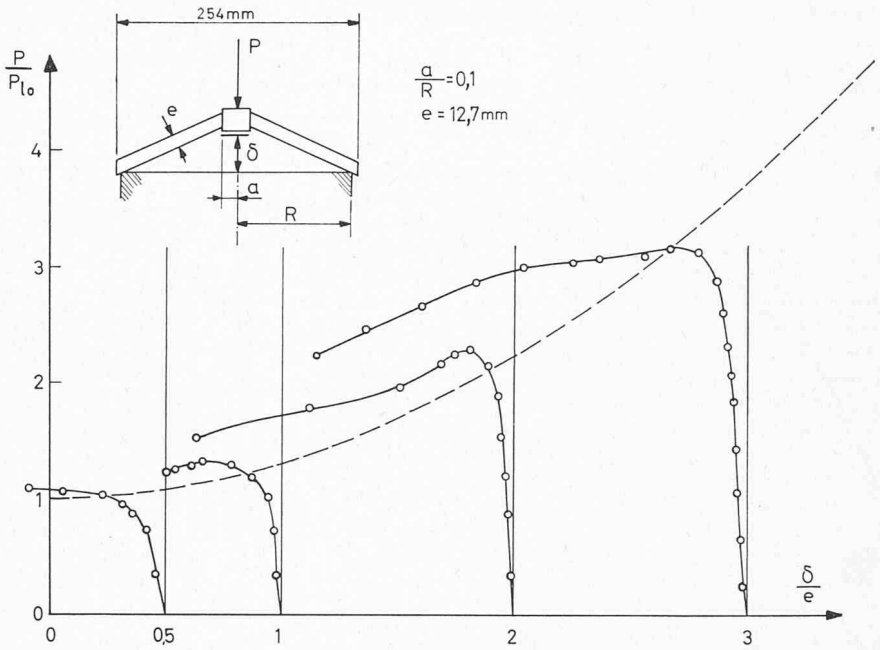



Fig. 2. — Coques coniques comprimées sous charge axiale concentrée.

— Coupole sphérique avec ouverture circulaire au sommet [4], [27].

— Coupole sphérique encastrée au contour [4].

— Coque conique chargée par un noyau rigide central [28], [29], [30].

— Coque conique simplement appuyée, soumise à pression uniforme [31].

— Coque conique, avec ouverture centrale circulaire chargée au bord [24].

— Fonds de réservoirs toriconiques et torisphériques sous pression [26], [32] (ce dernier cas étant d'importance pratique considérable).

Cette liste n'a pas l'ambition d'être exhaustive. De nouvelles solutions paraissent continuellement dans la littérature spécialisée. Des coques cylindriques avec ouvertures circulaires, avec ou sans anneau de renforcement, ont été étudiées respectivement par Hodge [33], et par Coon, Gill et Kitching [34].

L'analyse limite d'un réservoir de révolution formé de l'assemblage d'une sphère et d'un cylindre a été faite par Dinno et Gill [35], [36] et par Ellyin [37], et comparée à des essais jusqu'à ruine [38], [39].

## 3. Expérience sur coques métalliques de révolution

Si on met en charge lentement une coque métallique dont la ductilité a été préservée ou restituée (coque éventuellement recuite), la rupture ne se produit pas avant formation complète du mécanisme de ruine (les phénomènes d'instabilité étant exclus des cas considérés ici).

Il reste donc à évaluer les influences combinées de l'écrouissage et des changements de géométrie, dans le domaine élasto-plastique et au cours des grandes déformations plastiques qui suivent la formation du mécanisme.

Pour un type donné de problème, l'expérience permet en général de déterminer un domaine de géométries de la structure (souvent un intervalle du coefficient de minceur $\mu$ = portée/épaisseur) dans lequel la théorie de l'analyse limite plastique est une approximation satisfaisante.

Quand les effets des changements de géométrie sont importants, on dit (avec Demir et Drucker [45]) que le problème est « dégénéré ».

C'est selon ce point de vue que nous examinons ci-après la plupart des résultats expérimentaux disponibles à ce jour.

### 3.1 *Coques coniques*

Nous donnons aux figures 1 et 2 les résultats d'essais effectués par Onat [41] sur des coques coniques en acier doux, de minceur

$$\mu = \frac{D}{e} = 20.$$

Sur ces figures, $P_{lo}$ représente la charge limite, dans la théorie plastique simple, de la plaque plane (coque de flèche initiale $\delta$ nulle) et la charge limite de chacun des cônes correspond à l'intersection de la courbe en pointillés avec la parallèle à l'axe des $P$ distante de cet axe du $\delta/e$ initial caractérisant la coque conique. De l'inspection de ces figures, on peut conclure que :

*a)* Pour les coques coniques tendues, à partir du moment où l'on a atteint la charge limite (selon la théorie plastique simple), les déformations croissent beaucoup plus vite ; ce changement est surtout marqué pour la coque de flèche initiale $\delta = 2e$ ; il l'est beaucoup moins pour les coques plus plates ($\delta = 0{,}5e$ par exemple) ; la charge limite n'est cependant pas une charge de ruine car des états d'équilibre stable existent sous des charges supérieures ;

*b)* Pour des coques coniques comprimées, sous la charge limite (ou même sous une charge inférieure comme c'est le cas pour la coque de $\delta_{\text{initial}} = 3e$), les déformations croissent brusquement sous charge décroissante : on a donc atteint un état instable et par conséquent la charge limite est une vraie charge de ruine.

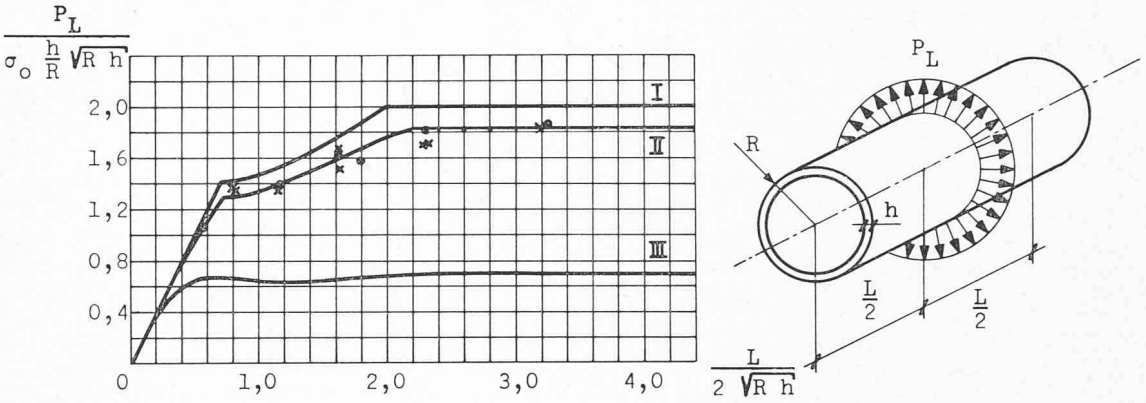
### 3.2 *Coques cylindriques*

M. E. Lunchnick [42] a effectué des essais jusqu'à ruine sur des coques cylindriques en acier doux, renforcées par

I : approximation du rectangle circonscrit

II : pression limite exacte

III : première plastification idéalisée (limite élastique)




$P_L$ : charge annulaire par unité de longueur

$\sigma_o$ : limite élastique

Points expérimentaux : × acier , • aluminium

Fig. 3. — Coque cylindrique soumise à une ligne de charges radiales uniformes.

des anneaux raidisseurs extérieurs et soumises à pression hydrostatique externe.

Il ne donne malheureusement aucun diagramme du type pression-flèche permettant de définir la pression expérimentale de ruine. Le fait qu'il fasse état d'une « pression de ruine » (collapse pressure) permet cependant de conclure que, sous cette pression, les déformations ont dû croître très fortement.

La ruine se produit dans la coque, entre deux anneaux. On peut calculer la pression limite d'une telle portion de coque en la supposant encastrée parfaitement sur les anneaux et soumise à la fois à une pression radiale extérieure et à un effort axial de compression provenant de la pression hydrostatique sur les fonds (voir Hodge [6]).

On peut alors dresser le tableau suivant.

| N° de l'essai | Paramètre de la coque $\omega$ | Espacement relatif des raidisseurs $(l'/2R)$ | Rapport : pression de ruine théorique / pression de ruine expérimentale |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,932 | 0,114 | 0,914 |
| 2 | 0,857 | 0,095 | 0,905 |
| 3 | 0,857 | 0,095 | 0,975 |
| 4 | 1,388 | 0,110 | 1,029 |
| 5 | 1,951 | 0,202 | 0,971 |
| 6 | 1,290 | 0,109 | 1,026 |
| 7 | 2,077 | 0,168 | 1,063 |

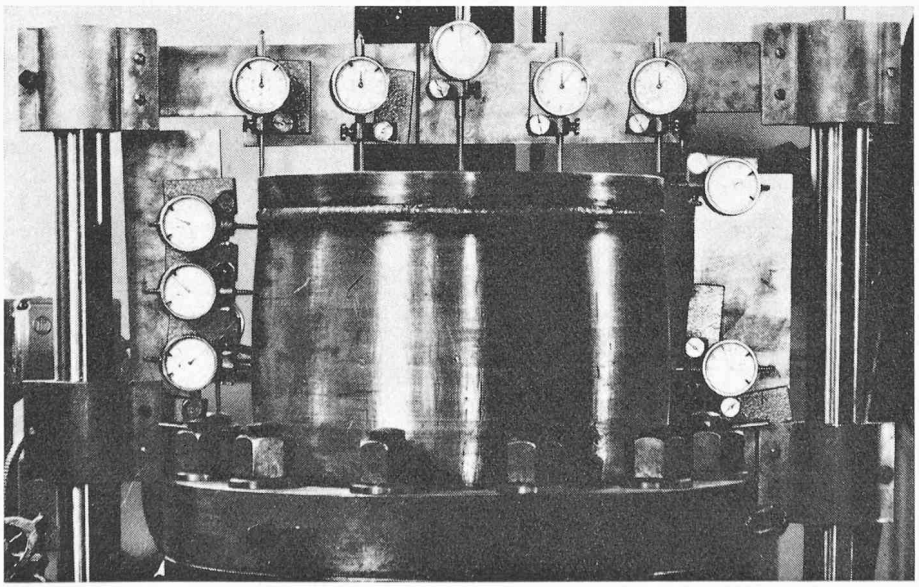


Fig. 4. — Dispositif de mise en pression interne de modèles de réservoirs.

avec : $l'$ espacement d'axe en axe des raidisseurs ;

$R$ rayon moyen de la coque ;

$l$ distance entre faces voisines de deux raidisseurs successifs ;

$e$ épaisseur de la coque ;

$$\omega = \frac{l}{\sqrt{2e\,R}}.$$

On voit que la théorie plastique simple (schéma rigide-plastique, compte non tenu du changement de géométrie post-limite) donne une bonne approximation.

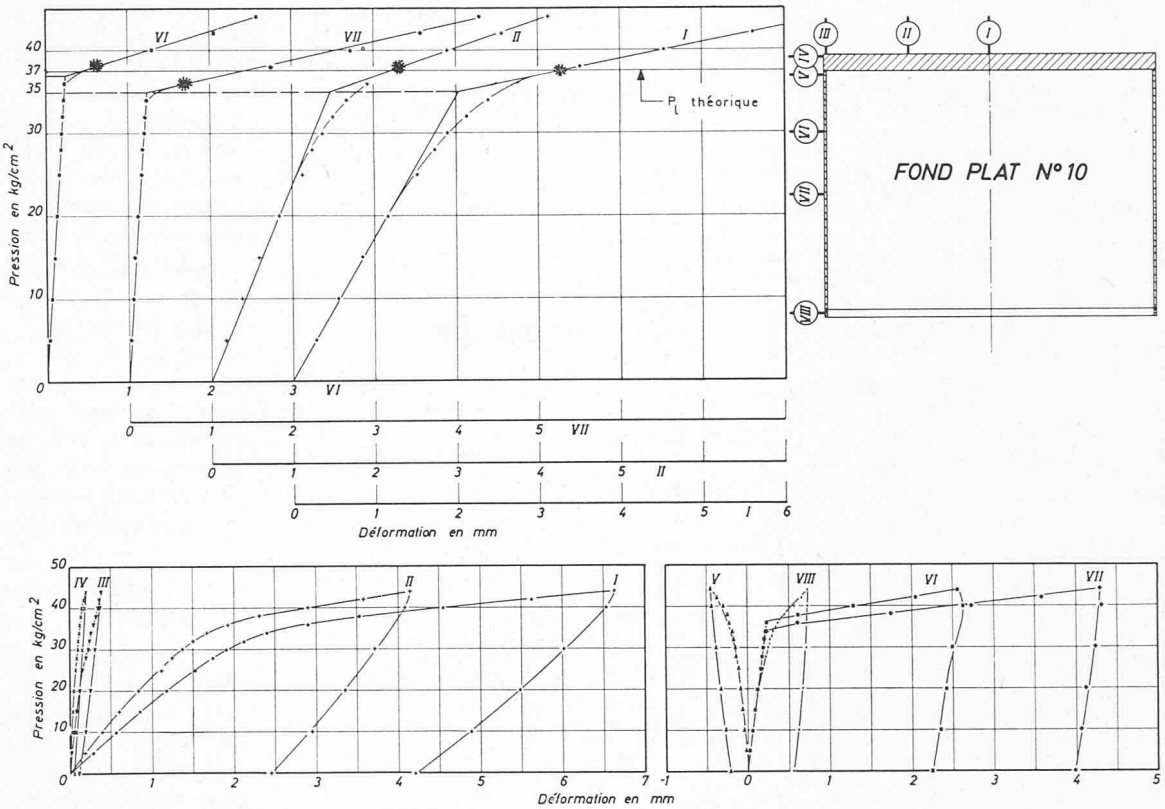



Fig. 5. — Essai jusqu'à ruine plastique d'un réservoir cylindrique : diagrammes pression/déformation.

Lunchick et Overby [43] ont essayé ensuite sous même type de charge une coque géométriquement identique à celle de l'essai n° 2 mais réalisée cette fois par usinage et non en construction sondée comme c'était le cas dans l'essai n° 2. La coque usinée fut soumise à un recuit de détente avant essai. La comparaison a confirmé que les tensions résiduelles n'avaient pas d'influence sensible sur la pression de ruine.

Le rapport de la pression limite théorique à la pression limite expérimentale pour le modèle usiné vaut 0,97 (la différence par rapport à 0,905, valeur trouvée pour la coque soudée, provient de la légère ovalisation de la coque due à la soudure).

Si l'on remarque que la minceur $\mu = 2R/e$ de ces coques cylindriques variait de 210 (essai n° 6) à 113 (essai n° 1), alors que les cônes essayés par Onat avaient une minceur de 20, on en conclut que la charge limite donnée par la théorie plastique simple est susceptible de fournir la charge de ruine avec une bonne approximation, dans des cas divers de coques, à condition que la ruine ait effectivement lieu par excès de déformation plastique.

Les essais effectués par Dehart et Basdekas [44] portaient sur des coques cylindriques en aluminium renforcées par des raidisseurs annulaires internes et soumises elles aussi à une pression hydrostatique extérieure. Leur but consistait à déterminer l'espacement et les dimensions des raidisseurs de manière que la ruine n'ait pas lieu par voilement et que les raidisseurs soient strictement dimensionnés pour juste ne pas périr avec la coque.

L'étude théorique de ces coques jusqu'à la ruine est basée sur l'hypothèse d'un comportement anisotrope.

Si nous nous contentons cependant de comparer les pressions de ruine expérimentales avec celles données par la théorie plastique simple, nous obtenons le tableau ci-après :

| N° de l'essai | Paramètre de la coque $\omega$ | Espacement relatif des raidisseurs $(l'/2R)$ | Rapport : pression de ruine théorique / pression de ruine expérimentale |
|---|---|---|---|
| 3 F | 4,36 | 1,060 | 0,905 |
| 3 H | 1,64 | 0,398 | 0,985 |
| 3 G | 3,40 | 0,790 | 0,87 |
| 3 J | 3,275 | 0,795 | 0,92 |

La minceur $\mu$ valait 17,1, sauf pour l'essai 3 G où elle valait 18,3. On voit que, ici aussi, la théorie simple donne une approximation satisfaisante.

Des expériences très soignées faites par Demir et Drucker [45] sur des cylindres en acier et en aluminium soumis à un anneau de force de grandeur totale $F$ donnent des diagrammes charge-flèche présentant un coude marqué suivi d'une partie plate. On peut en conclure que les changements de forme n'ont pas une influence appréciable sur le mécanisme de ruine. Les charges limites expérimentales, correspondant approximativement à la fin du coude du diagramme flèche-charge, sont en bon accord avec les prévisions théoriques comme on peut le voir sur la figure 3.

L'auteur [46] a soumis à pression interne, jusqu'à très grande déformation plastique, douze cylindres en acier doux, encastrés à la base et fermés au sommet par une plaque soudée (fig. 4). Des diagrammes flèche-charge typiques et des profils déformés de ces réservoirs cylindriques sont donnés aux figures 5 et 6. Le mécanisme de ruine plastique prévu s'est effectivement présenté et les charges limites expérimentales (correspondant à la fin du coude élastoplastique dans le diagramme flèche-charge, points indiqués *) diffèrent par moins de 7 % des valeurs théoriques (mais sont toutes inférieures à ces valeurs théoriques).

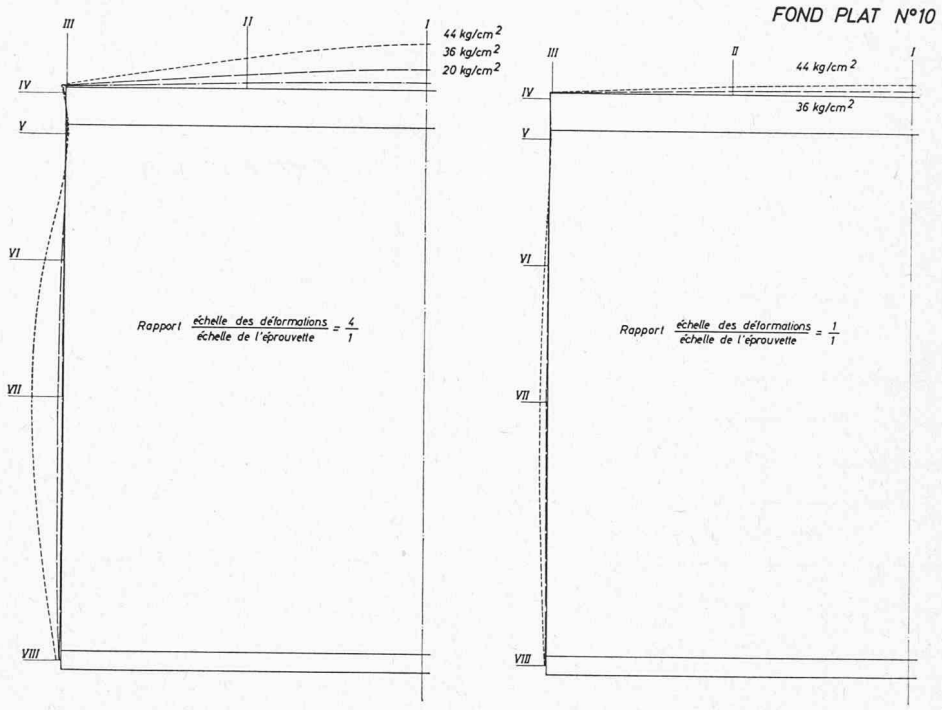



Fig. 6. — Essai jusqu'à ruine plastique d'un réservoir cylindrique : déformées.

### 3.3 *Réservoirs torisphériques et toriconiques*

Deux réservoirs toriconiques et neuf réservoirs torisphériques ont été soudés à un anneau rigide et soumis à pression interne par l'auteur [46]. Les modèles essayés étaient des fonds de réservoirs industriels en acier doux, fabriqués par emboutissage et recuits. Des diagrammes flèche-charge typiques et des déformées plastiques de ces fonds de réservoirs sont donnés aux figures 7 et 8. Le mécanisme de ruine plastique prévu s'est effectivement réalisé, sans être influencé de manière appréciable par les changements de forme.

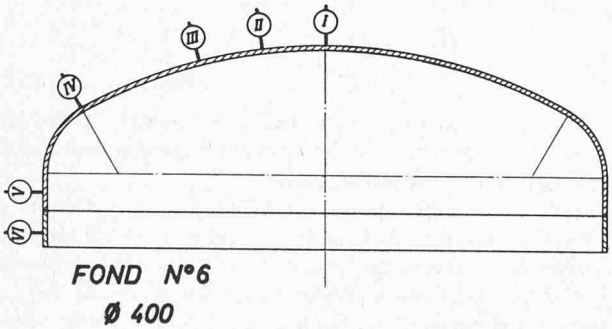
Les flèches au sommet sous la charge limite théorique restent inférieures à 1 % du diamètre. Les valeurs expérimentales des pressions limites sont supérieures aux valeurs théoriques de 0 à 10 % approximativement. Les lignes de glissement prévues ont été clairement visibles (fig. 9).

### 3.4 *Intersection cylindre-sphère*

Les essais déjà cités de Dinno et Gill [38] et Cloud [39], ainsi que ceux de Ellyin [47] conduisent à des conclusions générales analogues à celles déduites des essais cités aux paragraphes précédents, à savoir que la pression limite correspond avec une bonne approximation à un vrai état de ruine par grandes déformations permanentes.

## 4. Conclusions

De ce qui a été exposé aux paragraphes précédents, il ressort que l'analyse limite a atteint actuellement dans le domaine des coques métalliques de révolution un point de développement tel qu'on devrait lui accorder une attention et une confiance analogues à celles qui lui sont attribuées dans le cas des ossatures en acier. En effet, non seulement dispose-t-on des solutions théoriques de très nombreux problèmes mais, en outre, ces solutions se sont révélées avoir un sens physique réel. Les expériences ont en effet montré que les changements de géométrie avaient en général une influence modérée et que l'état limite théorique correspondait bien à une modification profonde du comportement de la coque, à savoir l'apparition de déformations beaucoup plus grandes et permanentes, pour un même accroissement de charge.



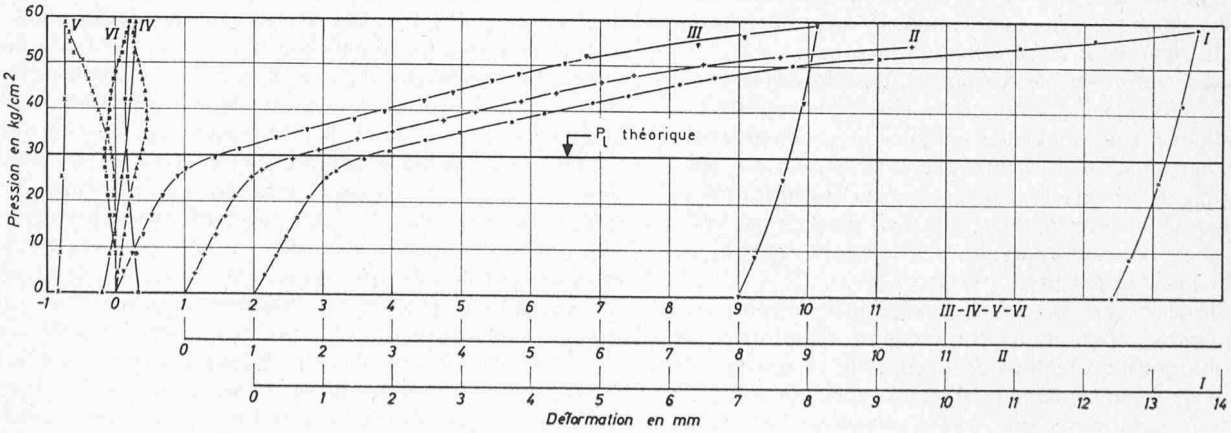




Fig. 7. — Essai jusqu'à ruine plastique d'un réservoir torisphérique : diagrammes pression/déformation.

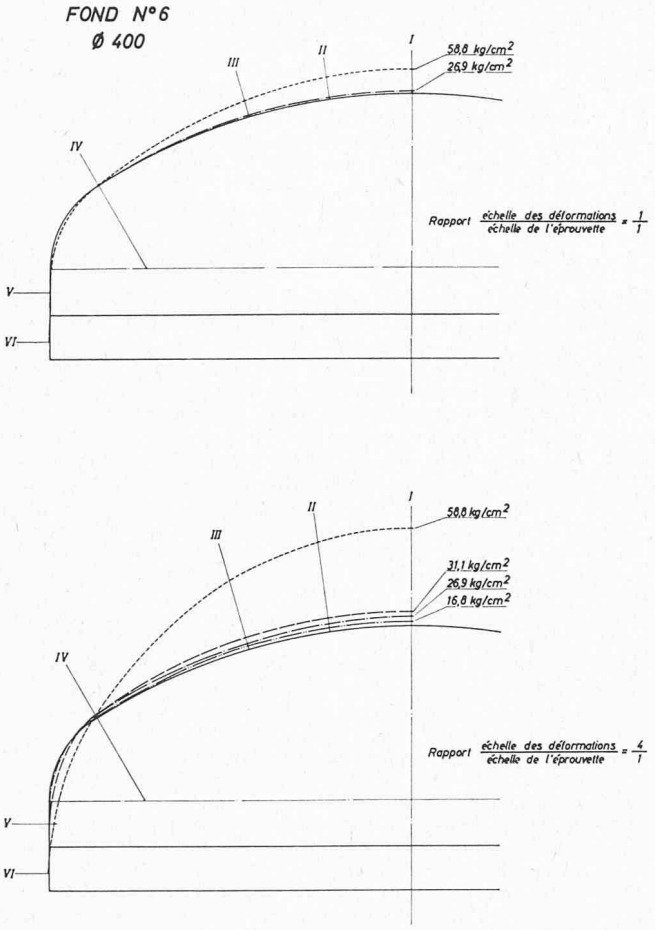



Fig. 8. — Essai jusqu'à ruine plastique d'un réservoir tori-sphérique : déformées.

Par conséquent, les charges limites peuvent être considérées comme de vraies charges de ruine lorsque l'écoulement plastique libre doit être évité.

Il y a lieu d'espérer que les progrès réalisés ces dernières années influenceront sans tarder les dimensionnements pratiques des coques métalliques [48].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] C. Massonnet et M. Save : *Calcul plastique des constructions*. Vol. 1 : Structures dépendant d'un paramètre, 547 p., 2e édition. CBLIA, Bruxelles 1967.

[2] C. Massonnet et M. Save : *Calcul plastique des constructions*. Vol. 2 : Structures spatiales, 473 p., 1re édition. CBLIA, Bruxelles 1963. (2e édition en préparation.)

[3] D. C. Drucker : *Limit analysis of cylindrical shells under axially-symmetric loading*. Proc. 1st Midwest Conf. Solid Mech., p. 158-163, Urbana 1953.

[4] P. G. Hodge Jr. : *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y. 1963.

[5] W. Olszak et A. Sawczuk : *Inelastic behaviour in shells*. Noordhoff, Groningen 1967.

[6] P. G. Hodge Jr. : *Plastic analysis of structures*. Mac-Graw Hill, New York 1959.

[7] *Non-classical shell problems*. IASS Symposium, Varsovie 1963. North-Holland Pub. Co. 1964.

[8] B. Paul : *Limit loads of clamped shells with a reinforcing ring*. PIBAL Report, No. 424, Polytech. Inst. of Brooklyn, December 1958.

[9] B. Paul et P. G. Hodge Jr. : *Carring capacity of elastic-plastic shells under hydrostatic pressure*. Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., p. 631-640 1958.

[10] P. G. Hodge Jr. et J. Panarelli : *Interaction curves for circular cylindrical shells according to the Mises or Tresca yield criteria*. Journ. Appl. Mech., vol. 29, p. 375-380, 1962.

[11] E. T. Onat : *The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading*. Quart. Appl. Math., vol. XIII, p. 63-72, 1955.

[12] R. Sankaranarayanan : *Plastic interaction curves for circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures*. Journ. Franklin Inst., vol. 270, No. 5, November 1960.

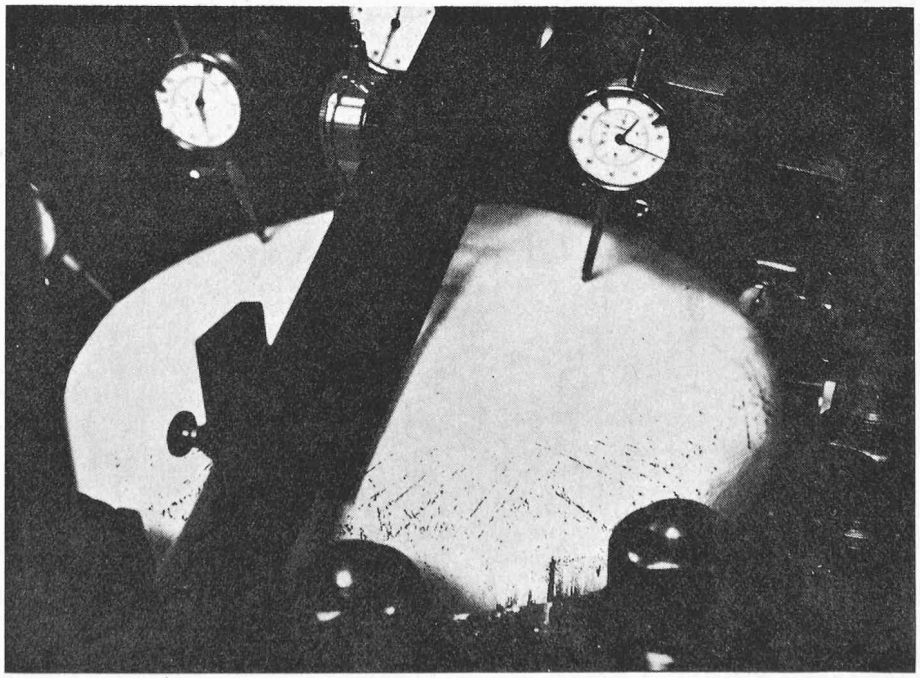



Fig. 9. — Essai jusqu'à ruine plastique d'un réservoir tori-sphérique : lignes de glissement.

[13] P. G. Hodge Jr. : *Plastic design of a closed cylindrical structure*. Journ. Mech. Phys. Solids, vol. 12, p. 1-10, 1964.
[14] N. A. Forsman : *On the carrying capacity of cylindrical vessels with flat closures* (in Russian). Isv. An. USSR Mekh. Mashin, No. 3, p. 106-111, 1964.
[15] M. Sayir : *Kollapsbelastung von rotationsymmetrischen Zylinderschalen*. Zeits. Ang. Math. Phys. (ZAMP), vol. 17, p. 353-360, 1966.
[16] A. Biron et A. Sawczuk : *Plastic analysis of rib-reinforced cylindrical shells*. Trans. ASME, Journ. Appl. Mech., vol. 89, Series E, No. 1, p. 37-42, March 1967.
[17] M. Capurso et A. Gandolfi : *Sul collasso rigido-plastico dei gusci nervati di revoluzione* (Plastic collapse of ribbed shells of revolution). Istituto de Tecnica delle Costruzioni, Napoli, Rapport interne 1967.
[18] M. Capurso et A. Gandolfi : *Sul collasso plastico dei tubi circolari nervati soggetti a pressione e sforzo assiale* (Plastic collapse of ribbed cylinders under pressure and axial force). Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Napoli, Rapport interne 1967.
[19] G. Eason et R. T. Shield : *The influence of free ends on the load-carrying capacities of cylindrical sheels*. Journ. of the Mech. Phys. Solids, vol. 4, p. 17-27, 1955.
[20] G. Eason : *The load carrying capacities of cylindrical shells subjected to a ring of force*. Journ. Mech. Phys. Solids, vol. 7, p. 169-181, 1959.
[21] H. H. Demir : *Cylindrical shells under ring loads*. Proc. ASCE, vol. 91, ST3 (J. Struct. Div.) (Part I), p. 71-98, June 1965.
[22] W. Olszak et A. Sawczuk : *Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung*. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, t. XXVI, nº 1-2, Budapest 1959.
[23] P. G. Hodge Jr. : *Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading*. Journ. of Appl. Mech., vol. 27, Trans. ASME, vol. 82, Serie E, p. 323-331, juin 1960.
[24] W. Flügge et T. Nakamura : *Plastic analysis of shells of revolution under axisymmetric loads*. Ing. Archiv. Vol. 34, No. 4, p. 238-247, 1965.
[25] D. C. Drucker et R. T. Shield : *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*. Journ. of Appl. Mech., vol. 26, Trans. ASME, vol. 81, Serie E, p. 61-68, 1959.
[26] D. C. Drucker et R. T. Shield : *Limit strength of thin-walled pressure vessels with an ASME standard torispherical head*. Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, p. 665-672, 1958.
[27] P. G. Hodge Jr. et C. Lakshmikantham : *Limit analysis of shallow shells of revolution*. Trans. ASME. Journ. Appl. Mech., vol. 30, Series E, No. 2, p. 215-218, juin 1963.
[28] P. G. Hodge Jr. : *Plastic analysis of circular conical shells*. Journ. of Appl. Mech., décembre 1960.
[29] E. T. Onat : *Plastic analysis of shallow conical shells*. Proc. ASCE, Eng. Mech. Div., décembre 1960.
[30] R. H. Lance et E. T. Onat : *Analysis of plastic shallow conical shells*. Journ. Appl. Mech., vol. 30, p. 199-209, 1963.
[31] R. W. Kuech et S. L. Lee : *Limit analysis of simply supported conical shells subjected to uniform internal pressure*. J. Franklin Inst., vol. 280, No. 1, p. 71-87, juillet 1965.
[32] D. C. Drucker et R. T. Shield : *Design of thin walled torispherical and toriconical pressure-vessel heads*. Journ. of Appl. Mech., June 1961.
[33] P. G. Hodge Jr. : *Full-strength reinforcement of a cutout in a cylindrical shell*. Trans. ASME, Journ. Appl. Mech., vol. 31, Series E, No. 4, p. 667-675, décembre 1964.
[34] M. D. Coon, S. S. Gill et R. Kitching : *A lower bound to the limit pressure of a cylindrical pressure vessel with an unreinforced hole*. Int. Journ. Mech. Sciences, Vol. 9, No. 2, p. 69-75, 1965.
[35] S. S. Gill : *The limit pressure of a flush cylindrical nozzle in a spherical pressure vessel*. Int. Journ. Mech. Sciences, vol. 6, No. 1, p. 105-115, 1964.
[36] K. S. Dinno et S. S. Gill : *The limit analysis of a pressure vessel consisting of the junction of a cylindrical and a spherical shell*. Int. Journ. Mech. Sciences, vol. 7, No. 1, p. 21-42, January 1965.
[37] F. Ellyin : *The effect of yield surfaces on the limit pressure of intersecting shells*. Int. Journ. of Solids and Structures, vol. 5, No. 7, juillet 1969.
[38] K. S. Dinno et S. S. Gill : *An experimental investigation into the plastic behavior of flush nozzels in spherical pressure vessels*. Int. Journ. Mech. Sciences, vol. 7, No. 12, p. 817-839, 1965.
[39] R. L. Cloud : *The limit pressure of radial nozzles in spherical shells*. Nuc. Struc. Eng., vol. 1, p. 403, 1965.
[40] N. Jones : *The collapse pressure of a flush cylindrical nozzle intersecting a conical pressure vessel axisymmetrically*. Int. Journ. of Mech. Sciences, Vol. 11, No. 5, p. 401-415, mai 1969.
[41] E. T. Onat : Communication au Xe Congrès international de mécanique appliquée, Stresa 1960. Photos aimablement communiquées par l'auteur.
[42] M. E. Lunchick : *Yield failure of stiffened cylinders under hydrostatic pressure*. Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Providence. 1958.
[43] M. E. Lunchick et J. A. Overby : *Yield strength of machined ring-stiffened cylindrical shell under hydrostatic pressure*, Proc. SESA, XVIII, I, 1961.
[44] R. C. Dehart et N. L. Basdekas : *Yield collapse of stiffened circular cylindrical shells*. Southwest Research Institute. San Antonio, Texas. Report, septembre 1960.
[45] H. H. Demir et D. C. Drucker : *An experimental study of cylindrical shells under ring loading*. Progress in Applied Mechanics (The Prager anniversary volume), Mac Millan, New York, p. 205-220, 1963.
[46] M. Save : *Vérification expérimentale de l'analyse limite plastique des plaques et coques en acier doux*. Rapport MT 21, CRIF, 21, rue des Drapiers, Bruxelles 1966.
[47] F. Ellyin : *Experimental investigation on flush nozzles in conical-spherical pressure vessels*. Univ. de Sherbrooke. Rapport nº F.E.3-68, avril 1968.
[48] R. L. Cloud : *Interpretative report on pressure vessel heads*. Welding Research Council Bulletin No. 119, p. 1-9, janvier 1967.

# Divers

## Fonds des ingénieurs et architectes vaudois en faveur de la formation professionnelle

En mai 1970 a été constitué, à l'initiative de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA) et d'entente avec la Fédération suisse des Architectes indépendants (FSAI), l'Association vaudoise des architectes (AVA) et l'Union technique suisse (UTS) un Fonds des ingénieurs et des architectes vaudois en faveur de la formation professionnelle, conjointement avec la création d'une caisse d'allocations familiales (CAFIAV).

Les bureaux d'études vaudois sollicités d'adhérer à la CAFIAV et par là même d'appuyer les efforts de formation professionnelle, ont répondu en grand nombre à l'appel, de telle sorte que maintenant la CAFIAV d'une part et le Fonds d'autre part ont trouvé leurs assises.

La CAFIAV a été officiellement reconnue par la Caisse générale à Clarens comme caisse professionnelle d'allocations familiales à partir du 1er janvier 1971.

Quant au Fonds pour la formation, il appuiera les efforts entrepris par les associations professionnelles intéressées et arrêtera sa politique en fonction d'un inventaire des besoins que celles-ci sont le mieux à même d'établir. Les bureaux d'études qui n'ont pas encore adhéré à ces institutions sont vivement invités à le faire et en ont la possibilité en tout temps.