Sur les périodes des intégrales de première espèce attachée à une variété algébrique.

Autor(en): **Rham, Georges de**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **3 (1931)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4683

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur les périodes des intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique

par GEORGES DE RHAM, Lausanne

Dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes, Riemann a établi, relativement aux périodes des intégrales de première espèce, des formules importantes que M. W. V. D. Hodge[1]) a étendues récemment au cas des intégrales n^{uples} attachées à une variété algébrique à n dimensions. Je vais montrer ici que ces formules peuvent se déduire rapidement d'un théorème de ma thèse[2]).

1. Rappelons d'abord quelques propriétés d'Analysis situs relatives à une variété close et orientable V, à un nombre pair $2n$ de dimensions. Soient

$$c_1, c_2, \ldots, c_r$$

un système fondamental de cycles (ou champs d'intégration fermés) à n dimensions et

$$F(x, y) = \sum_{i,k} a_{i,k} x_i y_k$$

le nombre d'intersections (indice de Kronecker) des deux cycles

$$c = \sum_i x_i c_i \quad \text{et} \quad \sum_i y_i c_i .$$

$F(x, y)$ est une forme bilinéaire, à coefficients entiers, symétrique pour n pair, alternée pour n impair et son discriminant vaut ± 1.

Soit maintenant ω l'élément d'une intégrale multiple d'ordre n, régulière en tout point de V et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. On peut trouver des nombres ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ tels que

$$\int_c \omega = F(x, \xi) \quad \text{quels que soient les } x .$$

Ces nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ sont d'ailleurs les périodes de ω relativement à des cycles $d_1, d_2, \ldots, d_r$ qui forment un autre système fondamental.

---

1) Journal of the London Math. Soc., October 1930, p. 283.

2) Journal de math. pures et appl. 1931 (sous presse).

Soit w un autre élément d'intégrale analogue à ω, η_i sa période relative à d_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Le produit extérieur $w\omega$ donne une intégrale d'ordre $2n$, et l'on a l'*égalité fondamentale*

$$(1) \qquad \int_V w\omega = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} F(\xi, \eta).$$

Cette égalité est un cas particulier d'un théorème, qu'on trouvera dans ma thèse (§ 27), qui permet de calculer les périodes d'une intégrale égale au produit de deux autres lorsqu'on connaît les périodes de ces dernières et les tableaux d'intersections de la variété.

2. Considérons maintenant une variété algébrique, à n dimensions complexes et à *singularités ordinaires*. Il lui correspond une variété close et orientable V, à $2n$ dimensions réelles, à laquelle ont peut appliquer ce qui précède.

Quel que soit le point M de V, on peut trouver un système de coordonnées curvilignes complexes, $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, valable dans un domaine contenant M. Une intégrale n^{uple} est analytique et régulière en M, si, au voisinage de M, son élément est de la forme

$$f(z_1, z_2, \ldots z_n)\, dz_1\, dz_2 \ldots, dz_n,$$

f étant holomorphe en M. Les conditions d'intégrabilité sont automatiquement vérifiées, et le produit de deux tels éléments est toujours nul (cela découle tout de suite des propriétés des formes différentielles extérieures).

Cela posé, supposons que, dans l'égalité (1), ω et w soient des éléments d'intégrales analytiques et régulières en tout point de V, c'est-à-dire des intégrales de première espèce; l'égalité donne

$$(2) \qquad F(\xi, \eta) = 0.$$

Supposons en second lieu que w soit l'intégrale imaginaire conjuguée (non analytique!) de l'intégrale de première espèce ω, et soit, au voisinage de M,

$$\omega = f(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \ldots dz_n, \quad w = \overline{f}(z_1, \ldots, z_n)\, \overline{dz_1} \ldots \overline{dz_n};$$

un calcul simple nous donne

$$w\omega = i^{n^2} 2^n |f|^2\, dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n.$$

Si l'élément de volume $dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n$ est positif, ce que nous pouvons supposer, il sera encore positif, comme on sait, pour tout autre système de coordonnées complexes et quel que soit le point M. On voit alors que l'intégrale au premier membre de (1), débarrassée du facteur i^{n^2}, est essentiellement positive et (1) nous donne en définitive

$$i^n F(\xi, \bar{\xi}) > 0. \tag{3}$$

3. La relation (2) et l'inégalité (3), obtenues pour la première fois par Riemann pour $n = 1$ et par M. Hodge pour n quelconque (il n'a toutefois donné (3) que pour n impair), donnent lieu à diverses conséquences, classiques pour $n = 1$. Sans y insister, terminons par une remarque sur leurs démonstrations. La partie importante consiste au fond à établir l'égalité (1), bien que ni Riemann, ni M. Hodge, ne l'aient énoncée explicitement. L'idée essentielle de M. Hodge (voir le paragraphe 4 de son Mémoire) peut même fournir une démonstration différente de la mienne et peut-être plus simple du théorème général dont (1) n'est qu'un cas très particulier.

(Reçu le 8 mai 1931)