Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1931)

Artikel: Ein Satz über die Riemannsche Fläche der Inversen einer im endlichen meromorphen Funktion.

Autor: Locher, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4686

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Satz über die Riemannsche Fläche der Inversen einer im endlichen meromorphen Funktion

Von L. LOCHER, Zürich

In einer Arbeit über „Probleme aus dem Gebiet der ganzen transcendenten Funktionen" [1]) wirft Herr Prof. *Speiser* die Frage auf, ob es zu jeder ganzen transcendenten Funktion $w = f(z)$ *vollständige Punktgruppen* gibt. Unter einer Punktgruppe wird hierbei die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung $f(z) = w_0$ verstanden. Für alle diese Lösungen z denke ich mir die Funktionselemente der inversen Funktion gebildet, insofern sie existieren; diese haben alle den Mittelpunkt w_0. Ferner bilde ich die Sterne S über w_0. Unter dem Stern eines regulären Punktes der Riemannschen Fläche ist dabei die Gesamtheit der Geradenstücke verstanden, die man von diesem aus nach allen Richtungen bis zum Zusammentreffen mit einem singulären Punkte ziehen kann. Läßt sich nun durch Zusammenheften der Sterne S die ganze Riemannsche Fläche erhalten, so nennt Herr Speiser die Punktgruppe *vollständig*. Ich möchte hier mit Hilfe eines Groß'schen Gedankenganges [2]) beweisen, daß tatsächlich jede meromorphe Funktion unendlich viele vollständige Punktgruppen besitzt. Die Fragestellung muß dazu allerdings noch präzisiert werden.

$w = F(z)$ sei die vorgelegte im endlichen durchwegs meromorphe Funktion. $\mathfrak{R}(z_n)$ sei die abzählbare Menge aller Punkte $z_1, z_2, \ldots$ der z-Ebene, deren Koordinaten rational sind und für welche die Ableitung $F'(z)$ weder Null noch unendlich ist. Zu jedem z_n gehört demnach ein reguläres Funktionselement der Funktion $F(z)$. Ich bilde nun die dazu inversen Elemente $E_n(w)$, welche ebenfalls regulär sind. Offenbar kann man nun jedes beliebige reguläre Element $E(w)$ der zu $w = F(z)$ inversen Funktion $z = \varphi(w)$ durch direkte Fortsetzung aus einem geeignet gewählten $E_n(w)$ erhalten. Es sei nämlich $\mathfrak{P}(z)$ das zu $E(w)$ inverse (reguläre) Element. Innerhalb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(z)$

---

1) Vorliegende Zeitschrift Vol. 1, pag. 289.

2) *W. Groß:* Ueber die Singularitäten analytischer Funktionen. Monatshefte für Mathematik und Physik, 29. Jahrgang, pag. 10.

läßt sich ein zu diesem konzentrischer Kreis schlagen, der keine Nullstellen der Ableitung $F'(z)$ enthält und innerhalb dem noch unendlich viele Punkte der Menge $\mathfrak{R}(z_n)$ liegen. Sei ferner r der Konvergenzradius von $E(w)$. Dann wähle ich einen Punkt z_ν der Menge $\mathfrak{R}$ so, daß $|F(z_\nu) - F(z)| < r$ ist. $w_\nu = F(z_\nu)$ liegt also im Innern des Konvergenzkreises von $E(w)$. $E_\nu(w)$ ist das gesuchte Element, aus welchem $E(w)$ durch direkte Fortsetzung erhalten werden kann.

Im folgenden wenden wir den Sternsatz von W. Groß an, der aussagt, daß die Menge der Ausnahmsstrahlen eines Sternes der Umkehrfunktion einer im endlichen meromorphen Funktion, d. h. der Strahlen, welche in einem endlichen singulären Punkte enden, das Maß Null besitzt. Unter dem Maß der Strahlenmenge ist dabei das lineare Maß der Punktmenge zu verstehen, welche durch die Schnittpunkte der Ausnahmsgeraden mit dem Einheitskreis um den Sternmittelpunkt gebildet wird. Ich betrachte nun die abzählbar vielen, den Elementen $E_n(w)$ zugeordneten Sterne S_n. Zu jedem Stern S_n kann ich die Punktmenge konstruieren, die von allen Ausnahmsgeraden des Sternes, d. h. Geraden, welche einen Ausnahmsstrahl enthalten, gebildet wird und deren Flächenmaß $\mathfrak{F}$ Null ist. Um letzteres einzusehen, ziehe ich um den Sternmittelpunkt den Einheitskreis und einen Kreis K vom Radius $r > 1$. Ich überdecke die Menge Q der Schnittpunkte der Ausnahmsstrahlen mit dem Einheitskreis in bekannter Weise mit endlichen Bogenintervallen b. Die Summe der Flächeninhalte der Kreissektoren von K, welche zu den Bogen b gehören, wird

$$\sum_b b \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \cdot \sum_b b.$$

Indem man zur Grenze $b \to 0$ übergeht, erhält man als Flächenmaß $\mathfrak{F}_r$ der Punktmenge, bestehend aus den Ausnahmsstrecken innerhalb K:

$$\mathfrak{F}_r = \frac{r^2}{2} \lim \sum_b b = \frac{r^2}{2} m(Q).$$

Nach dem Sternsatz ist nun $m(q) = 0$, also $\mathfrak{F}_r = 0$. Dies gilt für jedes noch so große r, also auch $\mathfrak{F} = 0$.

Nun projiziere man jede Ausnahmsgerade der sämtlichen Sterne S_n auf die w-Ebene. Da die Anzahl der Sterne S_n abzählbar ist, hat die von den Projektionen gebildete Punktmenge als abzählbare Menge von

Nullmengen wieder das Flächenmaß Null. Fast alle Punkte der w-Ebene werden also von den Ausnahmsgeraden gemieden. Wir haben mit anderen Worten das Ergebnis: *Ueber fast allen Punkten der w-Ebene liegen keine singulären Punkte der zur Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ gehörigen Riemannschen Fläche.*

Aber es ist durchaus möglich, wie das bekannte Groß'sche Beispiel zeigt, daß jeder Punkt der w-Ebene Häufungspunkt von Projektionen singulärer Flächenpunkte sein kann.

w_0 sei ein Punkt der w-Ebene, der von keiner Ausnahmsgeraden getroffen wird. Die über w_0 liegenden regulären Flächenpunkte seien mit $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots$ bezeichnet; die zugehörigen Sterne mit $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots$. Nach Konstruktion gelange ich nun längs geeigneter Strahlen von den $S^{(n)}$ in den Mittelpunkt jedes Elementes E_n, oder ich kann auch sagen: in jede beliebig kleine Umgebung eines willkürlich gegebenen Flächenpunktes. Durch Zusammenheften der Sterne $S^{(n)}$ erhält man somit in diesem präzisierten Sinne die ganze Fläche. Also:

Die Lösungssysteme fast aller Gleichungen $F(z) = w_0$ bilden vollständige Punktgruppen.

Es fragt sich natürlich sofort weiter, ob nur eine solche „topologische" übersichtliche Ueberdeckung der Riemannschen Fläche möglich ist oder ob sie zu einer „funktionentheoretischen" Ueberdeckung gesteigert werden kann, d. h. ob sogar geradlinige analytische Fortsetzung von den zu einer vollständigen Punktgruppe gehörigen inversen Elemente $E^{(n)}(w)$, welche zu allen Elementen $E_n(w)$ führt, möglich ist. Wir wollen zeigen, daß dies wirklich der Fall ist. Der Konvergenzradius der $E^{(n)}(w)$ kann natürlich mit wachsender Blatt-Nummer nach Null streben. Unsere Aussage, daß alle Flächenpunkte $P^{(n)}$ regulär seien, will nur heißen, daß in jedem *angebbaren* Blatte der Konvergenzradius des Elementes $E^{(n)}(w)$ endlich ist. Es sei ein beliebiges Element $E_n(w)$ vorgelegt. Von dessen Mittelpunkt M, der über w' liege, denke ich mir den Strahl s in Richtung w_0 gezogen, er möge zum Punkt $P^{(k)}$ führen, dessen zugehöriges Element $E^{(k)}(w)$ ist. Dem Streckenstück $P^{(k)}M$ des Strahles s entspricht in der z-Ebene ein analytisches Kurvenstück C zwischen dem Bildpunkt $z^{(k)}$ von $P^{(k)}$ und z_n. Da s als regulärer Strahl weder einen Verzweigungspunkt endlicher noch einen unendlicher Ordnung überstreicht und w' nach Annahme ein endlicher Punkt ist, liegt C vollständig im Endlichen und trifft weder einen Pol noch eine Nullstelle der Ableitung $F'(z)$. $F(z)$ läßt sich demnach von z_n aus *bis und mit* $z^{(k)}$ längs C fortsetzen.

Das heißt aber für die inverse Funktion, wenn man die erwähnten Eigenschaften von C berücksichtigt, daß $E^{(k)}(w)$ sich längs s *bis und mit* $E_n(w)$ fortsetzen läßt. Da jedes reguläre Element der Funktion $z = \varphi(w)$ durch direkte Fortsetzung aus einem $E_n(w)$ erhalten werden kann, folgt also das Resultat:

Durch geeignete geradlinige Fortsetzung der zu einer vollständigen Punktgruppe gehörenden Elemente $E^{(n)}$ *und einer eventuell nachfolgenden einmaligen direkten Fortsetzung des erhaltenen Elementes erhält man jedes reguläre Element der Umkehrfunktion.*

(Eingegangen den 20. Mai 1931)