Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Suites récurrentes de cercles et de sphères.
Autor: Kollros, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5611

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Suites récurrentes de cercles et de sphères

Par L. KOLLROS, Zurich

Steiner a énoncé (Oeuvres complètes, tome I, p. 160, 225, 456) les théorèmes suivants, dont on n'a trouvé aucune démonstration dans ses manuscrits:

I. On donne un plan P et une sphère s de rayon r, dont le centre est à la distance h du plan. Soit s_1 une deuxième sphère quelconque tangente à la première et au plan P. On construit une suite de sphères: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tangentes aux deux sphères s, s_1 et au plan P et dont chacune touche la précédente extérieurement, la première x_1 est arbitraire. Il est possible que la suite se ferme, que la n^{me} sphère x_n soit tangente à la première x_1; cette circonstance ne dépend que du rapport $h:r$, mais pas de la position des sphères s_1 et x_1. La condition est $h = 5r$, si $n = 3$; $h = 3r$, si $n = 4$; $h = r$, si $n = 6$.

II. Soient S, s deux sphères non concentriques, que, pour fixer les idées, nous supposons d'abord intérieures l'une à l'autre; s_1 une troisième sphère quelconque tangente à S et s. On considère une suite de sphères $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dont la première est simplement assujettie à toucher à la fois les trois sphères S, s, s_1; chacune des autres x_i devra toucher S, s, s_1 et la sphère x_{i-1} qui la précède dans la suite. Alors, de deux choses l'une: ou bien la suite de ces sphères x se prolonge indéfiniment (suite incommensurable), ou bien, après u révolutions autour de la sphère s_1, on rencontre une dernière sphère x_n touchant la première x_1 (suite commensurable); il s'agit de prouver:

1) que ces circonstances ne dépendent pas des positions arbitraires de s_1 et x_1, mais uniquement des rayons R, r des deux sphères données S, s et de la distance d de leurs centres;

2) qu'on aura, pour les suites commensurables, la relation:

$$(R \pm r)^2 \mp 16Rr \,.\, \sin^2 \frac{u\pi}{n} = d^2,$$

les signes inférieurs répondant au cas où les sphères données S, s sont extérieures l'une à l'autre.

III. Etant donnés dans le plan deux cercles fixes C et c (c intérieur à C), on trace un premier cercle quelconque x_1 tangent à C et c;

un deuxième cercle x_2 tangent à x_1, C et c; un troisième cercle x_3 tangent à x_2, C et c, etc... Si le système de ces cercles se ferme une fois par un cercle x_n tangent à x_{n-1} et x_1, il se fermera toujours et par le même nombre de cercles, quel que soit le cercle initial x_1; il existe alors entre les rayons R et r des deux cercles fixes et la distance d de leurs centres, la relation:

$$(R-r)^2 - 4Rr \,.\, \mathrm{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = d^2$$

où u indique le nombre de révolutions autour du cercle c. Si les cercles C et c sont extérieurs, les deux signes — de la relation doivent être remplacés par $+$ (on change le signe de l'un des rayons).

Pour des cercles tracés sur une sphère, la suite des cercles x est commensurable si l'on a la relation:

$$\cos(R \mp r) \pm 2 \sin R \sin r \,\mathrm{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = \cos d.$$

Des démonstrations de ces théorèmes ont été trouvées par *Clausen* (Crelle, tomes 6, 7 et 11); Ostwalds Klassiker, Nr. 123, p. 112 à 123, et par *Bützberger* (Ueber bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen: Teubner 1914; p. 33 à 48).

Mais on peut arriver aux résultats de Steiner beaucoup plus simplement.

Soient O et o les centres des deux cercles C et c du théorème III, E un de leurs points communs, réels ou imaginaires, $\varphi = OEo$ l'angle des deux cercles; on aura: $d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$;

$$\cos \varphi = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

est un invariant I de l'inversion (qui conserve les angles et les cercles).

Or, deux cercles non sécants C et c peuvent toujours se transformer en deux cercles concentriques par une inversion; il suffit de prendre comme centre d'inversion un des deux points A, B: cercles de rayon nul du faisceau (C, c); tous les cercles de ce faisceau sont coupés orthogonalement par les cercles passant par A et B; et comme ces derniers cercles se transforment en un faisceau de droites, les premiers cercles (C, c) se transforment en cercles concentriques. Soient R' et r' leurs rayons. La condition de commensurabilité de la série des cercles x' tangents à deux cercles concentriques est:

$$\frac{R' - r'}{R' + r'} = \sin \frac{u\pi}{n};$$

l'invariant I est maintenant $(d = O)$:

$$\frac{R'^2 + r'^2}{2R'r'} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} + 1.$$

Il a la même valeur pour les deux cercles non concentriques C et c; donc:

$$\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} + 1 \quad \text{ou} \quad \underline{(R-r)^2 - 4Rr \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = d^2.}$$

Sur la sphère, on a: $\cos d = \cos R \cos r + \sin R \sin r \cos \varphi$; l'invariant $\cos \varphi = \dfrac{\cos d - \cos R \cos r}{\sin R \sin r}$ est encore égal à $2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{u\pi}{n} + 1$; les cercles, les angles, les nombres u et n sont conservés par une projection stéréographique. On a donc sur la sphère (ou en géométrie de Riemann), la condition de commensurabilité de la suite des cercles x_i:

$$\underline{\cos (R-r) + 2 \sin R \sin r \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = \cos d.}$$

On aurait une relation analogue en géométrie hyperbolique:

$$ch\,(R-r) - 2\, shR\; shr \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = chd.$$

[Je dois à M. Weyl la remarque suivante:
Si $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : 1 : x^2 + y^2$ sont les coordonnées homogènes d'un cercle dans le plan euclidien, coordonnées liées par la relation $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 x_4 = 0$, l'équation du cercle sera:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Soit $A(a) = a_1^2 + a_2^2 - 4 a_3 a_4$ la forme adjointe de Q,
$A(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - 2(a_3 b_4 + a_4 b_3)$ la forme polaire correspondante, l'invariant I de deux cercles $C(a)$ et $c(b)$ est: $\dfrac{A(a, b)}{\sqrt{A(a) \,.\, A(b)}}$. Prenons le centre O du cercle C comme origine d'un système de coordonnées

rectangulaires et le centre o du cercle c sur l'axe Ox, les coordonnées homogènes des deux cercles seront $(o, o, -R^2, 1)$ et $(-2d, o, d^2 - r^2, 1)$; on a alors:

$$A(a) = 4R^2; \quad A(b) = 4r^2; \quad A(a, b) = 2(R^2 + r^2 - d^2);$$

l'invariant I est égal à $\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}]$.

Pour démontrer le théorème II, on transforme aussi les deux sphères données S et s par une inversion en sphères S' et s' de même centre O et de rayons R' et r'. Soient s_1' une troisième sphère (de centre M) tangente à S' et s', et x_1' la première sphère (de centre N) de la suite récurrente. Les rayons des sphères s_1' et x_1' sont égaux à $\frac{R' - r'}{2}$. Les centres de toutes les sphères x_i' sont sur un cercle de rayon $\varrho = ON \sin 2\alpha$, où α est l'angle MOT et T le point de contact des sphères s_1' et x_1; or $\sin\alpha = \frac{MT}{OM} = \frac{R' - r'}{R' + r'}$; $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{R'r'}(R' - r')}{(R' + r')^2}$ et $ON = \frac{R' + r'}{2}$; donc

$$\varrho = \frac{2\sqrt{R'r'}(R' - r')}{R' + r'}.$$

La condition de commensurabilité de la suite $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ est:

$\sin\frac{u\pi}{n} = \frac{R' - r'}{2\varrho} = \frac{R' + r'}{4\sqrt{R'r'}}$; il en résulte que l'invariant I ou

$$\frac{R'^2 + r'^2}{2R'r'} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1.$$

Il a encore la même valeur pour les deux sphères non concentriques S et s, de rayons R et r; on a donc:

$$\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} = 8\sin^2\frac{u\pi}{n} - 1,$$

d'où la condition de Steiner:

$$\underline{(R + r)^2 - 16\,Rr\sin^2\frac{u\pi}{n} = d^2.}$$

Pour $u = 1$, $n = 3$ et 4, on trouve des théorèmes énoncés spécialement par Steiner (Oeuvres, t. I, p. 160, th. 7 et 8).

Le théorème I est le cas particulier de II où $R = \infty$. Ecrivons $R = d + h$; l'invariant:

$$\frac{2dh + h^2 + r^2}{2dr + 2hr} \text{ devient, pour } d = \infty, \text{ égal à } \frac{h}{r}.$$

On a donc $\frac{h}{r} = 8 \sin^2 \frac{u\pi}{n} - 1$.

Pour $u = 1$, et $n = 3$, 4 ou 6, on trouve les résultats de Steiner: $\frac{h}{r} = 5$, 3 ou 1.

(Reçu le 25 janvier 1932)