Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1933)

Artikel: Geometrische Deutung des Gauß'schen Verschlingungsintegrals.
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6652

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Geometrische Deutung des Gauß'schen Verschlingungsintegrals

Von W. SCHERRER, Bern

Sind $x_1(u)$, $x_2(u)$, $x_3(u)$ und $y_1(v)$, $y_2(v)$, $y_3(v)$ die Parameterdarstellungen zweier geschlossener Raumkurven C und D, so stellt bekanntlich das von Gauß eingeführte Integral

$$\int_C\int_D \frac{(y_1-x_1)(dx_2\,dy_3-dx_3\,dy_2)+(y_2-x_2)(dx_3\,dy_1-dx_1\,dy_3)+(y_3-x_3)(dx_1\,dy_2-dx_2\,dy_1)}{[(y_1-x_1)+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

eine Invariante gegenüber stetigen Transformationen von C und D dar, deren Nichtverschwinden mit Sicherheit auf das Vorhandensein einer Verschlingung schließen läßt, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Dieses Integral läßt sich in einfacher Weise als Raumwinkel einer Fläche in bezug auf einen Punkt deuten. Um die Verhältnisse bequemer zu beschreiben, bediene ich mich der Vektorsymbolik und setze

$$\mathfrak{x}(u) = (x_1(u),\ x_2(u),\ x_3(u))$$
$$\mathfrak{y}(v) = (y_1(v),\ y_2(v),\ y_3(v))\ .$$

Das Integral läßt sich jetzt auch schreiben in der Form:

$$\int_C\int_D \frac{[\mathfrak{y}(v)-\mathfrak{x}(u)]\cdot[\mathfrak{x}'(u),\ \mathfrak{y}'(v)]}{\{(\mathfrak{y}(v)-\mathfrak{x}(v))\}^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv.$$

Diesem Integral stelle ich nun gegenüber den Raumwinkel Ω einer beliebigen Fläche in bezug auf den Koordinatenursprung. Bedeutet $\mathfrak{x}(u, v)$ den vom Ursprung aus zum laufenden Punkt auf der Fläche führenden Ortsvektor als Funktion der Flächenparameter u und v, so ist der gesuchte Raumwinkel Ω gegeben durch die Gleichung:

$$\Omega = \int_F\int \frac{\mathfrak{x}(u, v)\,[\mathfrak{x}_u(u, v),\ \mathfrak{x}_v(u, v)]}{\{(\mathfrak{x}(u, v))^2\}^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv.$$

Setze ich in diesen Ausdruck für $\mathfrak{x}(u, v)$ den Wert $\mathfrak{y}(v) - \mathfrak{x}(u)$ ein, so erhalte ich abgesehen von einem festen und an sich willkürlichen Vorzeichen genau das Gauß'sche Verschlingungsintegral.

Wir haben uns nur noch Rechenschaft zu geben über die Bedeutung der durch

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(v) - \mathfrak{x}(u)$$

dargestellten Fläche. Offenbar kann sie aufgefaßt werden als Schiebefläche:

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(v) + (-\mathfrak{x}(u)).$$

Sie entsteht also folgendermaßen: Man spiegle die durch die Gleichung $\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}(u)$ definierte Kurve C am Koordinatenursprung O. Man erhält so die der Gleichung $\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}(u)$ entsprechende Kurve $\overline{C}$. Nun verschiebe man diese Kurve parallel mit sich selbst und starr verbunden mit dem zu Beginn der Bewegung loszulösenden Nullpunkt soweit, bis der mitgeführte Nullpunkt $\overline{O}$ auf die Kurve D zu liegen kommt. Schließlich führe man den Punkt $\overline{O}$ der Kurve D entlang und nehme dabei die Kurve $\overline{C}$ starr in bezug auf $\overline{O}$ und parallel zu sich selbst mit. Diese Schiebefläche bildet gewissermaßen einen die Kurve D begleitenden Schlauch. Willkürlich bei dieser Konstruktion sind die Lage des Ursprungs und die Reihenfolge der Kurven.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn eine der Kurven ein Zentrum hat, welches man dann als Nullpunkt wählt. Man betrachte etwa einen horizontalen Kreis C und einen zweiten D, der durch das Zentrum von C geht und senkrecht zur Ebene von C steht.

Daß der Wert des Gauß'schen Integrals ein Vielfaches von 4π ist, erkennt man nun ohne weiteres, ebenso die Invarianz gegenüber stetigen Transformationen.

Auch die in dem Enzyklopädieartikel von *Dehn* und *Heegaard* über Analysis situs angedeutete Verallgemeinerung von *Dyck* ergibt sich auf diesem Wege unmittelbar. Sind nämlich.

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2, \ldots u_p) = (x_1(u_1, \ldots u_p), \ldots\ldots x_n(u_1, \ldots u_p))$$

$$\mathfrak{y}(v_1, v_2, \ldots v_q) = (y_1(v_1, \ldots v_q), \ldots\ldots y_n(v_1, v_2, \ldots v_q))$$

die Parameterdarstellungen zweier Mannigfaltigkeiten C und D im R_n mit den Dimensionszahlen p und q, die der Bedingung $p + q = n - 1$ genügen, so bilde man die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 - x_1, & y_2 - x_2, & \ldots\ldots\ldots, & y_n - x_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_p}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_p}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial u_p} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial v_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial v_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_q}, & \frac{\partial y_2}{\partial v_q}, & \ldots\ldots\ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial v_q} \end{vmatrix}$$

und die Distanz

$$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots = (y_n - x_n)^2}.$$

Auf das Integral

$$\iint\limits_{C\,D} \frac{\Delta}{r^n}\, du_1\, du_2 \ldots\ldots du_p \cdot dv_1\, dv_2 \ldots\ldots dv_q$$

läßt sich dann alles oben Gesagte übertragen.

(Eingegangen den 7. März 1932)