**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 9 (1936-1937)

**Artikel:** Ein Analogon zu einem Nagellschen Satze über kubische diophantische Gleichungen.

**Autor:** Lind, Carl-Erik

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-10176

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Ein Analogon zu einem Nagellschen Satze über kubische diophantische Gleichungen

Von Carl-Erik Lind, Uppsala

In einer soeben erschienenen Arbeit in dieser Zeitschrift hat *T. Nagell* den folgenden Satz bewiesen[1]):

*Es sei $\Omega$ ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei $B$ eine Zahl in $\Omega$, die weder die Form $27\alpha^6$ noch die Form $-16\alpha^6$ hat, wo $\alpha$ eine Zahl in $\Omega$ bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung*

$$x^3 - B = y^2 \tag{1}$$

*in nicht verschwindenden Zahlen $x$ und $y$ aus $\Omega$ unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu $\Omega$.*

Die Gleichung (1) entspricht dem sogenannten *äquianharmonischen* Fall in der Theorie der elliptischen Funktionen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß auch für den *harmonischen* Fall ein analoger Satz gilt.

Zuerst wollen wir den folgenden Satz beweisen:

***Satz 1.*** *Es sei $\Omega$ ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei $A$ eine Zahl in $\Omega$, die nicht die Form $-4\alpha^4$ hat, wo $\alpha$ eine Zahl in $\Omega$ ist. Es sei ferner die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2 \tag{2}$$

*in nicht verschwindenden Zahlen $x$ und $y$ aus $\Omega$ lösbar. Dann ist auch die Gleichung*

$$u^3 + 4Au = v^2 \tag{3}$$

*in nicht verschwindenden Zahlen $u$ und $v$ aus $\Omega$ lösbar.*

Ist nämlich $(x, y)$ eine Lösung der Gleichung (2), so erhält man eine Lösung $(u, v)$ der Gleichung (3) mittels der Gleichungen

[1]) *T. Nagell:* Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1936), S. 31.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x^2 - A}{x}, \\ v &= \frac{y(x^2 + A)}{x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hier sind $u$ und $v$ von Null verschieden. Denn aus $u = 0$ folgt $x^2 - A = 0$ und also $y = 0$ gegen die Annahme. Aus $v = 0$ ergibt sich wegen $y \neq 0$ $A = -x^2$. Aus (2) folgt dann $-2Ax = y^2$ oder $4A^2x^2 = y^4$ und folglich

$$A = \frac{y^4}{4Ax^2} = -4\left(\frac{y}{2x}\right)^4.$$

Der Voraussetzung zufolge hat aber $A$ nicht diese Form.

Für $A = -4$ besitzt die Gleichung (2) die Lösung $(2, 4)$, während die Gleichung (3) im Körper der rationalen Zahlen keine Lösung in nicht verschwindenden Zahlen hat[2]).

Wird die Transformation (4) auf die Gleichung (3) angewandt, und setzt man

$$x_1 = \frac{u^2 + 4A}{4u},$$

$$y_1 = \frac{v(u^2 - 4A)}{8u^2},$$

so ist $(x_1, y_1)$ eine neue Lösung der Gleichung (2). Es ist ferner $x_1 y_1 \neq 0$, wenn $A$ nicht die Form $\alpha^4$ hat, wo $\alpha$ eine Zahl in $\Omega$ ist.

Der zu dem *Nagell*schen Satze analoge Satz lautet nun:

**Satz 2.** *Es sei $\Omega$ ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei $A$ eine Zahl in $\Omega$, die nicht die Form $\alpha^4$ hat, wo $\alpha$ eine Zahl in $\Omega$ bedeutet. Ist dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2$$

*in nicht verschwindenden Zahlen $x$ und $y$ aus $\Omega$ unlösbar, so ist sie es auch nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zu $\Omega$.*

---

[2]) Siehe z. B. *A. Hurwitz:* Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 62 (1917), S. 220.

Der Satz gilt nicht für $A = \alpha^4$, denn die Gleichung

$$x^3 - x = y^2$$

hat im Körper der rationalen Zahlen $R(1)$ keine Lösung in nicht verschwindenden Zahlen; in $R(\sqrt{-1})$ hat sie aber die Lösungen $x = \pm\sqrt{-1}$, $y = 1 \mp \sqrt{-1}$.

*Beweis:* Nach der Voraussetzung hat die Gleichung (2) keine Lösung in $\Omega$, abgesehen von Lösungen mit $xy = 0$. Wir nehmen jetzt an, daß sie in dem durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$ entstandenen Körper $\Omega(\sqrt{-1})$ in nicht verschwindenden Zahlen $x$ und $y$ lösbar ist.

Erster Fall: Die Zahl $y$ gehört zu $\Omega$, die Zahl $x$ aber nicht. Es sei $x = a + b\sqrt{-1}$, wo $a$ und $b$ Zahlen aus $\Omega$ sind, $b \neq 0$. Dann ist

$$a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} - aA - bA\sqrt{-1} = y^2$$

und folglich

$$3a^2b - b^3 - bA = 0 \quad \text{und} \quad a^3 - 3ab^2 - aA = y^2 .$$

Hieraus folgt aber $b^2 = 3a^2 - A$, mithin

$$-8a^3 + 2aA = y^2 .$$

Hier ist $a \neq 0$, denn aus $a = 0$ folgt $y = 0$. Dann hätte aber die Gleichung (2) die Lösung $(-2a, y)$ in $\Omega$, mit $ay \neq 0$, was gegen die Annahme ist.

Zweiter Fall: Die Zahl $x$ gehört zu $\Omega$, die Zahl $y$ aber nicht. Es sei $y = a + b\sqrt{-1}$, wo $a$ und $b$ Zahlen aus $\Omega$ sind, $b \neq 0$. Dann ist

$$x^3 - Ax = a^2 + 2ab\sqrt{-1} - b^2 .$$

Hier ist offenbar $a = 0$ und folglich

$$x^3 - Ax = -b^2 .$$

Dann ergibt sich aber, daß die Gleichung (2) gegen die Annahme die Lösung $(-x, b)$ in $\Omega$ hat, mit $xb \neq 0$.

Dritter Fall: Weder $x$ noch $y$ gehören zu $\Omega$. Dann können wir setzen

$y = ax + b$, wo $a$ und $b$ Zahlen aus $\Omega$ sind, $a \neq 0$. Die Zahl $x$ ist somit Wurzel der Gleichung in $z$

$$z^3 - (az + b)^2 - Az = 0 \ . \tag{5}$$

Da $x$ vom Relativgrade 2 in bezug auf $\Omega$ ist, so muß die Gleichung (5) eine Wurzel $z$ haben, die zu $\Omega$ gehört. Dann hat aber die Gleichung (2) die Lösung $(z, az + b)$ in $\Omega$. Wegen der Voraussetzung ist dann entweder $z = 0$ oder $az + b = 0$.

Im Falle $z = 0$ wird $b = 0$ und $x$ ist Wurzel der Gleichung

$$x^2 - a^2 x - A = 0 \ ,$$

woraus

$$x = \frac{1}{2} a^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^4 + 4A} \ .$$

Es besteht somit eine Relation

$$a^4 + 4A = -d^2 \ ,$$

wo $d$ eine von Null verschiedene Zahl in $\Omega$ ist.

Setzen wir hier

$$u = -a^2 \ , \quad v = ad \ ,$$

so erfüllen $u$ und $v$ die Gleichung

$$u^3 + 4Au = v^2 \ .$$

Es wäre somit nach Satz 1 auch die Gleichung (2) in nicht verschwindenden Zahlen aus $\Omega$ lösbar, was gegen die Annahme ist. Es war ja vorausgesetzt, daß $A \neq \alpha^4$.

Im Falle $az + b = 0, z \neq 0$, setzen wir $z = -\frac{b}{a} = c$, wo $c$ eine Zahl in $\Omega$ ist. Offenbar ist dann $A = c^2$ und die Gleichung für $x$ wird

$$x^2 - (a^2 - c)\, x + a^2 c = 0$$

oder

$$x = \frac{1}{2}(a^2 - c) \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^4 - 6a^2 c + c^2} \ .$$

Es besteht somit eine Relation

$$a^4 - 6a^2c + c^2 = -d^2,$$

wo $d$ eine von Null verschiedene Zahl in $\Omega$ ist. Setzen wir nun hier

$$x_1 = -\left(\frac{a^2 - c}{2a}\right)^2,$$

$$y_1 = \frac{d(a^4 - c^2)}{8a^3},$$

so ergibt sich wegen $A = c^2$

$$x_1^3 - Ax_1 = y_1^2.$$

Wegen der Voraussetzung über die Gleichung (2) muß dann entweder $x_1$ oder $y_1$ Null sein. Aus $x_1 = 0$ oder $y_1 = 0$ folgt aber

$$A = c^2 = a^4$$

gegen die Annahme. Die Gleichung (2) ist somit in $\Omega(\sqrt{-1})$ unlösbar in nicht verschwindenden Zahlen und der Satz 2 ist bewiesen.

(Eingegangen den 18. November 1936.)