Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen.

Autor: Billing, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10177

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen

Von G. Billing, Uppsala

In einer vor kurzem publizierten Note in dieser Zeitschrift bewies *T. Nagell* den folgenden Satz[1]):

1. Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω, die weder die Form $27\,\alpha^6$ noch die Form $-16\,\alpha^6$ hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - B = y^2 \tag{1}$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω.

2. Wenn Ω die Zahl $\cos\frac{2\pi}{9}$ nicht enthält, gilt ferner: Es sei die Gleichung (1) für $B = 2^4 \cdot 3^3$ in Zahlen aus Ω unlösbar abgesehen von den Lösungen $x = 12$, $y = \pm 36$. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$, abgesehen von den Lösungen $x^3 = 12^3$, $y = \pm 36$ und $x = 0$, $y = \pm 12\sqrt{-3}$.

Dieser Satz war als eine Verallgemeinerung des folgenden *Fueter*'schen Satzes entstanden[2]):

Wenn die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 = 1$$

in einem der beiden Zahlkörper $R(\sqrt{m})$ und $R(\sqrt{-3m})$ in nicht verschwindenden Zahlen ξ und η lösbar ist, dann ist sie auch in dem anderen lösbar.

Dies entspricht dem Nagell'schen Satze für $B = 2^4 \cdot 3^3$ und $\Omega = R(\sqrt{m})$.

C. E. Lind bewies neulich das folgende Analogon zu dem Nagell'schen Resultate[3]):

[1]) *T. Nagell*, Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1936), S. 31.

[2]) *R. Fueter*, Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie d. Wiss. Math.-Naturwiss. Klasse. Jahrg. 1913, 25 Abh.

[3]) *C. E. Lind*, Ein Analogon zu einem Nagell'schen Satze über kubische diophantische Gleichungen, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1937), S. 156.

Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω, die nicht die Form α^4 hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax = y^2$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zu Ω.

Das Ziel dieser Note ist, zu zeigen, wie man die Resultate von Nagell und Lind noch weiter verallgemeinern kann.

Zunächst eine Bemerkung über die allgemeine diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax - B = y^2, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten A und B zu einem beliebig gegebenen Rationalitätsbereich Ω gehören, und wo $4A^3 - 27B^2 \neq 0$ ist. Für die Kurve (2) haben wir die elliptische Parameterdarstellung

$$x = \wp(u)\,, \quad y = \tfrac{1}{2}\wp'(u)\,.$$

Wir nehmen nun an, daß die diophantische Gleichung (2) nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω besitzt. Dann ist bekanntlich für jede solche Lösung das Argument u mit einer Periode der elliptischen Funktion $\wp(u)$ kommensurabel[4]).

Für den Spezialfall $A = O$ wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω. Hat dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - B = y^2 \tag{3}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω, so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$.

Beweis: Es sei x, y eine Lösung im Körper $\Omega(\sqrt{-3})$ aber nicht im Körper Ω der Gleichung (3). Dann ist auch x', y' eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$, wenn x' zu x und y' zu y in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert sind. Die Argumente dieser beiden Punkte auf der Kurve (3) seien u und u'. Dann folgt aus den Additionsformeln der Funktionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, daß das Argument $u + u'$ einer Lösung der Gleichung (3) in Ω entspricht.

[4]) Siehe z. B. *A. Hurwitz*, Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellschaft in Zürich, Bd. 62, 1917.

Wir nehmen jetzt an, daß die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele relativkonjugierte Lösungspaare x, y und x', y' in $\Omega(\sqrt{-3})$ mit den entsprechenden Argumenten u und u'. Weil die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, muß dann $u+u'$ mit einer Periode kommensurabel sein, oder

$$u+u' \equiv \frac{w}{n} \pmod{\omega, \omega_1},$$

wo ω, ω_1 ein primitives Periodenpaar von $\wp(u)$ ist, w irgendeine Periode und n eine natürliche Zahl. $\frac{w}{n}$ ist das Argument einer gewissen Lösung von (3) in Ω.

Dann muß aber für wenigstens einen dieser Werte $\frac{w}{n}$, z. B. $\frac{w_1}{n_1}$, gelten, daß die Kongruenz

$$u_i + u_i' \equiv \frac{w_1}{n_1} \pmod{\omega, \omega_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

für unendlich viele inkongruente Argumentenpaare u_i und u_i' erfüllt ist, die relativkonjugierten Lösungen in $\Omega(\sqrt{-3})$ entsprechen.

Man bilde jetzt die unendliche Reihe von Argumentenpaaren:

$$\left.\begin{aligned} v_i &= u_1 - u_i \\ v_i' &= u_1' - u_i' \end{aligned}\right\} \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

Ein jedes dieser Argumente gibt eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$ (nach den Additionsformeln), und v_i und v_i' geben konjugierte Lösungen. Alle v_i sind inkongruent (modd ω, ω_1), wie die u_i. Dasselbe gilt von den v_i'. Eventuell könnte gelten: $v_i \equiv v_j'$ und $v_j \equiv v_i'$. Die Anzahl inkongruenter Argumentenpaare v_i, v_i' wird aber jedenfalls unendlich. Es ist aber

$$v_i + v_i' \equiv 0 \pmod{\omega, \omega_1}.$$

Also ist

$$\wp(v_i) = \wp(-v_i') = \wp(v_i'),$$

und

$$\wp'(v_i) = \wp'(-v_i') = -\wp'(v_i').$$

Nun sind aber $\wp(v_i)$ zu $\wp(v_i')$ und $\wp'(v_i)$ zu $\wp'(v_i')$ in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert, und es folgt

$$\begin{aligned} \wp(v_i) &= \wp(v_i') = \alpha_i \\ \wp'(v_i) &= -\wp'(v_i') = 2\beta_i\sqrt{-3} \end{aligned}$$

wo α_i und β_i Zahlen sind, die zu Ω gehören. Diese unendlich vielen Wertepaare α_i, β_i genügen alle der Gleichung

$$-3\,\beta_i^2 = \alpha_i^3 - B\,.$$

Wird jetzt

$$X_i = \frac{\beta_i^2 + B}{\alpha_i^2}\,, \quad Y_i = \frac{\beta_i^3 - 3\,B\,\beta_i}{-\alpha_i^3}$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele verschiedene Wertepaare X_i, Y_i, die zu Ω gehören und der Gleichung

$$X_i^3 - B = Y_i^2$$

genügen. Dies ist aber gegen die Annahme.

Auf ganz analoge Weise wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω. Hat dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - Ax = y^2 \tag{4}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω, so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$.

Beweis: Nehmen wir an, daß die Gleichung (4) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele Lösungen in $\Omega\,(\sqrt{-1})$, so ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie im Beweise von Satz 1 die Existenz von unendlich vielen verschiedenen Wertepaaren α_i, β_i, die zu Ω gehören und der Gleichung

$$\alpha_i^3 - A\,\alpha_i = -\,\beta_i^2$$

genügen. Wird jetzt

$$X_i = -\alpha_i \text{ und } Y_i = \beta_i$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele Lösungen X_i und Y_i in Ω der Gleichung

$$X_i^3 - A\,X_i = Y_i^2\,.$$

Dies ist aber gegen die Annahme.

Mittels der hier angewandten Methode ist es leicht Satz 1 durch den folgenden präziseren Satz zu ersetzen, wenn Ω reell ist:

Satz 3. *Es sei in Satz 1 der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung (3) in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in $\Omega(\sqrt{-3})$, so ist $3nv$ gleich einer Periode.*

Satz 2 kann durch den folgenden präziseren ersetzt werden:

Satz 4. *Es sei in Satz 2 der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung (4) in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in $\Omega(\sqrt{-1})$, so ist $2nv$ gleich einer Periode.*

Diese Sätze und mehrere noch weitergehende Resultate werden in meiner Dissertationsabhandlung bewiesen.

(Eingegangen den 3. Dezember 1936.)