Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über die Cesàroschen und Rieszschen Mittel Fourierscher Reihen.
Autor: Szász, Otto
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11886

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Cesàroschen und Rieszschen Mittel Fourierscher Reihen

Max Dehn zu seinem sechzigsten Geburtstag gewidmet

Von Otto Szász, Cincinnati (Ohio), U. S. A.

§ 1. Es sei $f(x)$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare, modulo 2π periodische Funktion. Ihre Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.1}$$

mit den Partialsummen

$$s_0 \equiv \frac{a_0}{2}\ , \quad s_n(x) \equiv s_n \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\ .$$

Nach einem klassischen Resultat von *Fejér* (1900) ist an jeder Stetigkeitsstelle von $f(x)$ die Reihe (1.1) $(C, 1)$-summierbar gegen $f(x)$, das heißt, es ist

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{(1)} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = f(x)\ .$$

Lebesgue hat bewiesen, daß die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung der Reihe (1)

$$C_n^{(2)} \equiv \frac{(n+1)\, s_0 + n s_1 + \cdots + s_n}{n+1 \quad + n \quad + \cdots + 1}$$

an einer Stelle x gegen s konvergieren, wenn

$$\varphi(x,t) \equiv \frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right\} dt \to 0 \text{ für } t \to 0\ ;$$

dies ist bekanntlich für fast alle x der Fall.

Kürzlich hat nun *Fejér* eine neue, interessante Eigenschaft der Cesàroschen Mittel höherer Ordnung entdeckt, die darin besteht, daß sich die Approximationskurven schon für jedes endliche n der geometrischen Konfiguration der Kurve $y = f(x)$ anpassen. Setzt man

$$s_n^{(1)}(x) = \sum_0^n s_\nu(x)\ , \quad s_n^{(2)}(x) = \sum_0^n s_\nu^{(1)}(x)\ , \quad s_n^{(3)}(x) = \sum_0^n s_\nu^{(2)}(x)\ ,$$

so sind die Cesàroschen Mittel erster, zweiter und dritter Ordnung

$$C_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1}\ , \quad C_n^{(2)} = \frac{2 s_n^{(2)}}{(n+1)\,(n+2)}\ , \quad C_n^{(3)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot s_n^{(3)}}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}\ . \tag{1.2}$$

Ich hebe hier folgendes Resultat von *Fejér* hervor:

Es sei im Intervall $0<x<\pi$ $f(x)>0$ und nach oben konvex; dann sind für die Sinusreihe von $f(x)$ alle Kurven

$$y = C_n^{(3)}(x)\,, \quad n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots,\; 0 < x < \pi\,,$$

oberhalb der x-Achse gelegen, und nach oben konvex [1]). Für die Cesàromittel zweiter Ordnung hingegen gilt dies im allgemeinen nicht mehr. (1, 2, 3, vgl. Literaturnachweis.)

Die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung einer Reihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu$ kann man in der Form schreiben:

$$C_n^{(k)} \equiv \frac{\binom{n+k}{k} u_0 + \binom{n+k-1}{k} u_1 + \cdots + \binom{k}{k} u_n}{\binom{n+k}{k}}\;;$$

eng verwandt damit sind die von *M. Riesz* eingeführten Mittel (R, k) (vgl. 4):

$$R_n^{(k)} \equiv \frac{(n+1)^k u_0 + n^k u_1 + \cdots + 1^k u_n}{(n+1)^k} \equiv \frac{\varrho_n^{(k)}}{(n+1)^k} \tag{1.3}$$

Im folgenden wird sich das überraschende Resultat ergeben, daß der dem vorhin zitierten Fejérschen Satze analoge Satz bei Rieszschen Mitteln schon für $k = 2$ gilt. In der Beweismethode schließe ich mich dem Fejérschen Gedankengange an. In § 2 schicke ich einige Hilfsbetrachtungen voraus. In § 3 wird der Hauptsatz bewiesen; in § 4 wird der Zusammenhang zwischen den $(C, 2)$- und den $(R, 2)$-Mitteln allgemein betrachtet.

§ 2. Mit $F(r)$ bezeichne ich die formal gegebene Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu r^\nu$, nicht notwendig konvergent, sondern als Träger der beliebigen Reihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu$ gedacht. Setzt man

$$\sum_0^n u_\nu = U_n = U_n^{(0)}\,,\; \sum_0^n U_\nu = U_n^{(1)},\; \sum_0^n U_\nu^{(1)} = U_n^{(2)}\,,\; \sum_0^n U_\nu^{(2)} = U_n^{(3)}\,,$$

so ist, im Sinne formaler Cauchyscher Multiplikation

$$\frac{1}{1-r}F(r) = \sum_0^\infty U_\nu r^\nu\,,\; \frac{1}{(1-r)^2}F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(1)} r^\nu\,,\; \frac{1}{(1-r)^3}F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(2)} r^\nu\,,$$

und

$$\frac{1+r}{(1-r)^3}F(r) = u_0 + \sum_1^\infty (U_{\nu-1}^{(2)} + U_\nu^{(2)}) r^\nu\,. \tag{2.1}$$

---

[1]) Also $y'' < 0$.

Andererseits ist

$$\frac{1+r}{(1-r)^3} = \frac{1+r}{2} \sum_0^\infty (\nu+1)(\nu+2) r^\nu = \sum_0^\infty (\nu+1)^2 r^\nu ,$$

und formale Multiplikation mit $F(r)$ ergibt

$$\frac{1+r}{(1-r)^3} F(r) = \sum_0^\infty \varrho_\nu^{(2)} r^\nu . \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt

$$U_{\nu-1}^{(2)} + U_\nu^{(2)} = \varrho_\nu^{(2)} , \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots ,$$

oder, nach (1.2) und (1.3)

$$R_n^{(2)} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} C_{n-1}^{(2)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} C_n^{(2)} \right\} (n+1)^{-2} .$$

Es besteht somit die folgende bemerkenswerte Beziehung zwischen den $(C, 2)$- und $(R, 2)$-Mitteln:

$$\boxed{R_n^{(2)} = \frac{n C_{n-1}^{(2)} + (n+2) C_n^{(2)}}{2(n+1)}} , \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2.3}$$

Ich setze jetzt speziell

$$F(r) = r \sin x \frac{1-r^2}{(1-2r\cos x + r^2)^2} = \sum_0^\infty \nu r^\nu \sin \nu x ;$$

der Formel (2.2) entspricht jetzt

$$\sum_0^\infty \varrho_\nu^{(2)}(x) r^\nu = r \sin x \left\{ \frac{1-r^2}{(1-r)^2 (1-2r\cos x + r^2)} \right\}^2$$

$$= r \sin x \left\{ \sum_0^\infty \left(\frac{\sin (\nu+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 r^\nu \right\}^2 .$$

Daher sind alle $\varrho_\nu^{(2)}(x) \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq \pi$; genauer ist, wenn zur Abkürzung

$$\left(\frac{\sin (\nu+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = k_\nu(x) , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

gesetzt wird,

$$\boxed{\varrho_{n+1}^{(2)}(x) = \sin x \sum_0^n k_\nu(x) k_{n-\nu}(x) > 0 \text{ für } 0 < x < \pi} \tag{2.4}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wir wollen dieses Resultat anwenden, um mit Hilfe eines Fejérschen Gedankenganges zu beweisen, daß auch die $(R, 2)$-Mittel der Reihe

$$\sum_0^\infty \sin \nu a \sin \nu x \quad \text{für} \quad 0 < a < \pi\,, \qquad 0 < x < \pi$$

nicht negativ sind. Wir bezeichnen die $(R, 2)$-Mittel dieser Reihe mit

$$P_n^{(2)}(a, x),\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ;$$

dann ist offenbar

$$P_n^{(2)}(a, x) = P_n^{(2)}(x, a), \quad P_n^{(2)}(\pi - a, \pi - x) = P_n^{(2)}(a, x)\ .$$

Es genügt daher, die Behauptung im Dreieck.

$$0 \leqq a + x \leqq \pi\,, \qquad 0 \leqq a - x \leqq \pi \tag{2.5}$$

zu beweisen. Nun ist auf der Hypothenuse

$$x = 0\,, \quad 0 \leqq a \leqq \pi\ :\ P_n^{(2)}(a, 0) = 0\ ;$$

ferner ist offenbar

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n^{(2)}(a, x) = \frac{1}{2}\left\{ \varrho_n^{(2)}(a + x) + \varrho_n^{(2)}(a - x) \right\},$$

und dies ist nach (2.4) nicht negativ im Dreieck (2.5). Daher ist in diesem Dreieck das trigonometrische Polynom $P_n^{(2)}(a, x)$ monoton wachsend auf jeder vertikalen Geraden (d. h. für festes a). Somit ist in diesem Dreieck $P_n^{(2)}(a, x) > 0$ für $x > 0$. Es gilt daher:

$$\boxed{P_n^{(2)}(a, x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < a < \pi\,, \quad 0 < x < \pi}\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{2.6}$$

§ 3. Um nun zu dem in § 1 angedeuteten Resultat zu gelangen, betrachte ich zunächst die „Dachfunktion“:

$$0 + \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_1^\infty \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu^2} = \begin{cases} \dfrac{b}{a} x & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\[2ex] b\dfrac{\pi - x}{\pi - a} & \text{für } a \leqq x \leqq \pi\ , \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $0 < a < \pi$, $0 < b$.

Bezeichnet man die Partialsummen dieser Reihe mit

$$\tau_0 = 0\,,\ \tau_n(x) = \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_1^n \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu^2}\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

und setzt man

$$\tau_n^{(1)}(x) = \sum_0^n \tau_\nu(x)\,,\ \tau_n^{(2)}(x) = \sum_0^n \tau_\nu^{(1)}(x)\,,$$

so ist nach den Resultaten von § 2

$$P_n^{(2)}(a, x) = -\frac{d^2}{dx^2} \frac{\tau_{n-1}^{(2)}(x) + \tau_n^{(2)}(x)}{(n+1)^2} < 0$$

für $0 < a < \pi$, $0 < x < \pi$. Somit sind die $(R, 2)$-Mittel der Reihe (3.1) nach oben konvex für $0 < x < \pi$.

Nun ist jedes oberhalb der Abszissenachse liegende konvexe Polygon darstellbar als Summe endlich vieler Dachfunktionen; ferner ist jede positive, in $0 < x < \pi$ nach oben konvexe Funktion gleichmäßig approximierbar durch solche Polygone. Hieraus folgt unmittelbar unser zu beweisender

Satz. Ist $f(x) > 0$ in $0 < x < \pi$, und daselbst nach oben konvex, so sind für ihre Fouriersche Sinusreihe die in § 1 definierten $(R, 2)$-Mittel sämtlich nach oben konvex.

Es ist ganz leicht, hieraus den in der Einleitung zitierten Fejérschen Satz herzuleiten.

Mit den Bezeichnungen von § 2 ist

$$\frac{1}{(1-r)^4} F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(3)} r^\nu = \frac{1}{1-r^2} \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3} F(r) =$$

$$= \left(\sum_0^\infty \frac{1 + (-1)^\nu}{2} r^\nu\right) \left(\sum_0^\infty \varrho_\nu^{(2)} r^\nu\right) = \frac{1}{2} \sum_0^\infty (\varrho_n^{(2)} + \varrho_{n-2}^{(2)} + \cdots) r^n\,.$$

Daher ist

$$U_n^{(3)} = \tfrac{1}{2}(\varrho_n^{(2)} + \varrho_{n-2}^{(2)} + \cdots)\,.$$

Da aber unter den Voraussetzungen unseres Satzes die Kurven $y = \varrho_n^{(2)}(x)$ oberhalb der Abszissenachse liegen und nach oben konvex sind für $0 < x < \pi$, so gilt das gleiche für die Kurven $y = U_n^{(3)}(x)$; womit der Fejérsche Satz bewiesen ist.

§ 4. In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, daß für eine Reihe, deren allgemeines Glied nach Null konvergiert, also insbesondere

für jede Fouriersche Reihe, die $(C, 2)$- und $(R, 2)$-Mittel entweder beide konvergieren oder beide divergieren. Es ist nämlich nach (2.3)

$$R_n^{(2)} - C_n^{(2)} = \frac{n}{2(n+1)} (C_{n-1}^{(2)} - C_n^{(2)}) ,$$

und wir brauchen nur zu beweisen, daß

$$C_n^{(2)} - C_{n-1}^{(2)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Nun ist

$$C_n^{(2)} - C_{n-1}^{(2)} = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{U_n^{(2)}}{n+2} - \frac{U_{n-1}^{(2)}}{n} \right\} = \frac{2}{n+1} \frac{n U_n^{(2)} - (n+2) U_{n-1}^{(2)}}{n(n+2)}$$

$$= \frac{2U_n^{(1)}}{(n+1)(n+2)} - \frac{4 U_{n-1}^{(2)}}{n(n+1)(n+2)} ,$$

und aus der Voraussetzung $u_n \to 0$ folgt unmittelbar

$$\frac{U_n}{n} \to 0 , \frac{U_n^{(1)}}{n^2} \to 0 , \frac{U_n^{(2)}}{n^3} \to 0 \text{ für } n \to \infty ,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Während noch im allgemeinen aus $C_n^{(2)} \to s$ nach (2.3) stets $R_n^{(2)} \to s$ folgt, gilt das Umgekehrte nicht immer. Setzt man z. B. $C_n^{(2)} = (-1)^n$, so wird nach (2.3) $R_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, während $C_n^{(2)}$ offenbar oszilliert.

LITERATURVERZEICHNIS

1. *L. Fejér*, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 13 (1933), pp. 80—88.
2. *L. Fejér*, A. Fourier-féle sor és a hatvány sor számtani közepeinek néhány uj tulajdonságáról. Matematikai és Fizikai Lapok 41 (1934), pp. 1—16.
3. *L. Fejér*, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology 13 (1934), pp. 1—17.
4. *M. Riesz*, Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 22, (1924), pp. 412—419.

(Eingegangen den 9. September 1938.)