Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über die mittlere mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone.
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11892

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die mittlere mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone[1)]

Von H. Hadwiger, Bern

1. Es bezeichne A die Gesamtheit aller Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $|\mathfrak{a}| = 1$, die im dreidimensionalen Vektorraum im Ursprung beginnen. Als *Vektordichte* $\dot{\mathfrak{a}}$ wählen wir die zweidimensionale Punktdichte auf der Einheitskugel, auf der alle Endpunkte der Vektoren von A liegen. Mit N beliebig aus A herausgegriffenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_N$ bilden wir ein im Ursprung beginnendes *Polygon* $P_N : \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_N$.

Ist $F\{P_N\}$ eine Funktion dieses Polygons, so soll das Integral

$$\overline{F} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int F\{P_N\}\, \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_N \tag{1}$$

Mittelwert der Funktion F heißen. Dabei soll bei der Integration jeder Seitenvektor $\mathfrak{a}_\nu$ unabhängig den ganzen Vorrat A durchlaufen. Die Existenz des Integrals in (1) wird vorausgesetzt.

Ist $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor, so versteht man unter der *Stützfunktion* $p(\mathfrak{e})$ des Polygons P_N die nicht negative Zahl

$$p = \operatorname{Max}\{0, (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1), (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_2), \ldots (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_1) + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_2) + \cdots + (\mathfrak{e}\,\mathfrak{a}_N)\}\,. \tag{2}$$

Es ist der Abstand des Ursprungs von der *Stützebene* von P_N deren Normalvektor $\mathfrak{e}$ ist. (Der Normalvektor einer Ebene zeigt in den den Ursprung nicht enthaltenden Halbraum.)

Die Summe

$$B(\mathfrak{e}) = p(\mathfrak{e}) + p(-\mathfrak{e})$$

nennen wir die Breite von P_N in der Richtung $\mathfrak{e}$.

[1)] Die Anregung zu der in dieser Note behandelten Fragestellung verdanke ich Herrn *R. Signer* in Bern, der mich in freundlicher Weise darüber orientierte, wie man in der Kolloidchemie auf derartige Probleme stößt, falls man versucht das Verhalten sogenannter fadenförmiger Moleküle in Lösungen nach rein mathematisch-statistischen Gesichtspunkten zu begründen. So bestimmte *W. Kuhn* (Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen, Kolloid-Zeitschrift 68, 1934) die mittlere Distanz von Anfangs- und Endpunkt. Mit Hilfe der mittleren mittleren Breite der zufallsartig gestalteten Polygone, deren Berechnung hier durchgeführt werden soll, kann die mittlere Raumerfüllung solcher Fadenmoleküle abgeschätzt werden.

Als *mittlere Breite* bezeichnet man den Integralwert

$$\overline{B} = \frac{1}{4\pi}\int B(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}} = \frac{2}{4\pi}\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}}\ , \tag{3}$$

wo das Integral über die Endpunktseinheitskugel von $\mathfrak{e}$, kurz über alle $\mathfrak{e}$, zu erstrecken ist. In dieser Note soll nun der Mittelwert $\overline{\overline{B}}_N$ der Polygonfunktion $F\{P_N\} = \overline{B}$ berechnet werden. Wir nennen $\overline{\overline{B}}_N$ die *mittlere mittlere Breite* des zufallsartig gestalteten Polygons.

Es ist also nach Definition (1) das folgende Integral zu ermitteln:

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N+1}\int\left\{\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{e}}\right\}\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N\ . \tag{4}$$

Vertauschen wir noch die Integrationsreihenfolge und beachten, daß der Wert

$$\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N$$

als Funktion von $\mathfrak{e}$ wegen der allseitigen Symmetrie eine Konstante ist, so folgt

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int p(\mathfrak{e})\,\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N\ . \tag{5}$$

2. Wir führen nun eine Hilfsfunktion ein, die die Anzahldichte von Polygonen P_N bezeichnet, deren normale Projektionspolygone auf einer festen Geraden der Richtung $\mathfrak{e}$ gewissen Bedingungen genügen. Es sei $x > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha > x$ und

$$F_N[x, \alpha]\,dx = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_N \tag{6}$$

integriert über alle Polygone P_N für die

$$x < (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\,\mathfrak{e}) \leqq x + dx \tag{a}$$

$$\operatorname{Max}\{(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}),\ (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{e}), \ldots (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\mathfrak{e})\} \leqq \alpha \tag{b}$$

ausfällt.

Das Integral in (6) kann nun wie folgt zerlegt werden:

$$F_N[x,\alpha]\,dx = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N}\int_{x-1}^{\operatorname{Min}\{x+1,\alpha\}}\frac{1}{d\xi}\left\{\int\dot{\mathfrak{a}}_1\ldots\dot{\mathfrak{a}}_{N-1}\int\dot{\mathfrak{a}}_N\right\}d\xi\,,\ (N \geqq 2)$$

wo das Integral

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_{N-1}$$

über alle Polygone P_{N-1} zu erstrecken ist, für die

$$\xi < (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_{N-1}\, \mathfrak{e}) \leqq \xi + d\xi \tag{a}$$

$$\operatorname{Max}\{(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}),\ (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{e}),\ \ldots\ (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_{N-1}\, \mathfrak{e})\} \leqq \alpha \tag{b}$$

und das Integral

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_N$$

über alle $\mathfrak{a}_N$ für die

$$x - \xi < (\mathfrak{a}_N\, \mathfrak{e}) \leqq x - \xi + dx$$

gilt, so daß

$$\int \dot{\mathfrak{a}}_N = 2\pi\, dx$$

ist.

Hieraus ergibt sich die Funktionalrekursion

$$F_N[x, \alpha] = \frac{1}{2} \int\limits_{x-1}^{\operatorname{Min}\{x+1, \alpha\}} F_{N-1}[\xi, \alpha]\, d\xi\ ,$$

oder

$$F_N\,[x, \alpha] = \frac{1}{2} \int\limits_{x-1}^{x+1} F_{N-1}\,[\xi, \alpha]\, K\,[\xi, \alpha]\, d\xi\ , \quad (N \geqq 2) \tag{7}$$

wo

$$K\,[\xi, \alpha] = \begin{cases} 1 & \xi \leqq \alpha \\ 0 & \xi > \alpha \end{cases}$$

ist. Nach Definition (6) wird

$$F_1\,[x, \alpha]\, dx = \frac{1}{4\pi} \int \dot{\mathfrak{a}}_1$$

integriert über alle Vektoren $\mathfrak{a}_1$ für die

$$x < (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}) \leqq x + dx \tag{a}$$

$$(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{e}) \leqq \alpha \tag{b}$$

ist. Das auftretende Integral ist gleich der Mantelfläche einer Zone der Dicke dx der Einheitskugel, wenn $-1 \leqq x < \operatorname{Min}\{\alpha, 1\}$ und 0 wenn $x < -1$ oder $x \geqq \operatorname{Min}\{\alpha, 1\}$ ist. Es wird demnach

$$F_1\,[x, \alpha] = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leqq x < \operatorname{Min}\{\alpha, 1\} \\ 0 & \operatorname{Min}\{\alpha, 1\} \leqq x\ . \end{cases} \tag{8}$$

Unter Verwendung von (7) und (8) können nun die Hilfsfunktionen $F_N\,[x, \alpha]$ rekursiv berechnet werden.

N	$2^N (N-1)!\, F_N[x, \alpha]$	x	α
1	0	$-\infty < x < -1$	$0 \leqq \alpha < 1$
	1	$-1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -1$	$1 \leqq \alpha < \infty$
	1	$-1 \leqq x < 1$	
	0	$1 \leqq x < \alpha$	
2	0	$-\infty < x < -2$	$0 \leqq \alpha < 1$
	$2+x$	$-2 \leqq x < \alpha - 1$	
	$1+\alpha$	$\alpha - 1 \leqq x < 0$	
	$1+\alpha-x$	$0 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -2$	$1 \leqq \alpha < 2$
	$2+x$	$-2 \leqq x < 0$	
	$2-x$	$0 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -2$	$2 \leqq \alpha < \infty$
	$2+x$	$-2 \leqq x < 0$	
	$2-x$	$0 \leqq x < 2$	
	0	$2 \leqq x < \alpha$	
3	0	$-\infty < x < -3$	$0 \leqq \alpha < 1$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < \alpha - 2$	
	$5+4\alpha-\alpha^2+2\alpha x+2x$	$\alpha - 2 \leqq x < -1$	
	$3+4\alpha-\alpha^2+2\alpha x-2x-2x^2$	$-1 \leqq x < \alpha - 1$	
	$2+4\alpha-2x-x^2$	$\alpha - 1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$1 \leqq \alpha < 2$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < \alpha - 1$	
	$3+4\alpha-\alpha^2-2x-x^2$	$\alpha - 1 \leqq x < 1$	
	$5+4\alpha-\alpha^2-6x+x^2$	$1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$2 \leqq \alpha < 3$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < 1$	
	$9-6x+x^2$	$1 \leqq x < \alpha$	
	0	$-\infty < x < -3$	$3 \leqq \alpha < \infty$
	$9+6x+x^2$	$-3 \leqq x < -1$	
	$6-2x^2$	$-1 \leqq x < 1$	
	$9-6x+x^2$	$1 \leqq x < 3$	
	0	$3 \leqq x < \alpha$	

Es bezeichne nun weiter

$$f_N(\alpha) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int \dot{\mathfrak{a}}_1 \ldots \dot{\mathfrak{a}}_N \qquad (\alpha > 0) \tag{9}$$

integriert über alle Polygone für die

$$\operatorname{Max}\{(\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}), (\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\mathfrak{e}), \ldots (\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}) + (\mathfrak{a}_2\mathfrak{e}) + \cdots + (\mathfrak{a}_N\mathfrak{e})\} \leqq \alpha$$

ist. Ein Vergleich mit (6) lehrt, daß

$$f_N(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} F_N[x, \alpha]\, dx \tag{10}$$

sein wird. Die neue Hilfszahl $f_N(\alpha)$ läßt sich als *geometrische Wahrscheinlichkeit* deuten, dafür daß das zufallsartig gestaltete Polygon P_N ganz in dem vorgegebenen Halbraum liegt, der den Ursprung enthält und von der auf $\mathfrak{e}$ normalen Ebene im Abstand α vom Ursprung begrenzt ist.

Beachtet man, daß die Integration in (9) über alle Polygone erstreckt wird, deren Stützfunktion $p(\mathfrak{e})$ die Ungleichung

$$p(\mathfrak{e}) \leqq \alpha \tag{11}$$

erfüllen, so kann nun der Mittelwert in (5) durch die Hilfsfunktion (9) dargestellt werden. Offenbar gilt

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\int_0^{\infty} \alpha f_N'(\alpha)\, d\alpha\ . \tag{12}$$

Wegen $f_N'(\alpha) = 0$ für $\alpha > N$ ist nach einer geläufigen Umformung

$$\overline{\overline{B}}_N = 2\left\{ N - \int_0^N f_N(\alpha)\, d\alpha \right\}\ . \tag{13}$$

Aus den weiter unten mitgeteilten ersten Hilfsfunktionen rechnet man nach Definiton (10) aus:

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1+\alpha}{2} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ 1 & (1 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{3+4\alpha}{8} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ \dfrac{4+4\alpha-\alpha^2}{8} & (1 \leqq \alpha < 2) \\ 1 & (2 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

$$f_3(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{15+21\alpha+3\alpha^2-\alpha^3}{48} & (0 \leqq \alpha < 1) \\ \dfrac{17+27\alpha-6\alpha^2}{48} & (1 \leqq \alpha < 2) \\ \dfrac{21+27\alpha-9\alpha^2+\alpha^3}{48} & (2 \leqq \alpha < 3) \\ 1 & (3 \leqq \alpha < \infty) \end{cases}$$

Für die ersten drei mittleren Breiten gewinnt man hieraus die Werte

$$\begin{aligned} \overline{\overline{B}}_1 &= \frac{1}{2} = 0{,}500\ldots \\ \overline{\overline{B}}_2 &= \frac{5}{6} = 0{,}833\ldots \\ \overline{\overline{B}}_3 &= \frac{53}{48} = 1{,}104\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

3. Die maximale mittlere Breite des Polygons P_N ist $\frac{N}{2}$, die dann auftritt, wenn das Polygon ganz gestreckt ist. In der Folge leiten wir für die mittlere mittlere Breite die asymptotische Formel her

$$\overline{\overline{B}}_N = O(\sqrt{N}) \ . \tag{15}$$

Diese zeigt, daß die zufallsartige Gestaltung im Mittel eine „*Knäuelung*" des Polygons erzeugt, indem seine Breiten gegen seine Gesamtlängen N klein werden.

Zunächst müssen wir das asymptotische Verhalten der Hilfsfunktionen $F_N[x, \alpha]$ studieren.

Da $K[x, \infty] = 1$ ist, gelten für die Funktionen $F_N[x, \infty]$ nach (7) die Rekursionen

$$F_N[x, \infty] = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} F_{N-1}[\xi, \infty]\, d\xi\,, \qquad (N \geqq 2) \tag{16}$$

oder als *Faltungsintegral* geschrieben.

$$F_N[x, \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} F_{N-1}[\xi, \infty]\, \Phi(x - \xi)\, d\xi\,, \tag{17}$$

wo

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0\,(-\infty < \xi < -1) \\ \frac{1}{2}(-1 \leqq \xi < 1) \\ 0\,(1 \leqq \xi < \infty) \end{cases}$$

und

$$F_1[\xi, \infty] = \begin{cases} 0\,(-\infty < \xi < -1) \\ \frac{1}{2}(-1 \leqq \xi < 1) \\ 0\,(1 \leqq \xi < \infty) \end{cases}$$

ist. Aus (17) folgt dann

$$\begin{aligned} F_N[x, \infty] &= 0 \quad \text{für} \quad |x| > N \\ F_N[x, \infty] &= F_N[-x, \infty]\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Unterwerfen wir die in der Faltungsrelation (17) auftretenden Funktionen der *Fourierschen Transformation*

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_N[\xi, \infty] \cos x\xi\, d\xi\,,$$

$$\mathfrak{F}\{\Phi, x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \cos x\xi\, d\xi\,,$$

wobei noch (18) berücksichtigt wird, so gilt nach dem bekannten *Faltungssatz*[2]):

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \mathfrak{F}\{F_{N-1}, x\} \cdot \mathfrak{F}\{\Phi, x\}\,,$$

und da $F_1 = \Phi$ ist, wird

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = (\mathfrak{F}\{\Phi, x\})^N\,.$$

---

[2]) Vgl. etwa *G. Doetsch*, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, J. Springer, 1937, S. 162.

Nun ist aber

$$\mathfrak{F}\{\Phi, x\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos\ x\xi\, d\xi = \frac{\sin\ x}{x}\ ,$$

so daß

$$\mathfrak{F}\{F_N, x\} = \left(\frac{\sin\ x}{x}\right)^N$$

folgt. Nach der Umkehrungsformel der Fourierschen Transformation ist

$$F_N[x, \infty] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\ \xi}{\xi}\right)^N \cos\ x\xi\ d\xi\ . \tag{19}$$

Für das hier auftretende Integral kann der asymptotische Wert für große N nach *G. Pólya*[3]) u. a. angegeben werden. Es resultiert dann

$$F_N\ [x, \infty] \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi N}}\ e^{-\frac{3x^2}{2N}}\ . \tag{20}$$

Projeziert man das Polygon P_N auf die Gerade g der Richtung $\mathfrak{e}$ so kann $F_N[x, \infty]$ imterpretiert werden als Wahrscheinlichkeitsdichte für die x-Koordinate des Endpunktes des linearen Polygons auf g. Die asymptotische Formel (20) kann nun dahin gedeutet werden, daß bei großem N die Position des Endpunktes auf g dem gleichen Wahrscheinlichkeitsgesetze unterliegt, wie die Endlage eines auf g linear diffundierenden Partikels nach Ablauf der Zeit N, der sich zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ befand, wenn als linearer Diffusionskoeffizient

$$D = \frac{1}{6} \tag{21}$$

angenommen wird. Ausgehend von dieser Deutung identifizieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$F_N[x, \alpha]$$

mit der Positionsdichte des gleichen Partikels wie oben, dessen Diffusionsbewegung auf g aber noch der Zusatzbedingung unterworfen ist, daß der Partikel ausscheidet, falls er die Grenzkoordinate $x = \alpha$ überschreitet. Diese Ausscheidebedingung entspricht genau der Vorschrift, wonach bei der Integration in (6) nur diejenigen Polygone zugelassen werden, deren

[3]) *G. Pólya*, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74 (1913), S. 204—212.

Projektionspolygone auf g ganz auf einer Seite des Grenzpunktes $x = \alpha$ liegen.

Nach einem geläufigen Ansatz erhalten wir demnach

$$F_N[x, \alpha] \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi N}} \left\{ e^{-\frac{3x^2}{2N}} - e^{-\frac{3(2\alpha - x)^2}{2N}} \right\} . \tag{22}$$

Für

$$f_N(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} F_N[x, \alpha]\, dx$$

erreicht man nach einigen Umformungen

$$f_N(\alpha) \sim \frac{2}{\sqrt{N}} \int_0^{\alpha\sqrt{\frac{3}{2N}}} e^{-u^2}\, du ,$$

und hieraus für die mittlere mittlere Breite

$$\overline{\overline{B}}_N = 2 \int_0^{\infty} \alpha f_N'(\alpha)\, d\alpha$$

den asymptotischen Ausdruck

$$\overline{\overline{B}}_N \sim \sqrt{\frac{8N}{3\pi}} = 0{,}9213 \sqrt{N} . \tag{23}$$

(Eingegangen den 16. Februar 1939.)