Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionels L... .

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **12 (1939-1940)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12804

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels L^α

Par M. PLANCHEREL, Zurich

Les pages suivantes apportent quelques compléments à la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels L^α.

Au § 1 est étudiée la transformation des fonctions de m variables qui est déterminée par la donnée d'une transformation des fonctions de p variables ($1 \leqq p < m$) et d'une transformation des fonctions de $(m - p)$ variables.

Le § 2 étudie le prolongement dans $L^\alpha (1 \leqq \alpha < 2)$ des transformations linéaires bornées de L^2 à noyau borné.

§ 1. Représentons par $x = (x_1, \ldots, x_m)$ un point de l'espace euclidien R_m à m dimensions et par L_m^α l'ensemble des fonctions mesurables $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, telles que

$$\int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_m)|^\alpha dx_1 \ldots dx_m \tag{1}$$

ait une valeur finie.

Une transformation T faisant correspondre à toute fonction $f(x)$ de L_m^α une fonction $F(y) = F(y_1, \ldots, y_n) = T(f(x); y)$ de L_n^β est linéaire si

$$T(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 T f_1 + a_2 T f_2 , \tag{2}$$

quelles que soient les fonctions f_1, f_2 de L_m^α et les constantes a_1, a_2. Elle est bornée, s'il existe une constante b, telle que

$$\left(\int_{R_n} |F(y)|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b \left(\int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

pour toute fonction f de L_m^α. La plus petite constante $b_T = b_T(\alpha, \beta)$ vérifiant (3) est la borne de la transformation T de L_m^α dans L_n^β.

Soient p, q deux entiers positifs et $1 \leqq p < m$, $1 \leqq q < n$. Nous

désignerons par $x' = (x_1, \ldots, x_p)$ un point de l'espace R_p, par $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ un point de l'espace R_{m-p}, par $y' = (y_1, \ldots, y_q)$ un point de l'espace R_q et par $y'' = (y_{q+1}, \ldots, y_n)$ un point de l'espace R_{n-q}.

Théorème 1. Si T' est une transformation linéaire bornée de L_p^α dans L_q^β et T'' une transformation linéaire bornée de L_{m-p}^α dans L_{m-q}^β, il existe, lorsque $0 < \alpha \leqq \beta$, une et une seule transformation T de L_m^α dans L_n^β telle que

1. *T soit linéaire bornée,*
2. $T(f'f'') = T'f' \cdot T''f''$, (4)

lorsque $f'(x')$ appartient à L_p^α et $f''(x'')$ à L_{m-p}^α. La borne b_T est égale à $b_{T'} \cdot b_{T''}$.

Nous représenterons cette transformation T par le symbole $T = (T', T'') = (T'', T')$.

Le caractère linéaire imposé à T et la relation (4) permettent de définir T d'une manière univoque pour toute fonction-escalier de L_m^α. Une telle fonction est représentable par une somme

$$\varphi(x) = \varphi(x', x'') = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i'(x')\, \varphi_i''(x''), \tag{5}$$

dans laquelle $\varphi_i'(x')$ est une fonction nulle à l'extérieur et constante à l'intérieur d'un intervalle p - dimensionnel I_i' et $\varphi_i''(x'')$ une fonction nulle à l'extérieur et constante à l'intérieur d'un intervalle $(m-p)$ - dimensionnel I_i''. Par conséquent, la transformée de (5) est égale à

$$T\varphi = \sum_{i=1}^{k} T'\varphi_i' \cdot T''\varphi_i''.$$

On s'assure aisément que $T\varphi$ est indépendante de la représentation particulière (5) qui, elle, n'est pas univoque, et que

$$T(\varphi\,;y) = T''[T'(\varphi(x', x'')\,; y')\,; y''] = T'[T''(\varphi(x', x'')\,; y'')\,; y']. \tag{6}$$

On peut toujours faire en sorte que dans la représentation (5) de la fonction-escalier φ les intervalles I_i', resp. I_i'', n'empiètent pas les uns sur les autres. En admettant dans ce qui suit que c'est le cas, on voit que, pour tout $\gamma > 0$, sauf évent. aux points de contact des intervalles,

$$|\varphi|^\gamma = \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i'\varphi_i''|^\gamma, \tag{7}$$

$$\int_{R_p} |\varphi(x', x'')|^\gamma dx' = \sum_{=1}^{k} |\varphi_i''(x'')|^\gamma \int_{R_p} |\varphi_i'|^\gamma dx', \quad \int_{R_m} |\varphi(x)|^\gamma dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{R_m} |\varphi_i'\varphi_i''|^\gamma dx. \tag{8}$$

Or, en tenant compte du fait que T' et T'' sont linéaires et bornées ainsi que des relations (5) — (8), on peut écrire

$$\left(\int_{R_n} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left[\int_{R_q} dy' \int_{R_{n-q}} |T''(\sum_1^k \varphi_i'' T'\varphi_i')|^\beta dy''\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leqq b_{T''}\left[\int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} |\sum_1^k \varphi_i'' T'\varphi_i'|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= b_{T''}\left[\int_{R_q} dy' \left(\sum_1^k |T'\varphi_i'|^\alpha \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= b_{T''}\left\{\left[\int_{R_q} dy' \left(\sum_1^k |T'\varphi_i'|^\alpha \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Appliquons l'inégalité de Minkowski (ici intervient l'hypothèse $\alpha \leqq \beta$) [1]) au crochet du second membre de la dernière inégalité. Il vient

$$\left(\int_{R_m} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx'' \left(\int_{R_q} |T'\varphi_i'|^\beta dy'\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqq b_{T'} b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx'' \int_{R_p} |\varphi_i'|^\alpha dx'\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= b_{T'} b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_m} |\varphi_i'\varphi_i''|^\alpha dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} = b_{T'} b_{T''}\left(\int_{R_m} |\varphi|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On a donc pour toute fonction-escalier φ

$$\left(\int_{R_m} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T'} b_{T''}\left(\int_{R_m} |\varphi|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{9}$$

Or, l'ensemble des fonctions-escaliers de R_m forme une multiplicité linéaire partout dense dans l'espace fonctionnel L_m^α métrisé en prenant comme distance de deux fonctions f, g la quantité $(\int_{R_m} |f - g|^\alpha dx)^{1/\alpha}$. On pourra donc approcher en moyenne d'ordre α toute fonction f de L_m^α par une suite φ_h, $(h = 1, 2, \ldots)$, de fonctions-escaliers. En vertu de (9), la suite correspondante $T\varphi_h$ convergera en moyenne d'ordre β vers une fonction F univoquement déterminée par f. En définissant alors Tf par $Tf = F$, on s'assurera que la transformation T ainsi définie répond à toutes les conditions du théorème 1.

---

[1]) Sur les inégalités de Minkowski voir, p. ex. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya*, Inequalities (Cambridge, 1934).

Théorème 2. Sous les hypothèses du théorème 1, on a pour toute fonction $f(x) = f(x', x'')$ *de* L_m^α

$$T(f(x); y) = T''[T'(f(x', x''); y'); y''] = T'[T''(f(x', x''); y''); y']. \quad (10)$$

C'est l'extension de la formule (6) établie pour les fonctions-escaliers. Il suffira de démontrer la première des formules (10). Elle implique l'existence des fonctions

$$F'(y', x'') = T'(f(x', x''); y'), \quad F''(y', y'') = T''(F'(y', x''); y''),$$

l'appartenance de F' — en tant que fonction de y' — à L_q^β, celle de F'' — en tant que fonction de y'' — à L_{n-q}^β et l'égalité $F'' = Tf$.

$f(x)$ appartenant à L_m^α, on sait, d'après un théorème de G. Fubini sur les intégrales multiples que, considérée comme fonction de x', elle appartient aussi à L_p^α, sauf peut-être pour des valeurs de x'' formant un ensemble E'' de mesure $(m-p)$-dimensionnelle nulle. Par conséquent, en chaque point x'' de $R_{m-p} - E''$, $F'(y', x'')$ existe et

$$\left(\int_{R_q} |F'(y', x'')|^\beta dy'\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''} \left(\int_{R_p} |f(x', x'')|^\alpha dx'\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et, par suite, encore

$$\int_{R_{m-p}} dx'' \left(\int_{R_q} |F'(y', x'')|^\beta dy'\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqq b_{T'}^\alpha \int_{R_{m-p}} dx'' \int_{R_p} |f(x', x'')|^\alpha dx'$$

$$= b_{T'}^\alpha \int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx < \infty .$$

D'autre part, on a l'inégalité

$$\int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqq \left[\int_{R_{m-p}} dx'' \left(\int_{R_q} |F'(y', x'')|^\beta dy'\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (12)$$

qui résulte de la généralisation suivante d'une autre inégalité de Minkowski [2]).

Si $g(y', x'')$ *est une fonction réelle, non négative, appartenant à la classe* L_{q+m-p}^γ, *on a, sous l'hypothèse* $0 < \gamma \leqq 1$,

$$\int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} (g(y', x''))^\gamma dx''\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqq \left[\int_{R_{m-p}} \left(\int_{R_q} g(y', x'') dy'\right)^\gamma dx''\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

[2]) loc. cit. [1]), p. 148.

Il suffit de prendre $\gamma = \alpha/\beta$ et $g(y', x'') = |F'(y', x'')|^\beta$ pour obtenir (12). (11) et (12) entraînent l'inégalité

$$\int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^\alpha dx'' \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqq b_{T'}^\beta \left(\int_{R_m} |f|^\alpha dx \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} < \infty . \tag{13}$$

La fonction de y'

$$\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^\alpha dx''$$

existe donc et a une valeur finie, sauf évent. aux points d'un ensemble E' de mesure q-dimensionnelle nulle. En chaque point de $R_q - E'$, $F'(y', x'')$ appartient — en tant que fonction de x'' — à la classe L^α_{m-p}. Par conséquent, $F'(y', x'')$ possède une transformée $T''[F'(y', x''); y'']$ qui — en tant que fonction de y'' — appartient à la classe L^β_{n-q}. Ainsi se trouve établie l'existence de F'' et l'inégalité

$$\left(\int_{R_{n-q}} |F''(y', y'')|^\beta dy'' \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''} \left(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^\alpha dx'' \right)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Donc,

$$\int_{R_q} dy' \int_{R_{n-q}} |F''|^\beta dy'' \leqq b_{T''}^\beta \int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^\alpha dx'' \right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\leqq b_{T''}^\beta \, b_{T'}^\beta \left(\int_{R_m} |f|^\alpha dx \right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

d'où encore

$$\left(\int_{R_n} |F''(y)|^\beta dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T'} \, . \, b_{T''} \left(\int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} . \tag{14}$$

Il reste à démontrer que $F''(y) = T[f(x); y]$. Or, cette égalité a déjà été établie pour les fonctions-escaliers. En vertu de l'inégalité (14), on remarquera que si la fonction f est approchée en moyenne d'ordre α par une suite de fonctions-escaliers $\varphi_h (h = 1, 2, \ldots)$, les fonctions correspondantes Φ''_h convergent en moyenne d'ordre β vers F''. D'autre part, $\Phi''_h = T\varphi_h$ et $T\varphi_h$ converge vers Tf, puisque T est une transformation linéaire bornée. Donc $F'' = Tf$.

§ 2. A toute transformation linéaire bornée T_2 de L^2_m dans L^2_n est attachée une fonction $\tau(x; y) = \tau(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ appelée la génératrice de T_2 et telle que

$$T_2(f(x); y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} \int_{R_m} f(x) \frac{\partial^m \overline{\tau(x; y)}}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} dx .$$

Si T'_2 et T''_2 sont des transformations linéaires bornées de L^2_p dans L^2_q, resp. de L^2_{m-p} dans L^2_{n-q} et si $\tau'(x'; y')$, $\tau''(x''; y'')$ sont leurs génératrices,

la transformation $T_2 = (T_2', T_2'')$ a pour génératrice la fonction $\tau(x, y) = \tau'(x'; y')\tau''(x''; y'')$.

Réciproquement, si la génératrice $\tau(x ; y)$ d'une transformation linéaire bornée T_2 est un produit $\tau'(x'; y')\tau''(x''; y''), \tau'$ et τ'' (supposées non constantes) sont les génératrices de transformations T_2' et T_2'' telles que $(T_2', T_2'') = T_2$.

L'adjointe T_2^* de la transformation T_2 transforme les fonctions de L_n^2 en fonctions de L_m^2. Si $G(y)$ appartient à L_n^2,

$$T_2^*(G(y); x) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \int_{R_n} G(y) \frac{\partial^n \tau(x; y)}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} dy .$$

On a, pour toute fonction f de L_m^2 et G de L_n^2 [3])

$$\int_{R_m} f(x) \overline{T_2^*(G(y); x)} dx = \int_{R_n} \overline{G(y)} T_2(f(x); y) dy .$$

Nous considérons dans ce § la classe particulièrement intéressante des transformations dont la génératrice est une fonction absolument continue du point $(x ; y)$ de l'espace R_{m+n}. Nous appellerons alors *noyau* de la transformation la dérivée

$$\varphi(x ; y) = \frac{\partial^{m+n} \tau(x; y)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m \, \partial y_1 \ldots \partial y_n}$$

et nous supposerons encore que ce noyau est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, presque partout, dans R_{m+n}

$$|\varphi(x ; y)| \leqq M .$$

La transformée $F(y) = T_2(f(x) ; y)$ d'une fonction f de L_m^2 est alors la limite en moyenne d'ordre 2 de

$$\int_{-r_1}^{r_1} \cdots \int_{-r_m}^{r_m} f(x_1, \ldots, x_m) \overline{\varphi(x_1 \ldots, x_m ; y_1, \ldots, x_n)} dx_1 \ldots dx_m \tag{15}$$

lorsque $r_1 \to \infty, \ldots, r_m \to \infty$. Nous la représenterons symboliquement par

$$F(y) = T_2(f(x) ; y) \sim \int_{R_m} f(x) \overline{\varphi(x; y)} dx . \tag{16}$$

Désignons par $b = b_{T_2}(2, 2)$ la borne de cette transformation. Donc,

$$\int_{R_n} |F(y)|^2 dy \leqq b^2 \int_{R_m} |f(x)|^2 dx .$$

[3]) Voir, p. ex., *M. Plancherel*, Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables (Commentarii math. helv., t. 9 (1937), p. 249—262).

Théorème 3. Si f appartient à L_m^α $(1 \leqq \alpha \leqq 2)$, l'expression (15) *converge en moyenne d'ordre $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ vers une fonction F de $L_n^{\alpha'}$, lorsque $r_1 \to \infty, \ldots, r_m \to \infty$. La correspondance $f \to F$ ainsi établie définit une transformation T_α qui a les propriétés suivantes:*

1. T_α est une transformation linéaire bornée de L_m^α dans $L_n^{\alpha'}$. Sa borne $b_{T_\alpha}(\alpha, \alpha')$ ne surpasse pas

$$b^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$$

2. Lorsque f appartient simultanément aux classes L_m^α et L_m^2, on a $T_\alpha f = T_2 f$.

Dans le cas $\alpha = 1$, la convergence de (15) vers $F(y)$ est la convergence ordinaire et l'inégalité

$$\left(\int_{R_n} |F(y)|^{\alpha'} dy\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \leqq b^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left(\int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est à remplacer par

$$|T_1(f\,;y)| = |F(y)| \leqq M \int_{R_m} |f(x)|\, dx\,.$$

Les propriétés de T_α sont immédiates dans le cas $\alpha = 1$. Il en est de même de la propriété 2, dès que la propriété 1 est démontrée. Il suffira donc d'établir cette dernière lorsque $1 < \alpha < 2$. Cela peut se faire, soit à l'aide d'un théorème de M. Riesz[4]), soit en suivant les raisonnements que nous avons donnés dans une note antérieure[5]) en nous inspirant d'une méthode de F. Riesz. On remarquera d'abord que la fonction

$$\psi(\xi\,;\eta) = \frac{1}{M}\varphi\left(b\,\frac{x}{M}\,;\ b\,\frac{y}{M}\right)$$

où

$$\xi = b\,\frac{x}{M}\,,\quad \eta = b\,\frac{y}{M}$$

est le noyau d'une transformation S_2 de L_m^2 dans L_n^2 de borne 1 et que $|\psi(\xi\,;\eta| \leqq 1$. L'inégalité (16) relative à T_α se ramène ainsi à une

---

[4]) Une démonstration basée sur le théorème de M. Riesz est donnée par *A. Zygmund*, Trigonometrical series (Varsovie, 1935), p. 198.

[5]) *M. Plancherel*, Formule de Parseval et transformations fonctionnelles orthogonales (Commentarii math. helv., t. 1 (1929), p. 273—288). Corrigeons quelques fautes qui se sont glissées dans cette note. Page 277, ligne 6 depuis le bas, ajouter à „lorsque $\Phi(x, y)$ est symétrique" les mots: et que $e = E$; p. 278, ligne 5, au lieu de $\nu \geqq \frac{1}{2}$ lire: $\nu \geqq -\frac{1}{2}$; p. 281, ligne 5 depuis le bas, au lieu de $M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$ lire $M^{-\frac{2-\alpha}{\alpha}}$.

inégalité analogue relative à une transformation S_α et au cas $b = M = 1$ On montrera ensuite, comme au § 4 de la note rappelée, que tout repose sur la démonstration du cas particulier suivant de (16)

$$\left(\int_Y dy \left| \int_X f(\xi)\, \overline{\psi(x,\eta)}\, d\xi \right|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \leqq \left(\int_X |f(\xi)|^\alpha d\xi\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où X et Y désignent deux intervalles de R_m, resp. de R_n et f une fonction arbitraire de R_m. Or, la démonstration de cette inégalité se fait comme au § 5 de la note en question [6]).

Notons encore que la transformation

$$T_\alpha^*(G(y)\,;\,x) \sim \int_{R_n} G(y)\,\varphi(x\,;\,y)\,dy$$

est une transformation linéaire bornée de L_n^α dans $L_m^{\alpha'}$ et que la relation

$$\int_{R_m} f(x)\,\overline{T_\alpha^*(G\,;\,x)}\,dx = \int_{R_n} \overline{G(y)}\,T_\alpha(f\,;\,y)\,dy$$

a lieu pour toute fonction f de L_m^α et toute fonction G de L_n^α.

Les théorèmes 1—3 ont une application immédiate dans l'étude de la transformation de Fourier des fonctions de m variables, qui a pour noyau

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m)}.$$

---

[6]) Les autres hypothèses faites dans cette note, en particulier sur l'orthogonalité de T (nous dirions aujourd'hui l'isométrie de T) ne jouent aucun rôle aux § 4 et 5. On y utilise le seul fait que la transformation T et son adjointe $\mathfrak{T}$ ont la même borne dans L^2.

(Reçu le 5 décembre 1939.)