Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. I.

Autor(en): **Ostrowski, Alexandre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **13 (1940-1941)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13557

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. I.

Par Alexandre Ostrowski, Bâle

Introduction

Si z est une fonction indéterminée de x, on peut toujours introduire deux variables X, Z par des équations

$$X = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) \quad ; \quad Z = g\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right), \tag{1}$$

mais, en considérant Z comme fonction de X, l'expression de $\frac{dZ}{dX}$ contient en général $\frac{d^2 z}{dx^2}$. Or, on peut choisir les fonctions f et g de sorte que l'expression de $\frac{dZ}{dX}$ ne dépende que de x, de z et de $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dZ}{dX} = h\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right), \tag{2}$$

et qu'en plus x et z puissent être tirés des relations (1) et (2) en fonctions de X, Z et $\frac{dZ}{dX}$. On a alors affaire à une *transformation de contact.* Par exemple, en posant avec Euler et Legendre

$$X = \frac{dz}{dx} \quad , \quad Z = z - x\frac{dz}{dx}, \tag{3}$$

on a

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx} - x\frac{d^2 z}{dx^2}}{\frac{d^2 z}{dx^2}} = -x. \tag{4}$$

Il existe aussi des transformations de cette sorte dans le cas d'une fonction z d'un nombre quelconque n de variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Ce sont des transformations de contact dans l'espace à $n+1$ dimensions, dont la théorie, amorcée par Euler, Legendre, Ampère et Jacobi et poursuivie par Du Bois-Reymond et Darboux, a été surtout développée dans l'œuvre magnifique de Sophus Lie et complétée par S. Cantor et F. Engel.

On peut se demander s'il existe aussi des transformations analogues dans le cas par exemple *de plusieurs fonctions d'une variable indépendante.* Mais il est facile de montrer que, si par exemple, y_1 et y_2 sont deux fonctions indéterminées d'une variable indépendante x, on obtient, en posant

$$\xi = f\left(x\,,\, y_1\,,\, y_2\,,\, \frac{dy_1}{dx}\,,\, \frac{dy_2}{dx}\right)\,,\quad \eta_1 = g(\ldots)\,,\quad \eta_2 = h\ldots)\,,$$

pour les dérivées $\frac{d\eta_1}{d\xi}$, $\frac{d\eta_2}{d\xi}$ des expressions dépendant des dérivées secondes de y_1 et y_2 et que ces dérivées ne disparaissent de ξ, η_1, η_2 que si les fonctions f, g, h sont indépendantes de $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$, c'est-à-dire, si notre transformation est une transformation ponctuelle.

Toutefois, en combinant par exemple la transformation (3) avec la transformation identique $U = u$, u étant une fonction indéterminée de x, on exprime au moins les fonctions z et u de x par Z, U et X et par les dérivées $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dU}{dX}$, bien que l'expression de la dérivée $\frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx}\Big/\frac{d^2z}{dx^2}$ contienne la dérivée seconde de z. On a ici affaire à une transformation qui est *réversible* sans être une transformation de contact.

Plus généralement, si $y_\nu(x)$, $(\nu = 1, \ldots, n)$ sont n fonctions indéterminées de x, il existe des transformations

$$\xi = \xi(x, y, \ldots, y^{(k)}) \quad ; \qquad \eta_\nu = \eta_\nu(\ldots)\,,$$

telles qu'en dérivant ces relations, on puisse exprimer x et les y_ν en fonctions de ξ, η_ν et des dérivées des η_ν par rapport à ξ jusqu'à l'ordre k. Nous appelons des transformations de cette sorte *transformations réversibles d'éléments de ligne d'ordre k.* Si $k = 1$, nous parlerons tout simplement de *transformations R.*

Le présent mémoire est consacré à l'étude des transformations R pour $n = 2$, c'est-à-dire dans l'espace à trois dimensions. Dans un mémoire suivant nous établirons les principaux théorèmes concernant les transformations R dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Si ξ, η_1 et η_2 sont donnés en fonctions de x, y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx} = p_1$, $\frac{dy_2}{dx} = p_2$ de manière à conduire à une transformation R, nous montrons tout d'abord que les expressions de ξ, η_1, η_2 dépendent d'une même fonction de p_1, p_2, c'est-à-dire qu'il existe une fonction

$$r = r(x, y_1, y_2, p_1, p_2)\,,$$

telle que ξ, η_1, η_2 s'expriment tous les trois par x, y_1, y_2 et r. La fonction r jouit, en fonction de p_1 et p_2, de la propriété que ses courbes de niveau sont des droites. r peut être choisi naturellement de différentes façons. Nous choisissons r d'une manière „canonique", de sorte que r est univoquement déterminé par l'équation „Pfaffienne" $ds = 0$, où

$$ds = e dy_1 - a(x, y_1, y_2, r)\, dy_2 - b(x, y_1, y_2, r)\, dx\ .$$

Ici l'on a ou bien $e = 1$, $a = r$ (type I), ou bien $e = 1$, $b = r$, $\frac{\partial a}{\partial r} = 0$ (type II), ou bien $e = 0$, $a = -1$, $b = r$ (type III).

La forme ds sera appelée la *première forme adjointe* rattachée à notre transformation R. En considérant les expressions de x, y_1, y_2 en fonctions de ξ, η_1, η_2, $\frac{d\eta_1}{d\xi} = \pi_1$, $\frac{d\eta_2}{d\xi} = \pi_2$, on exprime de la même façon x, y_1, y_2 par ξ, η_1, η_2 et par une grandeur

$$\varrho = \varrho(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)\ ,$$

définie univoquement par une équation $d\sigma = 0$, où

$$d\sigma = \varepsilon d\eta_1 - \alpha(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\, d\eta_2 - \beta(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\, d\xi\ ,$$

la *seconde forme adjointe* rattachée à notre transformation R, satisfait aux conditions analogues à celles énoncées pour ds.

Notre transformation R se réduit alors à une transformation ponctuelle entre deux espaces à 4 dimensions

$$(x, y_1, y_2, r) \quad \text{et} \quad (\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\ ,$$

satisfaisant à la condition

$$d\sigma = \mu ds \tag{5}$$

(théorème I).

Ici les formes adjointes ds et $d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement (théorème III), et chaque transformation satisfaisant à (5) définit une transformation R.

De l'autre côté, si la forme ds est donnée, il suffit de choisir les expressions de ξ, η_1, η_2 en fonctions des x, y_1, y_2, r de sorte qu'elles satisfassent à une certaine équation différentielle (24,4) du texte, pour qu'il soit possible, en leur adjoignant une quatrième fonction $\varrho(x, y_1, y_2, r)$, d'obtenir une transformation R (théorème IV). Toutefois il y a certains cas d'exception.

Les transformations R ne forment pas un groupe, mais si l'on ne considère que les transformations R dont les deux formes adjointes sont égales entre elles quand on remplace $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ dans $d\sigma$ resp. par x, y_1, y_2, r — les transformations R *symétriques* — l'ensemble des transformations R symétriques appartenant à une forme adjointe fixe forme un groupe.

Dans notre discussion, nous faisons généralement abstraction des transformations R provenant d'une transformation ponctuelle entre x, y_1, y_2 d'un côté et ξ, η_1, η_2 de l'autre. Toutefois, nous montrons (théorème II) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme adjointe $d\sigma$ puisse être transformée par une transformation ponctuelle en la forme adjointe $dy_1 - r dx$ est que les coefficients de $d\sigma$ soient des polynomes au plus linéaires en ϱ. (Une telle forme adjointe sera appelée axiale.)

L'intérêt de ce résultat consiste en ceci que les transformations R symétriques correspondant à la forme $dy_1 - r dx$ se réduisent aux transformations de contact dans *le plan des* x, y_1.

Ces résultats sont développés dans le chapitre I du présent mémoire. Le § 1 de ce chapitre contient la démonstration que les transformations de contact dans le sens de Sophus Lie n'existent pas dans notre cas. Le § 2 est consacré à la définition des fonctions r et ϱ. Dans le § 3 nous démontrons le théorème I qui peut être considéré comme le résultat principal de ce chapitre, et nous ajoutons quelques remarques sur les transformations R du point de vue de la théorie des groupes.

Dans le § 4, les théorèmes II et III sur l'équivalence des formes adjointes sont démontrés. Relevons qu'il résulte du No. 62 du § 10 du second chapitre, que notre procédé de démonstration du théorème III contient une solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes dans le cas général. Dans le § 5 nous démontrons le théorème IV, et nous ajoutons au § 6 quelques remarques sur l'intégration de l'équation différentielle (24,4).

Pour un nombre $n > 2$ de fonctions de x, la solution du problème de trouver toutes les transformations R sera obtenue en généralisant les considérations du chapitre I. Mais dans le cas spécial $n = 2$ on obtient une solution particulièrement simple de notre problème en faisant usage des transformations de contact dans l'espace à trois dimensions. Cette solution est exposée dans le chapitre II.

En éliminant r et ϱ des 4 relations existant pour une transformation R entre x, y_1, y_2, r et $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, on obtient une correspondance entre les espaces $S(x, y_1, y_2)$ et $\Sigma(\xi, \eta_1, \eta_2)$, définie par un couple d'équations

$$\Omega_\nu(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 , \qquad \nu = 1, 2 . \tag{6}$$

C'est une *correspondance de rang 1 entre S et Σ*. Nous montrerons dans le § 7 que réciproquement la transformation R est univoquement déterminée par la correspondance (6) et par ds, à l'exception de certaines transformations R, *transformations R singulières*, qu'on peut facilement toutes former (théorème V).

Dans le § 8 on part d'une correspondance (6) donnée à priori, et l'on cherche des conditions sous lesquelles, en choisissant une première forme adjointe ds, on obtient une transformation R. Cette recherche se réduit à la discussion du problème de caractériser certaines formes ds que nous appelons *singulières relativement à* (6).

Notre résultat est que chaque forme ds est singulière relativement à (6), si la correspondance (6) est *intransitive*, c'est-à-dire, si les équations (6) peuvent être choisies dans la forme

$$f_\nu(x, y_1, y_2) - \varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2) = 0 , \qquad \nu = 1, 2 .$$

Si la correspondance (6) est *transitive*, elle définit dans chaque point de l'espace S un „cône élémentaire" d'éléments de ligne. Si ce cône dégénère dans chaque point de S et devient un élément de surface, on a affaire à une correspondance *faiblement transitive dans S*.

Le résultat principal de la discussion du § 8 consiste en ceci que les formes singulières ds n'existent dans le cas de (6) transitive que si (6) est *faiblement* transitive dans S, et qu'on peut caractériser les formes singulières comme certaines formes axiales satisfaisant à une certaine relation linéaire qu'on établit facilement à partir des cônes élémentaires (dégénérés) définis dans S par (6).

Or, une correspondance (6) (du rang 1) définit d'après S. Lie une transformation de contact T. On peut alors (§ 9) interpréter nos formules au moyen de T. A chaque forme adjointe ds correspond un ensemble D de ∞^4 éléments de surface de S tel que par le point général de S passent ∞^1 éléments de surface de D. D sera appelé le *champ d'éléments de surface* correspondant à ds. D définit évidemment dans S une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre. Maintenant, si Δ est le champ d'éléments de surface correspondant dans Σ à $d\sigma$, *D est transformé dans Δ par la transformation de contact T.*

On peut dès lors obtenir les équations de notre transformation R de manière suivante: Chaque élément de ligne (x, y_1, y_2, p_1, p_2) général dans S est situé dans un élément de surface du champ D. Si à cet élément

de surface correspond par T un élément de surface de Δ passant par le point (ξ, η_1, η_2), on a en exprimant ξ, η_1, η_2 en fonctions de x, y_1, y_2, p_1, p_2, notre transformation R.

Toutefois, le résultat obtenu n'est pas applicable aux transformations singulières. Pour caractériser les transformations singulières, on peut utiliser les transformations de contact qui se rattachent à une *correspondance du rang 2*, définie par *une seule relation*

$$\Omega(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 . \tag{7}$$

On obtient alors (§ 10) le théorème VI qui est le théorème fondamental du présent mémoire: *Chaque fois qu'une transformation de contact entre S et Σ transforme un champ D d'éléments de surface de S dans un champ Δ d'éléments de surface de Σ, on obtient par la règle énoncée plus haut une transformation R, et chaque transformation R peut être obtenue de cette façon.*

Toutefois, en appliquant ce théorème, il faut tenir compte de certaines singularités dues à la non-uniformité des transformations impliquées.

Nous avons dû dans la discussion des §§ 8, 9 plus entrer dans les détails que dans la première partie du mémoire. Cela a été nécessaire, puisque les transformations des équations différentielles aux dérivées partielles par une transformation de contact générale ne sont pas étudiées en détail dans les grands traités de Lie-Scheffers, Lie-Engel, Goursat et Campbell.

Cependant, une discussion générale de cette sorte se heurte à un obstacle apparemment infranchissable autant qu'on ne fait pas d'hypothèses très particulières sur les fonctions entrant dans le calcul. Une équation de la forme

$$F(r, x, y_1, y_2) = 0 \tag{8}$$

peut très bien n'admettre aucune solution par rapport à r, même si r entre effectivement dans F et si F est une fonction holomorphe en r, x, y_1, y_2. Par exemple F pourrait être de la forme $e^{G(r, x, y_1, y_2)}$, G étant une fonction entière de ses arguments. Il est donc impossible en général de „tirer la valeur de r de l'équation (8)" comme on est accoutumé de le faire dans les discussions générales de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, surtout quand on utilise des considérations géométriques. Dans de tels cas on est forcé de se borner aux conditions nécessaires qui deviennent suffisantes dès que la solubilité des équations est assurée, par exemple dès que les fonctions entrant dans le calcul sont

algébriques. Quand on a atteint des conditions de cette sorte qu'on pourrait appeler des *conditions algébriquement complètes*, on n'a naturellement pas résolu complètement le problème, mais on a peut-être fait tout ce qu'on peut faire sans introduire des hypothèses trop spéciales.

C'est dans ce sens seulement qu'on peut considérer les résultats du § 8 comme définitifs.

CHAPITRE I

Etude directe des Transformations R

§ 1. Préliminaires, exemples

1. Soit x une variable indépendante, et y_1, y_2 deux fonctions indéterminées de x ; p_1, p_2 leurs dérivées premières, z_1, z_2 leurs dérivées secondes.

Soit σ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi\,(x\,,y_1\,,y_2\,,p_1\,,p_2) \\ \eta_1 &= \eta_1\,(x\,,y_1\,,y_2\,,p_1\,,p_2) \\ \eta_2 &= \eta_2\,(x\,,y_1\,,y_2\,,p_1\,,p_2) \end{aligned}\right\} \tag{1,1}$$

une transformation telle qu'en calculant au moyen de (1,1)

$$\pi_1 = \frac{d\eta_1}{d\xi} \text{ et } \pi_2 = \frac{d\eta_2}{d\xi}\ ;$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\eta'_{1x} + p_1\eta'_{1y_1} + p_2\eta'_{1y_2} + z_1\eta'_{1p_1} + z_2\eta'_{1p_2}}{\xi'_x + p_1\,\xi'_{y_1} + p_2\,\xi'_{y_2} + z_1\,\xi'_{p_1} + z_2\,\xi'_{p_2}} = \pi_1(x,y_1,y_2,p_1,p_2,z_1,z_2)\,, \\ \pi_2 &= \frac{\eta'_{2x} + p_1\eta'_{2y_1} + p_2\eta'_{2y_2} + z_1\eta'_{2p_1} + z_2\eta'_{2p_2}}{\xi'_x + p_1\,\xi'_{y_1} + p_2\,\xi'_{y_2} + z_1\,\xi'_{p_1} + z_2\,\xi'_{p_2}} = \pi_2(x,y_1,y_2,p_1,p_2,z_1,z_2), \end{aligned} \tag{1,2}$$

on obtienne premièrement comme l'inverse de σ une transformation s:

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(\xi\,,\eta_1\,,\eta_2\,,\pi_1\,,\pi_2) \\ y_1 &= y_1(\xi\,,\eta_1\,,\eta_2\,,\pi_1\,,\pi_2) \\ y_2 &= y_2(\xi\,,\eta_1\,,\eta_2\,,\pi_1\,,\pi_2) \end{aligned}\right\} \tag{1,3}$$

et, deuxièmement, en posant

$$\zeta_1 = \frac{d^2\eta_1}{d\xi^2}\ ,\quad \zeta_2 = \frac{d^2\eta_2}{d\xi^2}\ ,$$

et en dérivant (1,3), des expressions pour p_1, p_2 analogues aux formules (1,2). Les transformations s et σ de ce type seront appelées au cours du présent mémoire transformations R. Elles présentent une certaine analogie (assez incomplète, il est vrai) avec les transformations de contact (Cf. No. 3).

Quand peut-on dire que les transformations s et σ sont inverses l'une de l'autre? Ceci est équivalent aux deux hypothèses suivantes:

I. En substituant dans (1,1) *les expressions* (1,3) *de* x, y_1, y_2 *et les expressions correspondantes de* p_1, p_2, *les 3 équations* (1,1) *deviennent des identités pour le couple „général" des deux fonctions* η_1, η_2 *de* ξ [1]).

II. En substituant dans les équations (1,3) *les expressions* (1,1) *et* (1,2), *ces équations deviennent des identités pour le couple „général" des deux fonctions* y_1, y_2 *de* x.

Il est évident qu'alors le système (1,1) possède en général pour chaque couple de fonctions η_1, η_2 de ξ des solutions, et chaque solution est donnée par (1,3). Le fait analogue subsiste pour le système (1,3).

Si l'on retient l'hypothèse I, l'hypothèse II peut être remplacée par l'hypothèse suivante:

II⁰. Le système (1,3) *possède une solution pour le couple „général" des deux fonctions* y_1, y_2 *de* x.

En effet, désignons par y_1^0, y_2^0 un couple général de fonctions de x et par p_1^0, p_2^0 leurs dérivées premières. Soit alors $\xi^0, \eta_1^0, \eta_2^0$ une solution des équations (1,3), et désignons par π_1^0, π_2^0 les dérivées de η_1^0, η_2^0 par rapport à ξ^0. Cette solution est alors donnée d'après l'hypothèse I par les formules

$$\xi^0 = \xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0) \;;\; \eta_\mu^0 = \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0) \;, \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2 \;, \\ \mu = 1, 2 \;, \end{matrix} \tag{1,4}$$

et l'on a

$$x = x(\xi^0, \eta_\mu^0, \pi_\mu^0) \;,\; y_\nu^0 = y_\nu(\xi^0, \eta_\mu^0, \pi_\mu^0) \;, \quad \left\{ \begin{matrix} \nu = 1, 2 \;, \\ \mu = 1, 2 \;. \end{matrix} \right. \tag{1,5}$$

Alors, on a en substituant les expressions (1,4) dans (1,5):

$$x\big(\xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \pi_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0, z_\nu^0)\big) = x$$
$$y\big(\xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \pi_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0, z_\nu^0)\big) = y_\lambda^0 \;, \quad \lambda = 1, 2 \;.$$

Donc, en substituant les expressions (1,1) et (1,2) dans (1,3), ces équations deviennent des identités pour le couple „général" y_1, y_2.

---

[1]) Si l'on dit qu'une assertion est valable pour un couple général de deux fonctions, on entend par là qu'il existe une expression différentielle Φ en deux fonctions, telle que l'assertion en question reste valable autant que l'expression Φ ne devient pas 0. Toutefois, cette notion s'applique généralement dans les recherches sur le comportement *local*, de sorte que les fonctions „générales" pourraient très bien posséder des espaces lacunaires, même si elles sont analytiques.

Dans ce qui suit nous supposons partout que les substitutions (σ) *et* (s) *sont inverses l'une de l'autre dans le sens de ce No.*

2. Si les fonctions ξ, η_1, η_2 dans (1,1) ne contiennent pas p_1, p_2, les fonctions x, y_1, y_2 de (1,3) sont indépendantes de π_1, π_2.

En effet, les 3 fonctions dans (1,1) sont assurément indépendantes, puisque dans le cas contraire il existerait une relation entre ξ, η_1, η_2 et alors les équations (1,3) ne seraient pas résolubles pour le couple „général" y_1, y_2.

Donc on peut exprimer x, y_1, y_2 comme fonctions de ξ, η_1, η_2. Mais d'un autre côté, d'après nos hypothèses, ces 3 fonctions sont exprimables par les expressions de droite en (1,3). Donc, si ces 3 expressions n'étaient pas indépendantes de π_1, π_2, on obtiendrait du moins une équation différentielle pour $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ et le couple η_1, η_2 ne serait pas „général".

Il s'agit donc dans ce cas d'une transformation ponctuelle et de son inverse.

Dans ce qui suit nous allons supposer, si le contraire n'est pas dit explicitement, que les transformations (1,1), (1,3) ne se réduisent pas à des transformations ponctuelles. Alors au moins l'une des variables p_1, p_2 entre effectivement dans (1,1), et au moins l'une des variables π_1, π_2 entre effectivement dans (1,3).

3. Les expressions (1,2) de π_1, π_2 contiennent z_1, z_2. Nous allons maintenant montrer que *ces expressions contiennent effectivement au moins l'une des variables* z_1, z_2, *s'il ne s'agit pas d'une transformation ponctuelle.*

En effet, si π_1 et π_2 étaient indépendantes de z_1, z_2, il résulte des formules (1,2) que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \eta'_{1\,p_1} & \eta'_{1\,p_2} \\ \eta'_{2\,p_1} & \eta'_{2\,p_2} \\ \xi'_{p_1} & \xi'_{p_2} \end{pmatrix}$$

serait égal à 1. Mais alors les 3 fonctions η_1, η_2, ξ, considérées comme fonctions de p_1, p_2, seraient toutes les 3 exprimables par l'une d'elles. Il existerait donc une fonction $p = p(x, y_1, y_2, p_1, p_2)$ telle que ξ, η_1, η_2 pourraient être exprimés en fonctions de 4 variables x, y_1, y_2, p:

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{\xi}\,(x, y_1, y_2, p) \quad , \\ \eta_1 &= \bar{\eta}_1\,(x, y_1, y_2, p) \quad , \\ \eta_2 &= \bar{\eta}_2\,(x, y_1, y_2, p) \quad . \end{aligned}$$

Alors on a pour η_1 et η_2:

$$\pi_1 = \frac{\bar{\eta}'_{1x} + p_1 \bar{\eta}'_{1y_1} + p_2 \bar{\eta}'_{1y_2} + \bar{\eta}'_{1p} \dfrac{dp}{dx}}{\bar{\xi}'_x + p_1 \bar{\xi}'_{y_1} + p_2 \bar{\xi}'_{y_2} + \bar{\xi}'_p \dfrac{dp}{dx}},$$

$$\pi_2 = \frac{\bar{\eta}'_{2x} + p_1 \bar{\eta}'_{2y_1} + p_2 \bar{\eta}'_{2y_2} + \bar{\eta}'_{2p} \dfrac{dp}{dx}}{\bar{\xi}'_x + p_1 \bar{\xi}'_{y_1} + p_2 \bar{\xi}'_{y_2} + \bar{\xi}'_p \dfrac{dp}{dx}}.$$

Or,

$$\frac{dp}{dx} = z_1 p'_{p_1} + z_2 p'_{p_2} + p_1 p'_{y_1} + p_2 p'_{y_2} + p'_x$$

contient effectivement une des variables z_1 et z_2 qui n'entrent pas d'après notre hypothèse dans π_1, π_2. On a donc

$$\pi_1 = \frac{\bar{\eta}'_{1p}}{\bar{\xi}'_p}, \quad \pi_2 = \frac{\bar{\eta}'_{2p}}{\bar{\xi}'_p};$$

mais les expressions de droite ne dépendant ici que de x, y_1, y_2, p, nous aurions exprimé 5 grandeurs

$$\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2 \tag{3,1}$$

en fonctions de 4 grandeurs x, y_1, y_2, p.

Il existerait donc une relation non-identique entre les 5 grandeurs (3,1) tandis que η_1, η_2 est un couple „général" de fonctions de ξ.

En particulier il n'est donc pas possible que dans une transformation (1,1) qui ne se réduit pas à une transformation ponctuelle, les 5 expressions (3,1) s'expriment au moyen de x, y_1, y_2, p_1, p_2.

Les transformations de contact dans le sens étroit de Sophus Lie ne peuvent donc pas être généralisées au cas de 2 fonctions d'une variable indépendante si l'on ne veut pas se borner aux transformations ponctuelles [2]).

4. *Exemples.* I. Posons

$$\eta_2 = p_1 + p_2, \quad \eta_1 = y_1 + y_2 - x(p_1 + p_2), \quad \xi = y_2 - x(p_1 + p_2). \tag{4,1}$$

On a évidemment

$$\pi_1 = \frac{\dfrac{d\eta_1}{dx}}{\dfrac{d\xi}{dx}} = \frac{-x(p_1 + p_2)'_x}{-x(p_1 + p_2)'_x - p_1}, \quad \pi_2 = \frac{(p_1 + p_2)'_x}{-x(p_1 + p_2)'_x - p_1},$$

donc

[2]) Cf. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, T. I. (1896), pp. 478 — 480.

$$x = -\frac{\pi_1}{\pi_2}\ ,\ y_1 = \eta_1 - \xi\ ,\ y_2 = \xi - \frac{\pi_1}{\pi_2}\eta_2\ . \tag{4,1^0}$$

II. Pour

$$\xi = p_2, \qquad \eta_1 = y_1, \qquad \eta_2 = y_2 - xp_2 \tag{4,2}$$

on obtient

$$\pi_1 = \frac{p_1}{p'_{2x}}\ ,\ \pi_2 = \frac{p_2 - p_2 - xp'_{2x}}{p'_{2x}} = -x\ ,$$

$$x = -\pi_2, \qquad y_1 = \eta_1, \qquad y_2 = \eta_2 - \xi\pi_2, \tag{4,2^0}$$

c'est essentiellement la transformation de Legendre.

III. En posant

$$\xi = x\ ,\ \eta_1 = \frac{p_1}{p_2}\ ,\ \eta_2 = y_1 - \frac{p_1}{p_2}y_2\ , \tag{4,3}$$

on a

$$\pi_1 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x\ ,\ \pi_2 = p_1 - p_2\frac{p_1}{p_2} - y_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x\ ,$$

$$y_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1}\ ,\ y_1 = \eta_2 - \frac{\pi_2}{\pi_1}\eta_1\ ,\ x = \xi\ . \tag{4,3^0}$$

IV. Des formules

$$\xi = \frac{p_1}{p_2}x\ ,\ \eta_1 = y_1\ ,\ \eta_2 = y_2\ , \tag{4,4}$$

il résulte

$$\pi_1 = \frac{p_1}{\frac{p_1}{p_2} + x\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x}\ ,\ \pi_2 = \frac{p_2}{\frac{p_1}{p_2} + x\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x}\ ,\ \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x = \frac{\pi_2}{\pi_1}\xi\ ,\ y_1 = \eta_1\ ,\ y_2 = \eta_2\ . \tag{4,4^0}$$

Dans cette transformation, chaque point se déplace suivant une parallèle à l'axe des x, le facteur dont se multiplie x étant proportionnel à la tangente de l'angle formé par la projection de l'élément de ligne sur le plan des y_1, y_2 avec l'axe des y_2.

V. Une généralisation de l'exemple précédent est donnée par les formules:

$$\xi = X\left(\frac{p_1}{p_2}, x\right), \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2, \tag{4,5}$$

si

$$D = X'_{\frac{p_1}{p_2}} \not\equiv 0, \quad X'_x \not\equiv 0.$$

En effet, on a

$$\pi_1 = \frac{p_1}{X'_x + D\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x}, \quad \pi_2 = \frac{p_2}{X'_x + D\left(\frac{p_1}{p_2}\right)'_x}, \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

donc en résolvant la première équation (4,5) par rapport à x:

$$x = \Xi\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}, \xi\right), \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2. \tag{4,5^0}$$

VI. Enfin, si

$$\xi = \frac{p_2}{p_1 x}, \quad \eta_1 = y_1 - 2\frac{p_2}{p_1}, \quad \eta_2 = y_2 - \frac{p_2^2}{p_1^2}, \tag{4,6}$$

on obtient

$$\pi_1 = x^2 \frac{p_1 - 2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)'_x}{x\left(\frac{p_2}{p_1}\right)'_x - \frac{p_2}{p_1}}, \quad \pi_2 = x^2 \frac{p_2 - 2\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)'_x}{x\left(\frac{p_2}{p_1}\right)'_x - \frac{p_2}{p_1}}, \quad \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

$$x = \frac{\pi_2}{\pi_1 \xi}, \quad y_1 = \eta_1 + 2\frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad y_2 = \eta_2 + \frac{\pi_2^2}{\pi_1^2}. \tag{4,6^0}$$

§ 2. Les fonctions r et ϱ

5. Désignons par

$$\kappa(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)$$

une fonction de ses 5 arguments jouissant de la propriété de rester indépendante de z_1, z_2 quand on y exprime les arguments $\xi, \ldots, \pi_2$ par $x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2$. Par exemple, les 3 fonctions x, y_1, y_2 dans (1,3) jouissent de cette propriété.

Posons

$$\delta = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \tag{5,1}$$

Alors on peut écrire (1,2) dans la forme

$$\pi_\nu = \frac{\delta\eta_\nu + z_1 \eta'_{\nu p_1} + z_2 \eta'_{\nu p_2}}{\delta\xi + z_1 \xi'_{p_1} + z_2 \xi'_{p_2}}, \quad \nu = 1, 2. \tag{5,2}$$

Donc, en dérivant κ par rapport à z_1 et z_2:

$$\begin{aligned}&\left(\eta'_{1p_1}(\delta\xi + \xi'_{p_2}z_2) - \xi'_{p_1}(\delta\eta_1 + \eta'_{1p_2}z_2)\right)\kappa'_{\pi_1} + \\ &+ \left(\eta'_{2p_1}(\delta\xi + \xi'_{p_2}z_2) - \xi'_{p_1}(\delta\eta_2 + \eta'_{2p_2}z_2)\right)\kappa'_{\pi_2} = 0\,.\end{aligned} \tag{5,3}$$

$$\begin{aligned}&\left(\eta'_{1p_2}(\delta\xi + \xi'_{p_1}z_1) - \xi'_{p_2}(\delta\eta_1 + \eta'_{1p_1}z_1)\right)\kappa'_{\pi_1} + \\ &+ \left(\eta'_{2p_2}(\delta\xi + \xi'_{p_1}z_1) - \xi'_{p_2}(\delta\eta_2 + \eta'_{2p_1}z_1)\right)\kappa'_{\pi_2} = 0\,.\end{aligned} \tag{5,4}$$

Les deux relations (5,3), (5,4) ne sont pas satisfaites identiquement en κ, sans quoi π_1 et π_2 seraient indépendantes de z_1 et z_2. Donc on obtient pour κ une équation différentielle:

$$\gamma\,\kappa'_{\pi_1} + \kappa'_{\pi_2} = 0\,, \tag{5,5}$$

où γ est indépendant du choix de κ. En plus, γ ne dépend évidemment pas de z_1, z_2, et l'on obtient de (5,3), (5,4) les trois expressions pour γ:

$$\gamma = \frac{\eta'_{1p_1}\xi'_{p_2} - \eta'_{1p_2}\xi'_{p_1}}{\eta'_{2p_1}\xi'_{p_2} - \eta'_{2p_2}\xi'_{p_1}}\,, \tag{5,6}$$

$$\gamma = \frac{\eta'_{1p_2}(\xi'_x + p_1\xi'_{y_1} + p_2\xi'_{y_2}) - \xi'_{p_2}(\eta'_{1x} + p_1\eta'_{1y_1} + p_2\eta'_{1y_2})}{\eta'_{2p_2}(\xi'_x + p_1\xi'_{y_1} + p_2\xi'_{y_2}) - \xi'_{p_2}(\eta'_{2x} + p_1\eta'_{2y_1} + p_2\eta'_{2y_2})}\,, \tag{5,7}$$

$$\gamma = \frac{\eta'_{1p_1}(\xi'_x + p_1\xi'_{y_1} + p_2\xi'_{y_2}) - \xi'_{p_1}(\eta'_{1x} + p_1\eta'_{1y_1} + p_2\eta'_{1y_2})}{\eta'_{2p_1}(\xi'_x + p_1\xi'_{y_1} + p_2\xi'_{y_2}) - \xi'_{p_1}(\eta'_{2x} + p_1\eta'_{2y_1} + p_2\eta'_{2y_2})}\,, \tag{5,8}$$

dont l'une au moins ne devient pas indéterminée.

6. La condition (5,5) est évidemment nécessaire et suffisante pour que κ jouisse de la propriété en question. Or, $\gamma = \gamma(\xi, \eta_1, \ldots, \pi_2)$, jouit aussi de la propriété de rester, exprimé par $x, y_1, \ldots$, indépendant de z_1 et z_2. Donc

$$\gamma\,\gamma'_{\pi_1} + \gamma'_{\pi_1} = 0\,. \tag{6,1}$$

γ pourrait très bien être 0 ou ∞ (dans ce dernier cas, l'équation (5,5) se réduit à $\kappa'_{\pi_1} = 0$) ou bien, plus généralement, être indépendant de π_1 et π_2. Nous distinguons trois cas:

1. γ est fini et indépendant de π_1, π_2. Alors, nous posons

$$\varrho = \pi_1 - \gamma\,(\xi, \eta_1, \eta_2)\,\pi_2\,. \tag{6,2}$$

2. γ dépend au moins d'une des variables π_1, π_2. Alors, nous posons

$$\varrho = \gamma \,. \tag{6,3}$$

3. γ est égal à ∞. Alors, nous posons

$$\varrho = \pi_2 . \tag{6,4}$$

7. Dans le cas 2. $\varrho = \gamma$, ϱ est aussi une intégrale de (5,5), donc chaque fonction κ s'exprime par ϱ, en adjoignant ξ, η_1, η_2. Or l'expression $\pi_1 - \varrho\pi_2$ satisfait elle aussi la condition (5,5). Donc cette expression s'exprime par $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$:

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi\,(\varrho\,;\, \xi, \eta_1, \eta_2)\,. \tag{7,1}$$

Dans les cas 1. et 3, κ est une fonction de $\pi_1 - \gamma\pi_2$ ou de π_2. Donc, dans tous les trois cas κ est une fonction de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$.

Nous supposons dès maintenant que x, y_1, y_2 dans (1,3) sont exprimés en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, et les dérivées partielles sont à calculer dans cette hypothèse.

Dans l'exemple II du No. 4 on a $\varrho = \pi_2$, dans les exemples I, III—VI: $\varrho = \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$.

8. Considérons maintenant une fonction $k\,(x, y_1, y_2, p_1, p_2)$ qui, exprimée par les variables grecques, ne dépende pas de ζ_1, ζ_2. Il résulte évidemment d'un raisonnement complètement symétrique au précédent que notre fonction k satisfait à une équation différentielle

$$c k'_{p_1} + k'_{p_2} = 0 \;, \quad c = c\,(x\,,\, y_1\,,\, y_2\,,\, p_1\,,\, p_2) \;, \tag{8,1}$$

où la fonction c appartient, elle aussi, à la classe des fonctions k et satisfait à l'équation différentielle

$$c\, c'_{p_1} + c'_{p_2} = 0 \tag{8,2}$$

De même, posons $r = c$, si c dépend effectivement d'une des variables p_1, p_2. Si c est indépendant de p_1, p_2 et fini, posons

$$r = p_1 - c\,(x, y_1, y_2)\, p_2 \;; \tag{8,3}$$

Enfin, pour $c = \infty$, soit

$$r = p_2 \,. \tag{8,4}$$

Dans le cas $c = r$ il existe une fonction $f(r\,;\, x, y_1, y_2)$ telle que

$$p_1 - r p_2 = f(r\,;\, x, y_1, y_2)\,. \tag{8,5}$$

Dans tous les trois cas chaque fonction k s'exprime par x, y_1, y_2, r.

Dans ce qui suit nous supposerons que ξ, η_1, η_2 en (1,1) sont exprimés en fonctions de x, y_1, y_2, r, et leurs dérivées partielles sont à calculer dans cette hypothèse.

Or, ϱ, exprimé en fonction des variables latines, appartient évidemment à la classe des fonctions k. Il en résulte que ϱ peut être exprimé par x, y_1, y_2, r:

$$\varrho = \varrho\,(x, y_1, y_2, r)\,. \tag{8,6}$$

De même r s'exprime par $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$:

$$r = r\,(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)\,. \tag{8,7}$$

Dans les exemples I, II du No. 4 on a resp.: $r = p_1 + p_2$; $r = p_2$; et dans les exemples III—VI: $r = \dfrac{p_1}{p_2}$.

9. La fonction $r = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$, définie par (8,3) au moyen d'une fonction arbitraire $c(x, y_1, y_2)$, ou bien par (8,5) au moyen d'une fonction arbitraire $f(r, x, y_1, y_2)$, ou bien par (8,4) comme p_2, possède la propriété qu'en posant $r = c_0$ et en variant la constante c_0, on obtienne un *champ de droites* dans le plan des p_1, p_2. Les variables x, y_1, y_2 sont alors à considérer comme paramètres.

Or, il est facile de voir que, réciproquement, au champ le plus général de droites $\mathfrak{F}$ du plan des p_1, p_2, dépendant des paramètres x, y_1, y_2, correspond une et une seule fonction $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$, définie comme en haut, telle que le champ $\mathfrak{F}$ consiste en les lignes de niveau de r.

En effet, soit

$$A(t)p_1 + B(t)p_2 = C(t) \tag{9,1}$$

l'équation de la droite générale de $\mathfrak{F}$, dont on obtient les droites individuelles pour les valeurs particulières de t.

Alors, si $A(t) \neq 0$, on peut supposer dès le commencement $A(t) \equiv 1$. Maintenant, si $B(t)$ ne dépend pas de t, posons $c = -B(t)$, alors

$$r = p_1 - cp_2 \tag{9,2}$$

est une fonction dont les lignes de niveau forment le champ $\mathfrak{F}$.

Si $B(t)$ dépend effectivement de t, posons $B(t) = -r$ et exprimons $C(t)$ par r:

$$C(t) = f(r, x, y_1, y_2)\,.$$

Alors l'équation générale des droites de $\mathfrak{F}$ est

$$p_1 - r p_2 = f(r, x, y_1, y_2) \ . \tag{9,3}$$

Donc $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des lignes de niveau de la fonction r tirée de (9,3).

Si enfin $A(t) = 0$, l'équation (9,1) se réduit à

$$p_2 = \frac{C(t)}{B(t)} = r \ ;$$

donc $\mathfrak{F}$ consiste, dans ce cas aussi, en les lignes de niveau de la fonction $r = p_2$.

10. Supposons de l'autre côté que la fonction $F(p_1, p_2)$ soit une fonction générale dont les lignes de niveau sont des droites. Alors, l'inclinaison de la tangente le long d'une ligne de niveau $F(p_1, p_2) = c$ étant constante, F'_{p_1}/F'_{p_2} doit être une fonction de F:

$$\frac{F'_{p_1}}{F'_{p_2}} = \varphi(F) \ ;$$

donc, en écrivant que le Jacobien des deux fonctions F et $\frac{F'_{p_1}}{F'_{p_2}}$ est 0 :

$$F'^2_{p_2} F''_{p_1 p_1} - 2 F'_{p_1} F'_{p_2} F''_{p_1 p_2} + F'^2_{p_1} F''_{p_2 p_2} = 0 \ ^{3)} \ . \tag{10,1}$$

11. En interprétant p_1, p_2 comme des grandeurs caractéristiques d'un élément de ligne issu du point $P(x, y_1, y_2)$, on a une relation linéaire entre p_1 et p_2 pour $r =$ const., donc un élément de surface passant par x, y_1, y_2. Un ensemble de ∞^4 éléments de surface, tel que par chaque point général de l'espace passent ∞^1 éléments de surface de cet ensemble, sera appelé dans la suite un *champ d'éléments de surface.*

La fonction $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ fait correspondre à chaque point P de l'espace S des (x, y_1, y_2) à trois dimensions, ∞^1 éléments de surface passant par P, caractérisés par la valeur de r. L'ensemble de ces ∞^1 éléments de surface forme donc un champ D d'éléments de surface. Le fait analogue étant exact pour l'espace Σ des (ξ, η_1, η_2), on voit donc que notre transformation est une transformation entre les deux champs D et Δ d'éléments de surface, ainsi définis au moyen des deux fonctions r et ϱ.

Le champ D peut être caractérisé dans les trois cas considérés au No. 8, comme l'ensemble des éléments de surface appartenant à une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.

---

[3]) Dans notre discussion est évidemment contenue la détermination de l'intégrale générale de l'équation (10,1).

Dans le cas I, où la fonction r est donnée par (8,5), les éléments de ligne passant par $P(x, y_1, y_2)$ et correspondant à un r fixe, satisfont à la relation

$$dy_1 - r dy_2 - f(r, x, y_1, y_2)\, dx = 0\,, \qquad (11,1;\mathrm{I})$$

et sont donc situés sur l'élément de surface passant par P et dont les coordonnées de direction p, q ont les valeurs

$$p = \frac{\partial y_1}{\partial x} = f(r\,, x\,, y_1\,, y_2) \quad , \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = r\ .$$

Ces éléments de surface appartiennent à l'équation différentielle aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = f\left(\frac{\partial y_1}{\partial y_2}\,, y_1\,, y_2\,, x\right)\ . \qquad (\mathrm{I})$$

Dans le cas II, où r est donné par (8,3), on a pour une valeur fixe de r l'élément de surface

$$dy_1 - c(x, y_1, y_2)\, dy_2 - r dx = 0 \qquad (11,1;\mathrm{II})$$

aux coordonnées de direction

$$p = \frac{\partial y_1}{\partial x} = r \quad , \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = c(x\,, y_1\,, y_2)\ .$$

L'équation différentielle aux dérivées partielles correspondante est

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = c(x\,, y_1 \,.\, y_2)\ . \qquad (\mathrm{II})$$

Dans ce cas, les ∞^1 éléments de surface passant par un point P tournent autour d'un axe orthogonal à l'axe des x, mais non parallèle à l'axe des y_1.

Enfin, dans le cas III, où r est donné par (8,4), l'élément de surface correspondant à un r fixe, est donné par

$$dy_2 - r dx = 0\ . \qquad (11,1;\mathrm{III})$$

Ces éléments de surface sont tous parallèles à l'axe des y_1. Dans l'équation différentielle correspondante on prendra y_2 comme fonction de x et y_1, et l'on aura

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0\ . \qquad (\mathrm{III})$$

Il est évident qu'en permutant les variables x, y_1, y_2 convenablement, chacun des cas II, III se réduit au cas I.

On peut aussi caractériser les éléments de surface au moyen des cosinus directeurs de la normale:

$$\alpha = \cos(n, x), \qquad \beta = \cos(n, y_1), \qquad \gamma = \cos(n, y_2), \tag{11,2}$$

de sorte que l'on ait

$$p : q : -1 = \alpha : \gamma : \beta, \quad p = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad q = -\frac{\gamma}{\beta}. \tag{11,3}$$

On obtient alors dans les cas I, II, III resp. pour les champs d'éléments de surface correspondant à ces cas:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \dfrac{\alpha}{\beta} = -f\left(-\dfrac{\gamma}{\beta}, x, y_1, y_2\right), \ \beta \neq 0 \ ; \\[2ex] \text{II} & \dfrac{\gamma}{\beta} = -c(x, y_1, y_2), \ \beta \neq 0 \ ; \\[2ex] \text{III} & \beta = 0 \ . \end{array}$$

Les équations différentielles correspondant aux exemples I, II, III du No. 4 sont:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = -1 \ ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 \ ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \ .$$

Relevons enfin qu'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y, z\right) = 0 \tag{11,4}$$

peut toujours être réduite à une des formes (I), (II), (III).

Si F contient $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, (11,4) équivaut à (I). Si F ne contient que $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, (11,4) se réduit à (II). Enfin (III) est le cas limite de (II) pour $c = \infty$.

Notre transformation R correspond donc à une transformation d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre dans S en une équation analogue dans Σ.

Nous verrons au § 10 que notre transformation entre D et Δ s'obtient au moyen d'une transformation de contact, faisant correspondre les deux équations différentielles en question l'une à l'autre.

Les champs d'éléments de surface correspondant aux équations *linéaires* jouent dans la suite un rôle particulier. Ces champs sont carac-

térisés par le fait que leurs éléments de surface passant par un point général P tournent autour d'un élément de ligne — l'*axe du champ dans* P. Un tel champ d'éléments de surface sera appelé *linéaire*.

Aux cas des types II et III correspondent toujours des champs linéaires. Quant au type I, la condition nécessaire et suffisante pour que le champ correspondant soit linéaire, est que f soit un polynôme en r, au plus linéaire.

En désignant les cosinus directeurs de l'axe l par

$$\alpha_0 = \cos(l, x), \qquad \beta_0 = \cos(l, y_1), \qquad \gamma_0 = \cos(l, y_2), \tag{11,5}$$

et en posant dans le cas I: $f(r, x, y_1, y_2) = A(x, y_1, y_2)r + B(x, y_1, y_2)$, on a pour les cosinus directeurs d'un élément de surface général du champ dans les cas I, II, III resp.:

$$\text{(I)}\ \alpha + B\beta - A\gamma = 0, \qquad \text{(II)}\ c\beta + \gamma = 0, \qquad \text{(III)}\ \beta = 0, \tag{11,6}$$

donc pour l'axe du champ:

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = \begin{cases} 1 : B : -A\ ,\ f = Ar + B & \text{(I)} \\ 0 : C : 1 & \text{(II)} \\ 0 : 1 : 0 & \text{(III)} \end{cases} \tag{11,7}$$

§ 3. Les formes adjointes et la réduction aux transformations ponctuelles en 4 variables

12. Posons

$$d\sigma = \begin{cases} d\eta_1 - \varrho d\eta_2 - \varphi d\xi & \text{(I)} \\ d\eta_1 - \gamma d\eta_2 - \varrho d\xi & \text{(II)} \\ d\eta_2 - \varrho d\xi & \text{(III)} \end{cases} \tag{12,1}$$

suivant que γ contient effectivement l'une des deux variables η_1, η_2, en est indépendant, ou devient ∞.

De même soit

$$ds = \begin{cases} dy_1 - r\,dy_2 - f\,dx & \text{(I)} \\ dy_1 - c\,dy_2 - r\,dx & \text{(II)} \\ dy_2 - r\,dx & \text{(III)} \end{cases} \tag{12,2}$$

suivant que c contient effectivement l'une des variables p_1, p_2, en est indépendant, ou devient ∞.

Les formes ds et $d\sigma$ seront appelées dans la suite la première et la seconde *forme adjointe correspondant à la transformation R* considérée. Nous distinguerons les formes adjointes des types I, II, III, suivant que la première, la deuxième ou la troisième des formules (12,1) respectivement (12,2) est valable.

En posant

$$d\sigma = \varepsilon d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi \ , \tag{12,3}$$

$$ds = e dy_1 - a dy_2 - b dx \ , \tag{12,4}$$

il résulte de (6,2), (6,4), (7,1), (8,3), (8,4) et (8,5):

$$e p_1 = a p_2 + b \ , \tag{12,5}$$

$$\varepsilon \pi_1 = \alpha \pi_2 + \beta \ . \tag{12,6}$$

13. En utilisant les expressions de ξ, η_1, η_2 par x, y_1, y_2, r, on remplacera les formules (5,2) par

$$\pi_\nu = \frac{\delta\eta_\nu + \eta'_{\nu r}\, w}{\delta\xi + \xi'_r\, w} \ ; \ w = r'_{p_1} z_1 + r'_{p_2} z_2 \ . \tag{13,1}$$

Il en résulte pour $\beta = \varepsilon\pi_1 - \alpha\pi_2$:

$$\beta = \frac{(\varepsilon\,\delta\eta_1 - \alpha\,\delta\eta_2) + w(\varepsilon\,\eta'_{1r} - \alpha\,\eta'_{2r})}{\delta\xi + \xi'_r\, w} \ .$$

Or, β étant dans tous les cas indépendant de z_1, z_2, donc de w, il résulte

$$\beta\,\delta\xi + \alpha\,\delta\eta_2 = \varepsilon\,\delta\eta_1 \ ; \ \beta\,\xi'_r + \alpha\,\eta'_{2r} = \varepsilon\,\eta'_{1r} \ . \tag{13,2}$$

Mais, d'après (5,1) et (12,5), pour $e = 1$:

$$\left.\begin{aligned} \delta\xi &= (\xi'_x + b\,\xi'_{y_1}) + p_2(\xi'_{y_2} + a\,\xi'_{y_1}) \\ \delta\eta_\nu &= (\eta'_{\nu x} + b\,\eta'_{\nu y_1}) + p_2(\eta'_{\nu y_2} + a\,\eta'_{\nu y_1}) \ , \ \nu = 1, 2 \ . \end{aligned}\right\} \tag{13,3}$$

En introduisant ces valeurs dans la première des relations (13,2), on obtient:

$$\begin{aligned} &\{\ \beta(\xi'_x + b\,\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2x} + b\eta'_{2y_1}) - \varepsilon(\eta'_{1x} + b\eta'_{1y_1})\ \} + \\ &+ p_2\{\ \beta(\xi'_{y_2} + a\,\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2y_2} + a\eta'_{2y_1}) - \varepsilon(\eta'_{1y_2} + a\eta'_{1y_1})\ \} = 0 \ . \end{aligned}$$

Or, les expressions entre parenthèses étant indépendantes de p_2, cette relation se décompose en deux, que nous écrivons avec la deuxième des équations (13,2):

$$\left.\begin{aligned} &\beta(\xi'_x + b\,\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2x} + b\,\eta'_{2y_1}) = \varepsilon(\eta'_{1x} + b\,\eta'_{1y_1}) \;, \\ &\beta(\xi'_{y_2} + a\,\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2y_2} + a\,\eta'_{2y_1}) = \varepsilon(\eta'_{1y_2} + a\,\eta'_{1y_1}) \;, \\ &\beta\,\xi'_r + \alpha\,\eta'_{2r} = \varepsilon\,\eta'_{1r} \;. \end{aligned}\right\} \tag{13,4}$$

Multiplions ces 3 équations respectivement par dx, dy_2, dr et faisons la somme; on obtient

$$\beta(d\xi - \xi'_{y_1}\,ds) + \alpha(d\eta_2 - \eta'_{2y_1}\,ds) - \varepsilon(d\eta_1 - \eta'_{1y_1}\,ds) = 0 \;,$$

$$d\sigma = \mu\,ds \;, \tag{13,5}$$

$$\mu = \varepsilon\,\eta'_{1y_1} - \alpha\,\eta'_{2y_1} - \beta\,\xi'_{y_1} \;. \tag{13,6}$$

La formule (13,6) s'obtient du reste immédiatement de (13,5), en y comparant des deux côtés les coefficients de dy_1. Pour $e = 0$ on obtient les relations correspondant à (13,3) en permutant les indices 1 et 2 et en posant $a = 0$. Les formules correspondant aux équations (13,4) s'obtiennent de la même façon, et l'on arrive dans ce cas aussi aux formules (13,5) et (13,6).

14. Nous pouvons maintenant formuler le résultat suivant:

Théorème I. Les substitutions σ et s d'une transformation R s'obtiennent à partir d'une transformation ponctuelle de l'espace à 4 dimensions:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x\;, y_1, y_2, r) \;; & \varrho &= \varrho(x, y_1, y_2, r) \;; \\ \eta_1 &= \eta_1(x, y_1, y_2, r) \;; & \eta_2 &= \eta_2(x, y_1, y_2, r) \;, \end{aligned}\right\} \tag{14,1}$$

et de son inverse

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \;; & r &= r(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \;; \\ y_1 &= y_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \;; & y_2 &= y_2(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) \;; \end{aligned}\right\} \tag{14,2}$$

satisfaisant à l'équation (13,5), *en y remplaçant r et ϱ par les expressions tirées suivant le cas, la première d'une des équations*

$$p_1 - r p_2 = f(r, y_1, y_2, x), \quad r = p_1 - c(x, y_1, y_2)\,p_2, \; r = p_2, \tag{14,3}$$

et la seconde d'une des équations

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi(\varrho, \eta_1, \eta_2, \xi)\,, \quad \varrho = \pi_1 - \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2)\pi_2, \quad \varrho = \pi_2. \tag{14,4}$$

Chaque couple des substitutions σ, s obtenu de cette façon, appartient à une transformation R. — Nous avons encore à démontrer la dernière assertion de ce théorème.

Supposons en effet que, étant donné un couple de deux fonctions arbitraires:

$$f = f(r, y_1, y_2, x) \quad \text{ou} \quad c = c(x, y_1, y_2) \quad \text{ou} \quad c = \infty\,;$$
$$\varphi = \varphi(\varrho, \eta_1, \eta_2, \xi) \quad \text{ou} \quad \gamma = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2) \quad \text{ou} \quad \gamma = \infty\,,$$

la transformation ponctuelle (14,1), (14,2) satisfasse à la condition (13,5); alors je dis, qu'en remplaçant ϱ et r resp. par des fonctions de π_1, π_2, η_1, η_2, ξ ou de p_1, p_2, y_1, y_2, x, tirées de (14,3) et (14,4), on obtient deux transformations σ, s, inverses l'une de l'autre.

En effet, supposons que y_1, y_2 soient deux fonctions indéterminées de x, et p_1, p_2 leurs dérivées premières. Alors la forme différentielle $e\,dy_1 - a\,dy_2 - b\,dx$ devient $(ep_1 - ap_2 - b)\,dx$, donc 0. Il en résulte que l'expression de gauche en (13,5) disparaît aussi. Donc on a

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi(\varrho) \quad \text{ou} \quad \pi_1 - \gamma\pi_2 = \varrho \quad \text{ou bien} \quad \pi_2 = \varrho\,,$$

et l'on a pour la grandeur ϱ obtenue de (14,1), la relation correspondante (14,4). Donc, d'après (14,2), x, y_1, y_2 s'expriment par ξ, η_1, η_2, π_1, π_2; et, le même raisonnement étant applicable à partir de la transformation (14,2) et des fonctions η_1, η_2 de ξ, les hypothèses du No. 2 sont en effet satisfaites.

La transformation (14,1), (14,2), ainsi que les expressions r, ϱ, et les formes adjointes ds, $d\sigma$ sont évidemment, d'après notre discussion, univoquement déterminées par la transformation R donnée.

Quant à la question, dans quelle mesure la transformation (14,1), (14,2) et les formes adjointes ds, $d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement, nous nous en occuperons dans les §§ 4 et 5. Dans le § 4 nous montrerons que les deux formes ds, $d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement. Dans le § 5 nous établirons les conditions sous lesquelles une transformation ponctuelle de l'espace de 4 dimensions peut conduire, au sens du théorème I, à une transformation R.

Dans le cas, où dans une forme adjointe ds le coefficient b est linéaire et entier en r, c'est-à-dire correspond à un champ linéaire d'éléments de surface et à une équation différentielle linéaire, nous parlons d'une forme adjointe *axiale*, et les axes du champ correspondant d'éléments de surface sont aussi appelées les *axes de ds*.

Voici les formes ds, $d\sigma$ correspondant aux exemples I, II et III—VI du No. 4:

$$ds = dy_1 + dy_2 - r dx\,, \qquad d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2\,, \tag{I}$$

$$ds = dy_2 - r dx\,, \qquad d\sigma = d\eta_2 - \varrho d\xi\,, \tag{II}$$

$$ds = dy_1 - r dy_2\,, \qquad d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2\,. \tag{III—VI}$$

15. Considérons parallèlement à la transformation R, σ, (1,1), satisfaisant à la condition (13,5), une transformation R, S, appliquée aux variables ξ, η_ν, π_ν:

$$\begin{aligned} X &= X(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \\ Y_\mu &= Y_\mu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)\,, \quad \mu = 1, 2, \end{aligned} \tag{15,1}$$

et satisfaisant à la condition

$$dS = \mu_1 d\sigma_1 \tag{15,2}$$

analogue à (13,5).

Formons le „produit" $S\sigma$ en substituant dans (15,1) les valeurs (1,1) et (1,2). Sous quelle condition la transformation résultante sera-t-elle aussi une transformation R?

Tout d'abord les expressions de gauche en (15,1) devraient posséder la propriété de devenir indépendantes de z_1, z_2 quand on y exprime les arguments $\xi, \ldots, \pi_2$ par $x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2$. Mais alors, ces fonctions sont des fonctions du type des fonctions κ, considérées au No. 5, et sont exprimables en fonction de 4 arguments ξ, η_1, η_2, ϱ, où ϱ est la fonction définie pour la transformation σ. On a donc

$$d\sigma_1 = d\sigma\,, \tag{15,3}$$

et la transformation $S\sigma$ satisfait à la relation

$$dS = \mu_1 \mu d\sigma\,. \tag{15,4}$$

16. Il résulte de (15,3) en particulier, que le produit σ^2 d'une transformation σ par elle-même ne peut être une transformation R que si l'on a

$$\varrho = r\,(\pi_1, \pi_2, \xi\,, \eta_1, \eta_2)\,. \tag{16,1}$$

Une transformation de ce type, pour laquelle les 2 formes adjointes s'expriment de la même façon au moyen des variables et des différentielles correspondantes, sera appelée *symétrique*.

Il résulte maintenant de (15,3) que toutes les transformations R

formant un groupe donné, sont des transformations symétriques avec la même forme adjointe. Les transformations ponctuelles en 4 variables, correspondant aux transformations R d'un groupe, possèdent alors leur forme adjointe comme un invariant relatif.

S'il s'agit en particulier de la forme adjointe

$$dy_1 = p_1 dx\,, \qquad r = p_1\,, \qquad \varrho = \pi_1\,, \tag{16,2}$$

les transformations R correspondantes se réduisent évidemment aux transformations de contact au sens de Lie, dans le plan des x, y_1, en y adjoignant une transformation de la forme

$$\eta_2 = F(x, y_1, y_2, p_1)\,. \tag{16,3}$$

Si deux formes adjointes $d\sigma$, ds se correspondent par des transformations σ, s, du type (14,1), (14,2), elles sont *équivalentes*.

Soit maintenant S une transformation générale du type (14,1), qui possède $d\sigma$ comme un invariant relatif. Alors on obtient évidemment la transformation générale possédant ds comme un invariant relatif, dans la forme

$$\sigma S \sigma^{-1}\,.$$

Les groupes de transformations appartenant aux formes adjointes équivalentes sont isomorphes. Or, *toutes les formes adjointes sont équivalentes entre elles*, comme nous le montrerons au § 4. Il en résulte que les groupes de transformations R appartenant à une forme adjointe $d\sigma$, sont isomorphes aux groupes appartenant à la forme adjointe (16,2), qu'on obtient de la théorie des transformations de contact du plan.

§ 4. Equivalence des formes adjointes

17. Nous allons d'abord dire quelques mots sur l'*équivalence de deux formes adjointes par rapport à une transformation ponctuelle en trois variables*. Soit donnée une forme adjointe dans Σ:

$$d\sigma = d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi\,. \tag{17,1}$$

Considérons une transformation ponctuelle entre S et Σ:

$$\left.\begin{array}{ll} x = x(\xi, \eta_\mu)\,, & y_\nu = y_\nu(\xi, \eta_\mu)\,, \\ \xi = \xi(x, y_\nu)\,, & \eta_\mu = \eta_\mu(x, y_\nu)\,, \end{array}\right\} \quad \mu, \nu = 1, 2\,. \tag{17,2}$$

$d\sigma$ devient par cette transformation:

$$d\sigma = \mu ds = \mu(dy_1 - a dy_2 - b dx)\,, \tag{17,3}$$

où l'on a, en exprimant les différentielles des variables grecques par celles des variables latines:

$$-a = \frac{\eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2}}{\eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1}}, \quad -b = \frac{\eta'_{1x} - \alpha\eta'_{2x} - \beta\xi'_{x}}{\eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1}}, \tag{17,4}$$

si

$$\eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1} \neq 0 \ . \tag{17,5}$$

18. On voit facilement dans l'hypothèse (17,5) que l'une au moins des expressions a, b dépend effectivement de ϱ. En effet, s'il en était autrement, on pourrait écrire:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_{1x} - \alpha\eta'_{2x} - \beta\xi'_{x} &= a_0\varrho_0 \ , \\ \eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1} &= a_1\varrho_0 \ , \\ \eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2} &= a_2\varrho_0 \ , \end{aligned}\right\} \tag{18,1}$$

où a_0, a_1, a_2 ne dépendent que de x, y_1, y_2.

Donc, le Jacobien de ξ, η_1, η_2 en (17,2) par rapport à x, y_1, y_2 étant $\neq 0$, les trois expressions $\frac{1}{\varrho_0}$, $\frac{\alpha}{\varrho_0}$, $\frac{\beta}{\varrho_0}$ s'exprimeraient par x, y_1, y_2, donc aussi par ξ, η_1, η_2. Mais alors il en serait de même pour α et β, tandis que l'une de ces deux grandeurs est toujours égale à ϱ. —

Mais alors, si a dépend effectivement de ϱ, on posera $r = a$, $b = f(r, x, y_1, y_2)$. Et si a ne dépend pas de ϱ, on posera $a = c$, $b = r$, et ds pourra s'écrire dans l'une des deux formes (12,2).

Si, enfin, (17,5) n'est pas valable:

$$\eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1} = 0 \ , \tag{18,2}$$

l'équation

$$\eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2} = 0 \tag{18,3}$$

est assurément impossible. En effet, dans le cas contraire, les deux équations (18,2) et (18,3) seraient compatibles, tandis que α et β ne sont pas assurément toutes les deux, exprimables par x, y_1, y_2. Donc, l'une de ces deux équations serait conséquence de l'autre, et le Jacobien de ξ, η_1, η_2 par rapport à x, y_1, y_2 serait 0. — On peut donc écrire

$$d\sigma = (\eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2})\ (dy_2 - Ddx) \ , \tag{18,4}$$

où

$$-D = \frac{\eta'_{1x} - \alpha\eta'_{2x} - \beta\xi'_{x}}{\eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2}} \tag{18,5}$$

n'est pas indépendant de ϱ; en effet, dans le cas contraire, on aurait encore les trois équations (18,1) avec $a_1 = 0$, et le même raisonnement serait applicable. On peut donc poser $r = D$, un cas qui se ramène au cas $a = c$, $b = r$ en interchangeant les variables y_1, y_2; ds a alors la troisième des formes (12,2).

On voit donc que, étant donnée une transformation ponctuelle (17,2) et une forme adjointe (17,1), il existe une fonction

$$r = r(\xi, \eta_\mu, \varrho) \tag{18,6}$$

telle qu'en adjoignant (18,6) aux expressions (17,2) de x et y_ν, on obtienne une transformation de l'espace $(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$ dans l'espace (x, y_1, y_2, r), satisfaisant à la condition (17,3). *a, b et la fonction* (18,6) *sont alors univoquement déterminées par* (17,1) *et* (17,2).

19. Supposons maintenant qu'on ait en particulier $\alpha = 0$, $\beta = \varrho$, un cas qui se ramène, comme nous l'avons dit plus haut, aux transformations de contact du plan.

On obtient alors pour $-a$, $-b$ les expressions

$$-a = \frac{\eta'_{1\nu_2} - \varrho\,\xi'_{y_2}}{\eta'_{1\nu_1} - \varrho\,\xi'_{y_1}}\,, \quad -b = \frac{\eta'_{1x} - \varrho\,\xi'_x}{\eta'_{1\nu_1} - \varrho\,\xi'_{y_1}}\,, \tag{19,1}$$

en supposant que $\eta'_{1\nu_1}$, ξ'_{y_1} ne deviennent pas 0 tous les deux.

Supposons que a contienne effectivement ϱ. On a alors un ds du type I:

$$r = a\,; \qquad f(r, x, y_1, y_2) = b = kr + l\,, \tag{19,2}$$

où k et l s'obtiennent en résolvant les équations

$$\left.\begin{aligned} k\,\eta'_{1\nu_2} - l\,\eta'_{1\nu_1} - \eta'_{1x} &= 0\,, \\ k\,\xi'_{y_2} - l\,\xi'_{y_1} - \xi'_x &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19,3}$$

Or, je dis qu'*on peut faire k et l égales à deux fonctions arbitraires de x, y_1, y_2 en choisissant convenablement la transformation* (17,2). Il suffit en effet de déterminer η_1 et ξ de manière à satisfaire (19,3), c'est-à-dire de prendre pour ξ, η_1 deux intégrales indépendantes de l'équation aux dérivées partielles

$$z'_x + l\,z'_{y_1} - k\,z'_{y_2} = 0\,, \tag{19,4}$$

qu'on obtient à partir de deux équations différentielles

$$\frac{dy_1}{dx} = -l(x, y_1, y_2) \quad , \quad \frac{dy_2}{dx} = -k(x, y_1, y_2) \quad , \tag{19,5}$$

en exprimant les deux constantes c_1, c_2 dont dépend l'intégrale générale de (19,5), en fonctions de x, y_1, y_2:

$$c_\nu = z_\nu(x, y_1, y_2) \, , \qquad \nu = 1, 2 \, . \tag{19,6}$$

En posant

$$z_1 = \eta_1 \, , \qquad z_2 = \xi \, ,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \eta'_{1y_1} & \eta'_{1y_2} \\ \xi'_{y_1} & \xi'_{y_2} \end{vmatrix}$$

ne sera pas identiquement 0, y_1, y_2 étant exprimables par x, z_1, z_2. Donc, a dépend effectivement de ϱ, et notre assertion est démontrée.

De l'autre côté, une forme adjointe du type II en (12,2) se réduit, en permutant y_2 et x, à une forme adjointe du type I, dans laquelle b est indépendant de r. Donc chaque forme adjointe du type II est équivalente à $d\eta_1 - \varrho d\xi$. Et, quant à la forme adjointe $dy_2 - r dx$, elle se réduit évidemment à $d\eta_1 - \varrho d\xi$, en posant

$$\eta_1 = y_2 \, , \qquad \eta_2 = y_1 \, , \qquad \xi = x \, .$$

Donc:

Théorème II. Pour qu'une forme adjointe ds soit équivalente, par une transformation ponctuelle, à $dy_1 - r dx$, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit axiale.

En particulier, toutes les formes axiales sont équivalentes entre elles par des transformations ponctuelles. — D'ailleurs notre résultat est presque immédiat en termes des équations linéaires correspondantes. Il se réduit à ce que deux équations *linéaires* aux dérivées partielles sont toujours équivalentes par des transformations ponctuelles. En effet, si, dans le cas de trois variables par exemple, $f_1 = c$, $f_2 = c$ sont deux intégrales indépendantes de la première équation, $F_1 = c$, $F_2 = c$ deux intégrales indépendantes de la seconde, il suffit de considérer une transformation ponctuelle par laquelle f_1, f_2 deviennent F_1, F_2.

20. Nous allons maintenant démontrer le théorème annoncé à la fin du No. 16:

Théorème III: Soient

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= \varepsilon d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi \\ ds &= e dy_1 - a dy_2 - b dx \end{aligned}\right\} \tag{20,1}$$

deux formes adjointes. Il existe toujours une transformation R entre les espaces Σ et S, satisfaisant à la condition (13,5).

Démonstration : Il suffit de considérer le cas où $d\sigma$ se réduit à la forme $d\eta_2 - \varrho d\xi$. On a alors à satisfaire à la condition

$$d\eta_2 - \varrho d\xi = \mu(e dy_1 - a dy_2 - b dx) . \tag{20,2}$$

On peut évidemment supposer $e = 1$, puisque dans le cas contraire ds se réduit à $dy_2 - r dx$ et il suffirait de prendre la transformation identique. Alors (20,2) se réduit à

$$\eta'_{2r} - \varrho \xi'_r = 0 \quad , \quad \eta'_{2y_1} - \varrho \xi'_{y_1} = \mu \ ,$$
$$\eta'_{2y_2} - \varrho \xi'_{y_2} = -\mu a \ , \quad \eta'_{2x} - \varrho \xi'_x = -\mu b \ ,$$

ou bien, en éliminant μ :

$$\left.\begin{aligned} &\eta'_{2r} - \varrho \xi'_r = 0 \ , \\ &(\eta'_{2y_2} + a\eta'_{2y_1}) - \varrho(\xi'_{y_2} + a\xi'_{y_1}) = 0 \ , \\ &(\eta'_{2x} + b\eta'_{2y_1}) - \varrho(\xi'_x + b\xi'_{y_1}) = 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{20,3}$$

Mais si η'_{2r} et ξ'_r ne sont pas tous les deux 0, il résulte de (20,3) l'existence de deux fonctions λ, κ, telles que le système des deux équations différentielles

$$\begin{aligned} &z'_{y_2} + a z'_{y_1} - \lambda z'_r = 0 \ , \\ &z'_x + b z'_{y_1} - \kappa z'_r = 0 \end{aligned} \tag{20,4}$$

soit satisfait pour $z = \eta_2$ et pour $z = \xi$.

21. De l'autre côté, si le système (20,4) possède deux intégrales indépendantes, on aura, en les désignant par η_2, ξ, les relations (20,3), où ϱ est une fonction de x, y_1, y_2, r.

En effet, le système

$$z'_r = 0 \ , \ z'_{y_2} + a z'_{y_1} = 0 \ , \ z'_x + b z'_{y_1} = 0 \tag{21,1}$$

n'est pas complet, puisqu'en combinant la première équation (21,1) avec la deuxième et la troisième, on obtient $a'_r z'_{y_1} = 0$, $b'_r z'_{y_1} = 0$, donc, l'une des deux fonctions a, b étant $= r$, la relation

$$z'_{y_1} = 0 \ , \tag{21,2}$$

qui n'est pas une combinaison linéaire de (21,1). Donc, puisque ξ n'est pas constant, l'une au moins des expressions en (21,1) ne s'annule pas pour $z = \xi$, et l'on obtient une expression finie pour ϱ.

Il suffit donc de démontrer qu'en choisissant convenablement λ et κ, le système (20,4) possède au moins deux intégrales indépendantes.

22. Posons

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_2} + a \frac{\partial}{\partial y_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial r} ,$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y_1} - \kappa \frac{\partial}{\partial r} .$$

Alors on a

$$X_1 X_2 - X_2 X_1 = (b'_{y_2} - a'_x + a b'_{y_1} - b a'_{y_1} - \lambda b'_r + \kappa a'_r) \frac{\partial}{\partial y_1} +$$
$$+ (\lambda \kappa'_r - \kappa \lambda'_r + \lambda'_x - \kappa'_{y_2} + b \lambda'_{y_1} - a \kappa'_{y_1}) \frac{\partial}{\partial r} .$$

Or, supposons que les coefficients de $\frac{\partial}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial}{\partial r}$ soient ici identiquement 0. Alors le système (20,4) est *complet* et possède en effet $4 - 2 = 2$ intégrales indépendantes. Il suffit donc de choisir λ et κ de manière à satisfaire aux deux équations différentielles

$$\kappa a'_r - \lambda b'_r + b'_{y_2} - a'_x + a b'_{y_1} - b a'_{y_1} = 0 , \tag{22,2}$$

$$\lambda \kappa'_r - \kappa \lambda'_r + \lambda'_x - \kappa'_{y_2} + b \lambda'_{y_1} - a \kappa'_{y_1} = 0 . \tag{22,3}$$

On considérera ici deux cas, suivant que $a = r$ ou $b = r$. Dans le *premier* cas il résulte de (22,2).

$$\kappa = \lambda f'_r - f'_{y_2} - r f'_{y_1} . \tag{22,4}$$

En introduisant cette valeur dans (22,3), on obtient

$$\lambda^2 f''_{rr} - 2 \lambda f''_{r y_2} - 2 \lambda r f''_{r y_1} - \lambda f'_{y_1} + \lambda'_r (f'_{y_2} + r f'_{y_1}) + \lambda'_{y_1} (f - r f'_r) - \lambda'_{y_2} f'_r +$$
$$+ \lambda'_x + f''_{y_2 y_2} + 2 r f''_{y_1 y_2} + r^2 f''_{y_1 y_1} = 0 . \tag{22,5}$$

Il suffit donc de prendre pour λ une solution de (22,5) et d'en déduire la valeur de κ par (22,4).

23. Dans le second cas où $b = r$, $a = c\,(x, y_1, y_2)$, on permutera dans les équations (22,2), (22,3) λ et κ, a et b, y_2 et x, c'est-à-dire les deux équations (20,4). On obtient donc dans ce cas un résultat correspondant

au précédent en effectuant les mêmes permutations dans (22,4) et (22,5), et en y remplaçant f par $c(x, y_1, y_2)$.

Donc, on peut toujours choisir λ et κ de façon à satisfaire (22,2) et (22,3).

Nous avons encore à montrer que la fonction ϱ déduite de (20,3) est indépendante de ξ et η_2. Or, soient u, v deux fonctions de r, x, y_1, y_2 formant avec ξ et η_2 quatre fonctions indépendantes. En introduisant ξ, η_2, u, v comme nouvelles variables indépendantes, les équations (21,1) déviennent

$$X_\nu(z) \equiv \gamma_\nu z'_u + \delta_\nu z'_v + \lambda_\nu z'_\xi + \kappa_\nu z'_{\eta_2} = 0 \ , \ \nu = 1 \ , 2 \ , 3 \qquad (23,1)$$

et il résulte de (20,3):

$$\varrho = \frac{\kappa_\nu}{\lambda_\nu} \ , \ \nu = 1 \ , 2 \ , 3 \ ,$$

où tous les $\varkappa_\nu$, λ_ν ne s'annulent pas, puisque dans le cas contraire les X_ν, donc aussi les équations (21,1) ne seraient pas linéairement indépendantes.

Mais alors les équations $X_\nu = 0$ sont des combinaisons linéaires des équations

$$z'_u = 0 \ , \ z'_v = 0 \ , \ z'_\xi + \varrho z'_{\eta_2} = 0 \ , \qquad (23,2)$$

les équations (23,2) sont donc équivalentes aux équations (21,1), et le système (23,2) n'est pas complet. Donc ϱ ne peut s'exprimer par ξ et η_2 seuls, puisque, si ϱ était indépendant de u et v, le système (23,2) serait évidemment complet.

Le théorème III est démontré.

Une autre démonstration du théorème III résultera des considérations du § 10.

§ 5. Equations différentielles pour ξ, η_1, η_2

24. Quelles conditions doivent être remplies par les fonctions ξ, η_1, η_2 dans (1,1), pour que cette transformation soit une transformation R?

Tout d'abord, ces trois fonctions, comme fonctions de p_1, p_2, doivent être exprimables par l'une d'elles. Donc le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \xi'_{p_1} & \eta'_{1p_1} & \eta'_{2p_1} \\ \xi'_{p_2} & \eta'_{1p_2} & \eta'_{2p_2} \end{pmatrix} \qquad (24,1)$$

doit être égal à 1. En plus, les lignes de niveau de chacune de ces fonctions dans le plan des p_1, p_2 doivent être des droites. Donc chacune de ces 3 fonctions satisfait à l'équation (10,1).

De l'autre côté, si ces conditions sont satisfaites, il existe d'après le No. 9, une fonction $r = r(p_1, p_2, y_1, y_2, x)$ définie par (8,3), (8,4) ou (8,5), telle que ξ, η_1, η_2 soient exprimables par r, x, y_1, y_2.

Nous supposerons donc que les fonctions ξ, η_1, η_2 soient données dans la forme

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(r, x, y_1, y_2) , \\ \eta_1 &= \eta_1(r, x, y_1, y_2) , \\ \eta_2 &= \eta_2(r, x, y_1, y_2) . \end{aligned}\right\} \tag{24,2}$$

Nous allons maintenant déduire les conditions sous lesquelles, en ajoutant aux fonctions (24,2) une quatrième fonction $\varrho = \varrho(r, x, y_1, y_2)$ convenablement choisie, on obtient une transformation satisfaisant à la condition (13,5) avec la forme adjointe ds donnée.

En comparant les coefficients de dr, dy_1, dy_2, dx des deux côtés de (13,5) on obtient

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\eta'_{1r} - \alpha\eta'_{2r} - \beta\xi'_r &= 0 , \\ \varepsilon\eta'_{1y_1} - \alpha\eta'_{2y_1} - \beta\xi'_{y_1} - e\mu &= 0 , \\ \varepsilon\eta'_{1y_2} - \alpha\eta'_{2y_2} - \beta\xi'_{y_2} + a\mu &= 0 , \\ \varepsilon\eta'_{1x} - \alpha\eta'_{2x} - \beta\xi'_x + b\mu &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{24,3}$$

Donc, une des quantités α, β étant $= \varrho$ et $\neq 0$, on a comme *première condition nécessaire* pour ξ, η_1, η_2:

$$\begin{vmatrix} \xi'_r & \eta'_{1r} & \eta'_{2r} & 0 \\ \xi'_{y_1} & \eta'_{1y_1} & \eta'_{2y_1} & -e \\ \xi'_{y_2} & \eta'_{1y_2} & \eta'_{2y_2} & a \\ \xi'_x & \eta'_{1x} & \eta'_{2x} & b \end{vmatrix} = 0 . \tag{24,4}$$

Dès que la condition (24,4) est satisfaite pour trois fonctions indépendantes ξ, η_1, η_2, les rapports de ε, α, β en (24,3) sont univoquement déterminés. Il résulte alors de la comparaison de (12,3) et (12,1) comme *seconde condition nécessaire*, que l'un au moins des trois rapports $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ est indépendant de ξ, η_1, η_2 (donc en particulier est $\neq 0$, $\neq \infty$) .

25. Or il est facile de montrer que, si les trois fonctions ξ, η_1, η_2 de r, x, y_1, y_2 sont indépendantes et satisfont aux conditions déduites au No. précédent, on peut leur adjoindre une quatrième fonction $\varrho =$

$\varrho(r, x, y_1, y_2)$ indépendante de ξ, η_1, η_2, telle que (13,3) soit satisfait. — On suppose naturellement que a et b soient choisis conformément à (12,2).

En effet, supposons d'abord qu'en résolvant (24,3), on ait $\varepsilon \neq 0$. On pourra alors supposer $\varepsilon = 1$. Or, si alors α est indépendant de ξ, η_1, η_2 comme fonctions de r, x, y_1, y_2, on posera

$$\varrho = \varrho\,(r, x, y_1, y_2) = \alpha\,(r, x, y_1, y_2)$$

et exprimera β par $\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2$:

$$\beta(r, x, y_1, y_2) = \varphi(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2)\ ;$$

$d\sigma$ aura alors la première des formes (12,1).

De l'autre côté, si α est exprimable par ξ, η_1, η_2, mais β en est indépendant, on posera

$$\alpha = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2)\,, \qquad \beta = \varrho\,,$$

et $d\sigma$ aura la deuxième des formes (12,1).

Supposons maintenant qu'on ait $\varepsilon = 0$. Alors, d'après nos hypothèses, le rapport $\dfrac{\beta}{\alpha}$ est $\neq 0$, $\neq \infty$. On pourra donc poser $\alpha = 1$, $-\beta = \varrho = \varrho(x, y_1, y_2, r)$, où ϱ sera indépendant de ξ, η_1, η_2. L'équation (13,5) est alors vérifiée en prenant pour $d\sigma$ la troisième des formes différentielles (12,1).

26. Nous arrivons au résultat:

Théorème IV: Une forme adjointe ds en r, x, y_1, y_2 étant donnée; pour qu'aux trois fonctions indépendantes (24,2) *puisse être adjointe une quatrième fonction $\varrho = \varrho(r, x, y_1, y_2)$, indépendante de ξ, η_1, η_2, de manière à satisfaire à une condition* (13,5), *il est nécessaire et suffisant que ξ, η_1, η_2 satisfassent à* (24,4) *et que l'un au moins des rapports des $\varepsilon, \alpha, \beta$, tirés de* (24,3), *soit indépendant de ξ, η_1, η_2.*

Il est d'ailleurs facile de montrer que la condition (24,4), à elle seule, ne suffit pas pour assurer la validité du théorème III. Posons par exemple

$$ds = dy_1 - r\,dy_2 + dx, \qquad e = 1, \qquad a = r, \qquad b = -1$$

et

$$\xi = r\,, \qquad \eta_1 = x + y_1\,, \qquad \eta_2 = y_2\,.$$

La relation (24,4) est vérifiée immédiatement, tandis qu'il est impossible de satisfaire à une condition (13,5). En effet, choisissons r conformément à la règle du théorème I. On obtient

$$r = \frac{1 + p_1}{p_2} = \frac{1 + \dfrac{dy_1}{dx}}{\dfrac{dy_2}{dx}} .$$

Mais alors on a

$$\xi = r = \frac{\dfrac{d(x + y_1)}{dx}}{\dfrac{dy_2}{dx}} = \frac{\dfrac{d\eta_1}{dx}}{\dfrac{d\eta_2}{dx}} = \frac{\dfrac{d\eta_1}{d\xi}}{\dfrac{d\eta_2}{d\xi}} ,$$

et les fonctions $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ satisfont à l'équation différentielle

$$\xi \frac{d\eta_2}{d\xi} - \frac{d\eta_1}{d\xi} = 0 .$$

La transformation obtenue n'est donc certainement pas réversible.

27. De l'autre côté on peut se poser le problème, dans quelle mesure les fonctions x, y_1, y_2 de ξ, η_1, η_2, ϱ dans la transformation (14,2) peuvent être choisies arbitrairement.

En multipliant les 4 lignes du déterminant (24,4) resp. par

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} , \frac{\partial y_1}{\partial \varrho} , \frac{\partial y_2}{\partial \varrho} , \frac{\partial x}{\partial \varrho}$$

et en ajoutant trois lignes à la quatrième, on obtient les relations

$$\left(b \frac{\partial x}{\partial \varrho} + a \frac{\partial y_2}{\partial \varrho} - e \frac{\partial y_1}{\partial \varrho}\right) \Delta_\nu = 0 , \quad \nu = 1 , 2 , 3 , 4 ,$$

où les facteurs Δ_ν sont les 4 Jacobiens de ξ, η_1, η_2 par rapport aux variables r, y_1, y_2, x. Donc, ξ, η_1, η_2 étant indépendants, on obtient la relation

$$b \frac{\partial x}{\partial \varrho} + a \frac{\partial y_2}{\partial \varrho} - e \frac{dy_1}{\partial \varrho} = 0 , \tag{27,1}$$

équivalente à l'équation (24,4). Cette relation s'obtient du reste immédiatement de la relation (13,5), en y comparant les coefficients de $d\varrho$ des deux côtés.

Supposons maintenant que ds et les trois fonctions x, y_1, y_2 de ξ, η_1, η_2, ϱ soient données. Alors, en remplaçant dans a, b les x, y_1, y_2 par leurs valeurs, la relation (27,1) permet *en général* de déterminer r en fonction de ξ, η_1, η_2, ϱ, et cette fonction de ξ, η_1, η_2, ϱ sera *en général*

indépendante de x, y_1, y_2. Alors, la transformation (14,2), appliquée à la forme ds, la transforme en une forme différentielle

$$E d\eta_1 - A d\eta_2 - B d\xi \,, \tag{27,2}$$

où E, A, B sont des fonctions de ξ, η_1, η_2, ϱ. Mais alors, afin que (26,2) soit un multiple d'une forme adjointe ds, il est nécessaire et suffisant que ou bien 1) $\frac{A}{E}$ soit égal à ϱ, ou bien 2) $\frac{A}{E}$ soit indépendant de ϱ et $\frac{B}{E}$ soit égal à ϱ, ou bien 3) que E s'annule et $\frac{B}{A}$ soit égal à ϱ.

On voit qu'*en général, ds étant donné, il ne correspond aux trois fonctions x, y_1, y_2 de ξ, η_1, η_2, ϱ aucune transformation R.*

Toutefois, il résulte de cette discussion, qu'en général, x, y_1, y_2 étant donnés en fonctions de ξ, η_1, η_2, ϱ, on peut trouver r et un ds du type I, de sorte qu'il en résulte une transformation R avec un $d\sigma$ du type I. En effet, en posant $e = 1$, $a = r$ et en calculant E et A, la condition $\frac{A}{E} = \varrho$ se réduit à

$$(x'_{\eta_1}\varrho - x'_{\eta_2})\, b + (y'_{2\eta_1}\varrho - y'_{2\eta_2})\, r = y'_{1\eta_1}\varrho - y'_{1\eta_2} \,.$$

De l'autre côté, par (27,1):

$$x'_\varrho b + y'_{2\varrho} r = y'_{1\varrho} \,.$$

Donc, en résolvant par rapport à r et b:

$$r = \frac{\varrho \dfrac{\partial(y_1, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_1)} - \dfrac{\partial(y_1, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_2)}}{\varrho \dfrac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_1)} - \dfrac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_2)}} \,, \quad b = \frac{\varrho \dfrac{\partial(y_2, y_1)}{\partial(\varrho\,, \eta_1)} - \dfrac{\partial(y_2, y_1)}{\partial(\varrho\,, \eta_2)}}{\varrho \dfrac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_1)} - \dfrac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho\,, \eta_2)}} \,, \tag{27,3}$$

et l'on obtient une transformation R, si la valeur trouvée de r ne peut être exprimée en fonction de x, y_1, y_2.

§ 6. Intégration des équations différentielles pour ξ, η_1, η_2; exemples

28. Quant à la détermination des solutions ξ, η_1, η_2 de l'équation différentielle (24,4), elle peut être effectuée de la manière suivante: Il existe évidemment 4 fonctions A, B, C, D de r, x, y_1, y_2, telles que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} A\xi'_r + B\xi'_{y_1} + C\xi'_{y_2} + D\xi'_x &= 0 \\ A\eta'_{1r} + B\eta'_{1y_1} + C\eta'_{1y_2} + D\eta'_{1x} &= 0 \\ A\eta'_{2r} + B\eta'_{2y_1} + C\eta'_{2y_2} + D\eta'_{2x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{28,1}$$

$$Be = aC + bD\,. \tag{28,2}$$

Donc, ξ, η_1, η_2 sont des intégrales de l'équation différentielle

$$Az'_r + Bz'_{y_1} + Cz'_{y_2} + Dz'_x = 0\,, \tag{28,3}$$

où A, B, C, D sont assujettis à la condition (28,2).

D'un autre côté, en prenant 4 fonctions A, B, C, D satisfaisant à (28,2), mais autrement arbitraires, l'équation différentielle (28,3) possède des systèmes de trois intégrales indépendantes qu'on peut prendre comme ξ, η_1, η_2.

Dans les expressions de ξ, η_1, η_2 entrent trois fonctions arbitraires de trois variables, ce qui correspond à une transformation ponctuelle de Σ. Une telle transformation n'affecte pas les grandeurs A, B, C, D.

Enfin, quant à la résolution de l'équation (28,3), elle s'effectue en intégrant le système différentiel ordinaire du troisième ordre

$$dr : dy_1 : dy_2 : dx = A : B : C : D\,,$$

et en exprimant les trois constantes arbitraires c_ν, $\nu = 1, 2, 3$ en fonctions de r, x, y_1, y_2:

$$c_\nu = z_\nu(r, x, y_1, y_2)\,.$$

Les trois fonctions z_ν représentent alors un système d'intégrales indépendantes de (28,3).

29. On peut se poser la question, dans quelle mesure, les 3 fonctions indépendantes ξ, η_1, η_2 de r, x, y_1, y_2 étant données, on peut leur adjoindre une forme adjointe ds de manière à satisfaire aux conditions du théorème IV. On obtient évidemment de (24,4) les conditions pour e, a, b. Posons

$$J_1 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_1, y_2)}\,,\quad J_2 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_1, x)}\,,\quad J_3 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_2, x)}\,. \tag{29,1}$$

Alors (24,4) se réduit à

$$J_1 b - J_2 a - J_3 e = 0\,. \tag{29,2}$$

Si l'on cherche ds dans la première forme (2,2), on aura la relation

$$J_1 b - J_2 r - J_3 = 0 \,, \tag{29,3}$$

qui peut toujours être résolue par rapport à b, si $J_1 \neq 0$. Dans ce cas il y a donc exactement une forme ds du premier type (12,2), qui peut être adjointe aux fonctions ξ, η_1, η_2.

Si d'autre part $J_1 = 0$, (29,3) ne peut être satisfait que si

$$J_2 r + J_3 = 0 \,, \tag{29,4}$$

mais alors pour *toute* valeur de b, de sorte qu'alors, *chaque* forme ds du premier type de (12,2) peut être adjointe à ξ, η_1, η_2.

Si l'on cherche ds du deuxième type de (12,2), on obtient la relation

$$J_1 r - J_2 c - J_3 = 0 \tag{29,5}$$

qui devrait être satisfaite pour une fonction c indépendante de r, ce qui n'est possible qu'exceptionnellement.

Enfin, pour une forme ds du troisième type de (12,2), on obtient la relation

$$J_1 r + J_2 = 0 \,. \tag{29,6}$$

D'ailleurs il est très bien possible qu'à un système des trois fonctions ξ, η_1, η_2 puissent être adjointes exactement une forme ds de chaque type, comme nous allons le montrer sur un exemple.

30. *Exemple I :* Posons

$$\xi = r \,, \qquad \eta_1 = y_1 \,, \qquad \eta_2 = y_2 - r x \,. \tag{30,1}$$

On a

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,, J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = -r \,, J_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Avec ces valeurs on tire de (29,3) : $b = -r^2$, de (29,5) : $c = -1$, et la condition (29,6) est, elle aussi, satisfaite. On obtient donc les trois formes suivantes de ds:

$$dy_1 - r dy_2 + r^2 dx \tag{30,2}$$

$$dy_1 + dy_2 - r dx \tag{30,3}$$

$$dy_2 - r dx \,. \tag{30,4}$$

Les équations (24,3) deviennent pour nos valeurs de ξ, η_1, η_2:

$$x\alpha - \beta = 0\,, \qquad \varepsilon - e\mu = 0\,, \qquad \alpha - a\mu = 0\,, \qquad r\alpha + b\mu = 0.$$

La quatrième de ces équations est équivalente à la troisième, puisqu'on a dans tous les trois cas $\frac{b}{a} = -r$. On obtient donc pour $\mu = 1$:

$$\varepsilon = e\,, \qquad \alpha = a\,, \qquad \beta = xa\,. \tag{30,5}$$

Maintenant, si $e = 1$, c'est-à-dire dans les cas (30,2), (30,3), il en résulte, suivant que l'on a affaire à (30,2) ou (30,3),

$$\begin{aligned} &\varepsilon = 1\,, \qquad \alpha = r\,, \qquad \beta = xr\,, \\ &\varepsilon = 1\,, \qquad \alpha = -1\,, \qquad \beta = -x\,. \end{aligned}$$

Dans le premier cas on a $\alpha = \xi$ et l'on posera $\varrho = xr$. $d\sigma$ sera alors

$$d\eta_1 - \xi d\eta_2 - \varrho d\xi\,, \qquad \varrho = xr\,. \tag{30,2°}$$

Dans le deuxième cas on obtient pour $d\sigma$:

$$d\eta_1 + d\eta_2 - \varrho d\xi\,, \qquad \varrho = -x\,. \tag{30,3°}$$

Enfin dans le troisième cas on obtient

$$\varepsilon = 0\,, \qquad \alpha = -1\,, \qquad \beta = -x = \varrho\,,$$

et la forme $d\sigma$ sera (Cf. exemple II au No. 4).

$$d\eta_2 - \varrho d\xi\,, \qquad \varrho = -x\,. \tag{30,4°}$$

Dans le cas des formes (30,2), (30,2°) on obtient d'après le théorème I pour r et ϱ les expressions suivantes par les dérivées p_1, p_2; π_1, π_2:

$$r = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}\,, \quad \varrho = \pi_1 - \xi\pi_2\,. \tag{30,6}$$

Maintenant, les équations finies de notre transformation R deviennent

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}\,, \; \eta_1 = y_1\,, \; \eta_2 = y_2 - x\,\frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}\,, \\ &x = \frac{\pi_1 - \xi\pi_2}{\xi}\,, \; y_1 = \eta_1\,, \; y_2 = \eta_2 + \pi_1 - \xi\pi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{30,2°°}$$

Dans le cas des formes (30,3), (30,3°) on a

$$r = p_1 + p_2 , \qquad \varrho = \pi_1 + \pi_2$$

et les équations finies de la transformation R correspondante deviennent

$$\left.\begin{aligned} \xi = p_1 + p_2 \ , \ \eta_1 = y_1 \ , \ \eta_2 = y_2 - x(p_1 + p_2) \ , \\ -x = \pi_1 + \pi_2 \ , \ y_1 = \eta_1 \ , \ y_2 = \eta_2 - \xi(\pi_1 + \pi_2) \ . \end{aligned}\right\} \quad (30,3^{\circ\circ})$$

Enfin pour les formes (30,4), (30,4°) on a

$$\left.\begin{aligned} \xi = p_2 \ , \ \eta_1 = y_1 \ , \ \eta_2 = y_2 - x p_2 \ , \\ -x = \pi_2 \ , \ y_1 = \eta_1 \ , \ y_2 = \eta_2 - \xi \pi_2 \ , \end{aligned}\right\} \quad (30,4^{\circ\circ})$$

une transformation qui revient évidemment à la transformation de Legendre dans le plan des x, y_2.

On voit donc que dans ces cas aux fonctions (30,1) correspondent trois transformations R différentes.

31. *Exemple II:* Posons

$$\xi = x , \qquad \eta_1 = r , \qquad \eta_2 = y_1 - r y_2 . \tag{31,1}$$

Ici l'on a

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 , J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 , J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & -r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r .$$

Pour ces valeurs de J_1, J_2, J_3 l'équation (29,3) est satisfaite pour chaque b. On obtient donc une forme adjointe

$$dy_1 - r dy_2 - f(r, x, y_1, y_2)\, dx , \tag{31,2}$$

f étant une fonction arbitraire de ses 4 arguments.

Quant aux conditions (29,5), (29,6), la deuxième n'est pas satisfaite, tandis qu'on tire de la première une valeur de c qui n'est pas indépendante de r.

Les équations (24,3) deviennent avec nos valeurs de ξ, η_1, η_2, e, a, b:

$$\varepsilon + \alpha y_2 = 0 , \quad \alpha + \mu = 0 , \quad \alpha r + \mu r = 0 , \quad \beta - f\mu = 0 ,$$

dont la deuxième et la troisième sont équivalentes. On en tire les valeurs

$$\varepsilon = 1 , \quad \alpha = -\frac{1}{y_2} , \quad \beta = \frac{f}{y_2} .$$

Donc, α étant indépendant de ξ, η_1, η_2, on posera $\varrho = -\frac{1}{y_2}$ et l'on aura pour $d\sigma$:

$$d\eta_1 - \varrho d\eta_2 + \varrho f\left(\eta_1, \xi, \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho}, \frac{-1}{\varrho}\right) d\xi \ . \tag{31,3}$$

On obtient ici les expressions de r et ϱ par p_1, p_2 et π_1, π_2, en résolvant les équations

$$\left.\begin{aligned} & p_1 - r p_2 - f(r, x, y_1, x_2) = 0 \\ & \pi_1 - \varrho \pi_2 + \varrho f\left(\eta_1, \xi, \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho}, -\frac{1}{\varrho}\right) = 0 \ . \end{aligned}\right\} \tag{31,4}$$

Les équations de notre transformation deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} & \xi = x, \eta_1 = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2), \ \eta_2 = y_1 - y_2 r(p_1, p_2, x, y_1, y_2) \\ & x = \xi, y_1 = \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)}, y_2 = -\frac{1}{\varrho(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2} \ . \end{aligned}\right\} \tag{31,5}$$

En choisissant p. ex. $f \equiv 0$, on a $r = \frac{p_1}{p_2}$, $\varrho = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ et l'on obtient la transformation (cf. exemple III au No. 4)

$$\left.\begin{aligned} & \xi = x \ , \ \eta_1 = \frac{p_1}{p_2} \ , \ \eta_2 = y_1 - \frac{p_1}{p_2} y_2 \ , \\ & x = \xi \ , \ y_1 = \eta_2 - \frac{\pi_2}{\pi_1} \eta_1 \ , \ y_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1} \ , \end{aligned}\right\} \tag{31,6}$$

à laquelle correspond le couple des formes adjointes

$$ds = dy_1 - r dy_2 \ , \qquad d\sigma = d\eta_1 - \sigma d\eta_2 \ .$$

Fin du premier chapitre.

(Reçu le 3 octobre 1940.)