Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate.
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13558

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate

H. Hadwiger, Bern

In dieser Arbeit soll eine Anwendung einer allgemeinen Mittelwertsformel[1]) für bewegte Figuren im Figurengitter gezeigt werden. Es handelt sich darum, die für die vollständige Überdeckung eines vorgegebenen Bereiches ausreichende Anzahl überdeckender Elementarbereiche abzuschätzen. Speziell verdient wohl noch die Frage Beachtung, wann ein Bereich von einer einzigen Elementarfigur überdeckt werden kann, bzw. eine solche überdeckt. In dieser Hinsicht werden hinreichende Bedingungen aufgestellt. Als überdeckende Bereiche wählen wir:

1. Einheitsquadrate = Quadrate der Seitenlänge 1 ;
2. Einheitskreise = Kreise vom Radius 1.

Über den zu überdeckenden Bereich setzen wir voraus, daß er einfach zusammenhängend und durch eine streckbare Kurve berandet ist.

Wir treten zunächst auf die oben erwähnte Mittelwertsformel ein, die wir in einer unwesentlich allgemeineren Fassung wiedergeben: Wir betrachten eine von zwei unabhängigen Translationen der Ebene erzeugte Gittergruppe. Es sei $\mathfrak{G}_0$ ein Bereich in fester Anfangslage. Wir legen nun in der Ebene alle zu $\mathfrak{G}_0$ kongruenten Bereiche auf, die durch eine Translation der Gittergruppe mit $\mathfrak{G}_0$ zur Deckung gebracht werden können. Die Gesamtheit dieser Bereiche bildet das Bereichgitter $\{\mathfrak{G}_0\}$.

Es sei weiter $\mathfrak{G}$ ein in der Ebene beweglicher Bereich. In einer bestimmten Lage wird der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit einem Bereich des Gitters $\{\mathfrak{G}_0\}$ aus einer „fast immer"[2]) endlichen Anzahl einfach zusammenhängender Stücke bestehen. Die Summe S der Stückzahlen erstreckt über alle Bereiche des Gitters $\{\mathfrak{G}_0\}$, die von $\mathfrak{G}$ in der betrachteten festen Lage getroffen werden, heißt Stückzahl von $\mathfrak{G}$ im Gitter $\{\mathfrak{G}_0\}$. Der über alle Lagen von $\mathfrak{G}$ erstreckte Mittelwert der Stückzahl S ist dann

$$\overline{S} = \frac{LL_0 + 2\pi(F + F_0)}{2\pi T}, \tag{1}$$

[1]) *H. Hadwiger*, Über Mittelwerte im Figurengitter. Coment. Math. Helv. 11, 221—233 (1938/1939) Formel (I), 223. Die Mittelwertsformel stellt eine Anwendung der Hauptformel der ebenen Integralgeometrie auf die Berechnung geometrischer Mittelwerte in Gittern dar. Vergleiche *W. Blaschke*, Vorlesungen über Integralgeometrie. 1. Heft, zweite erweiterte Auflage. Leipzig und Berlin 1936, S. 20.

[2]) Bedeutet hier „immer" mit Ausnahme von Lagen der integralgeometrischen „Anzahl" Null.

wo L, L_0, bzw. F, F_0 die Randlängen bzw. die Flächeninhalte der Bereiche $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, und T den Flächeninhalt des Fundamentalparallelogramms der Gittergruppe bedeuten.

Es bezeichne N die Zahl der Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ die von $\mathfrak{G}$ in fester Lage getroffen werden. Da der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit irgend einem Bereich von $\{\mathfrak{G}_0\}$ aus verschiedenen Stücken bestehen kann, wird im allgemeinen

$$N \leqq S \tag{2}$$

sein. Das Gleichheitszeichen gilt z. B. dann, wenn beide Bereiche konvex sind. Aus (2) folgt für die Mittelwerte

$$\overline{N} \leqq \overline{S} \ . \tag{3}$$

Ist M die kleinste in Betracht fallende Treffzahl, so kann sie nicht größer sein, als der Mittelwert, so daß man mit Hilfe des Gauß'schen Klammersymbols schreiben kann

$$M \leqq [\overline{N}] \ . \tag{4}$$

Wenn nun $\mathfrak{G}_0$ so beschaffen ist, daß die Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ die ganze Ebene überdecken, so überdecken offenbar die von $\mathfrak{G}$ getroffenen Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ auch insbesondere $\mathfrak{G}$. Mit Rücksicht auf (1), (3) und (4) folgt dann die allgemeine Aussage:

Es genügen stets $\left[\dfrac{LL_0 + 2\pi(F + F_0)}{2\pi T}\right]$ Bereiche $\mathfrak{G}_0$ um den Bereich $\mathfrak{G}$ zu überdecken.

So gewinnen wir folgende Resultate[3]):

(I) *Es genügen stets* $\left[F + \dfrac{2}{\pi} L + 1\right]$ *Einheitsquadrate, um einen Bereich der Fläche F und der Randlänge L zu überdecken.*

(II) *Es genügen stets* $\left[\dfrac{2}{3\sqrt{3}} F + \dfrac{2}{\pi\sqrt{3}} L + 1\right]$ *Einheitskreise, um einen Bereich der Fläche F und der Randlänge L zu überdecken.*

---

[3]) Betreffend die analoge Fragestellung im Raume sollen noch zwei Ergebnisse ohne weitere Ausführungen mitgeteilt werden:

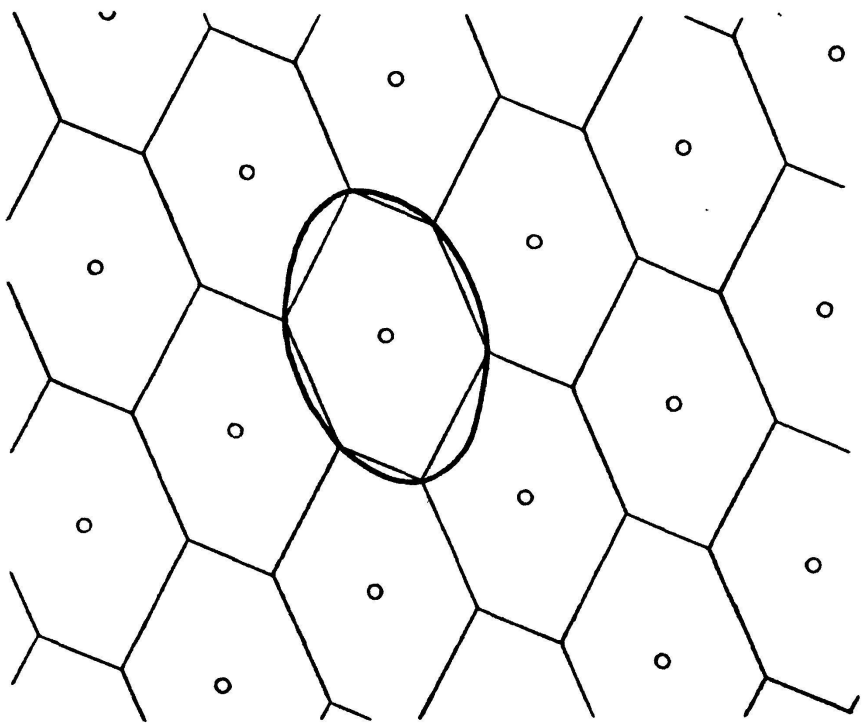
Es genügen stets $\left[V + \dfrac{3}{4} O + \dfrac{3}{2\pi} M + 1\right]$ *Einheitswürfel* (Kante = 1) *und*

$\left[\dfrac{3\sqrt{3}}{8} V + \dfrac{9}{16} O + \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi} M + 1\right]$ *Einheitskugeln* (Radius = 1) *um einen konvexen Bereich vom Volumen V, der Oberfläche O und der Kantenkrümmung (Integral der mittleren Krümmung) M zu überdecken.*

Wir werden nun eine allgemeinere Formel herleiten, die die in (I) und (II) angegebenen Abschätzungen als Spezialfälle enthält. Es sei $\mathfrak{G}_0$ ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt, und $\mathfrak{G}_\square$ ein einbeschriebenes Hexagon (Sechseck mit paarweise parallelen und gleichlangen Seiten). $F_\square$ und $L_\square$ seien Flächeninhalt und Umfang von $\mathfrak{G}_\square$. Wie bekannt kann die Ebene durch kongruente Hexagone so überdeckt werden, daß die Mittelpunkte ein Parallelogrammgitter bilden[4]). Da der Flächeninhalt eines solchen Fundamentalparallelogramms offenbar gleich $F_\square$ ist, kann nach der oben angegebenen Formel der Bereich $\mathfrak{G}$ durch

$$\left[\frac{LL_\square + 2\pi(F + F_\square)}{2\pi F_\square}\right]$$

Hexagone überdeckt werden. Da die Bereiche $\mathfrak{G}_0$ den $\mathfrak{G}_\square$ umschrieben sind, gilt das gleiche für die Bedeckung durch Bereiche $\mathfrak{G}_0$. Wenn wir für $\mathfrak{G}_0$ nun Einheitsquadrat bzw. Einheitskreis und für $\mathfrak{G}_\square$ das Einheitsquadrat selbst (entartetes Hexagon) bzw. das reguläre Sechseck wählen, so gelangen wir zu den Bedeckungszahlen in den Aussagen (I) und (II). In diesen beiden Fällen wurden die einbeschriebenen Hexagone maximaler Fläche gewählt. Andere Auswahlen ergeben andere Abschätzungsformeln.



Wir betrachten wieder allgemein den beweglichen Bereich $\mathfrak{G}$ im Bereichgitter $\{\mathfrak{G}_0\}$.

[4]) *E. S. Fedoroff*, Reguläre Plan- und Raumteilung. Abhandl. k. Bayer. Ak. Wiss. II. Cl. 20 (1899). Vgl. auch nachstehende Figur.

Bezeichnet P die Zahl der Schnittpunkte des Randes von $\mathfrak{G}$ in irgend einer festen Lage mit den Rändern der Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$, so ist der über alle Lagen von $\mathfrak{G}$ erstreckte Mittelwert von P[5]):

$$\overline{P} = \frac{2LL_0}{\pi T} \; . \tag{5}$$

In Verbindung mit (1) gewinnen wir so

$$\overline{P - 2S} = \frac{LL_0 - 2\pi(F + F_0)}{\pi T} \; . \tag{6}$$

Man überlegt sich nun leicht folgendes: Wenn die Bereiche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_0$ so beschaffen sind, daß keiner ganz vom andern überdeckt werden kann, so ist die Ränderschnittpunktszahl nicht kleiner als die doppelte Stückzahl, da jedes einzelne Stück des Durchschnittes Anlaß zu mindestens zwei Schnittpunkten der Randkurven bietet.

Also wird wegen $P \geqq 2S$

$$LL_0 - 2\pi(F + F_0) \geqq 0 \tag{7}$$

ausfallen müssen. Da die Voraussetzung für kongruente oder symmetrische Bereiche erfüllt ist, folgt z. B. aus (7) die bekannte isoperimetrische Ungleichung[6])

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0 \; . \tag{8}$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen ist somit

$$LL_0 - 2\pi(F + F_0) < 0 \tag{9}$$

hinreichend dafür, daß von den beiden Bereichen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_0$ einer den andern bedecken kann.

Wenn wir mit $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ den Bereich bezeichnen, der aus $\mathfrak{G}$ durch ähnliche Abbildung mit der linearen Vergrößerung λ hervorgeht, so wird bei ausreichend großem λ

(Fall a) $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ den Bereich $\mathfrak{G}_0$,

bei genügend kleinem λ dagegen

(Fall b) $\mathfrak{G}_0$ den Bereich $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ bedecken können.

---

[5]) Vgl. die in Fußnote [1]) zitierte Note, S. 232, Formel (VI).

[6]) Vgl. auch die analoge geläufige Schlußfolgerung, die man aus den kinematischen Hauptformeln der ebenen Integralgeometrie ziehen kann bei *W. Blaschke* in dem in Fußnote [1]) erwähnten Buch, S. 45.

Hinreichend für das eine oder das andere ist nach (9)

$$\lambda L L_0 - 2\pi(\lambda^2 F + F_0) < 0\,,$$

oder also

(Fall a) $$\lambda > \frac{L L_0 + \sqrt{L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0}}{4\pi F}\;;$$

(Fall b) $$\lambda < \frac{L L_0 - \sqrt{L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0}}{4\pi F}\;;$$

Wir gelangen so zu hinreichenden Bedingungen[7]) dafür, daß ein Bereich $\mathfrak{G}$ durch eine Elementarfigur von der betrachteten Art bedeckt werden kann, oder umgekehrt einen solchen überdeckt. Es ergeben sich die folgenden Aussagen:

(III) Hinreichend dafür, daß ein Bereich der Fläche F und der Randlänge L durch ein Einheitsquadrat bedeckt werden kann, bzw. ein solches bedeckt ist die Bedingung

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - \pi^2 F}}{\pi F} > 1 \text{ bzw. } \frac{L + \sqrt{L^2 - \pi^2 F}}{\pi F} < 1\,.$$

(IV) Hinreichend dafür, daß ein Bereich der Fläche F und der Randlänge L durch einen Einheitskreis bedeckt werden kann, bzw. einen solchen überdeckt ist die Bedingung

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{2F} > 1 \text{ bzw. } \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{2F} < 1\,.$$

In den Fällen, in denen keine der oben angegebenen Bedingungen erfüllt ist, bleibt die Frage der Bedeckbarkeit offen. In diesen „unbestimmten" Fällen sind diejenigen enthalten, in denen tatsächlich keine von den in Frage stehenden Bedeckungen möglich ist. Die Breite dieser

---

[7]) Es ist nicht möglich, für die gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Bereiche notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen, in die nur die Flächeninhalte und Randlängen eingehen, anzugeben. Dies zeigt das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{G}_0$ der Einheitskreis und $\mathfrak{G}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $a = \frac{21}{10}$ und der Höhe $h = \frac{63}{80}$. Da der Durchmesser von $\mathfrak{G}$ größer als 2 ist, kann $\mathfrak{G}$ nicht durch $\mathfrak{G}_0$ bedeckt werden. Es gibt aber ein Rechteck, das gleichen Flächeninhalt und gleichen Umfang besitzt wie $\mathfrak{G}$ mit der Diagonallänge $d = \frac{21}{80}\sqrt{57} \sim 1{,}981\ldots$, das also durch $\mathfrak{G}_0$ bedeckt werden kann.

„Unbestimmtheitszone“ ist von den „Defiziten“ $L^2 - \pi^2 F$ bzw. $L^2 - 4\pi F$ abhängig. Nur im Falle, wo $L^2 - 4\pi F = 0$ ist, d. h. wenn $\mathfrak{G}$ ein Kreis ist, wird eine eindeutige Entscheidung für die Bedeckbarkeit mit einem Einheitskreis erreicht. Die Bedingungen können im letztgenannten Falle so gelesen werden:

$$\frac{1}{r} > 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{r} < 1$$

(r = Radius von $\mathfrak{G}$), die trivial verifizierbar sind.

(Eingegangen den 6. Dezember 1940.)