Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen.
Autor: Hopf, H. / Samelson, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13561

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen

Von H. Hopf und H. Samelson, Zürich

1. Ein „Wirkungsraum" W ist eine Mannigfaltigkeit, welche durch eine Liesche Gruppe G transitiv in sich transformiert wird[1]). Genauer: die Mannigfaltigkeit W, deren Punkte mit $\xi, \eta, \ldots$ bezeichnet werden, steht zu einer abstrakten Lieschen Gruppe G, deren Elemente wir $a, b, \ldots$ nennen, in folgender Beziehung: jedem a ist eine topologische analytische[2]) Abbildung f_a von W auf sich zugeordnet; es ist $f_a(f_b(\xi)) = f_{ab}(\xi)$; der Punkt $f_a(\xi)$ hängt stetig von dem Paar (a, ξ) ab; zu jedem Paar (ξ, η) gibt es wenigstens ein a mit $f_a(\xi) = \eta$. [3])

Wir werden hier nur geschlossene Gruppen G betrachten; dann sind auch die Räume W geschlossen.

Man weiß zwar, daß nur Mannigfaltigkeiten von spezieller topologischer Struktur als Wirkungsräume auftreten können — z. B. gibt es unter den geschlossenen Flächen keine anderen Wirkungsräume als Kugel, projektive Ebene und Torus[4]); jedoch existiert noch keine allgemeine Theorie der topologischen Eigenschaften der Wirkungsräume; soviel wir feststellen konnten, sind bisher nur die folgenden Sätze bekannt:

a) Die Fundamentalgruppe enthält eine Abelsche Untergruppe von endlichem Index[5]).

b) Die Bettischen Zahlen p_r, $r = 1, 2, \ldots$, erfüllen die Ungleichungen

$$p_r \geqslant \binom{p_1}{r} \text{ [6a])} \qquad \text{sowie} \qquad p_r \leqslant \binom{n}{r} \text{ [6b])} .$$

---

[1]) „Wirkungsraum" = „espace homogène" bei Cartan. — Literatur: *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Paris 1930, Mémorial Sc. Math. XLII); ferner: *C. Ehresmann*, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math. **35** (1934), 396—443.

[2]) Man kommt auch mit schwächeren Regularitätsbedingungen aus.

[3]) Für unsere Zwecke ist es nicht nötig, noch zu fordern: aus $a \neq b$ folgt $f_a \neq f_b$.

[4]) *Cartan*, l. c., p. 29.

[5]) Dieser Satz scheint zwar nirgends formuliert worden zu sein, er ist aber eine direkte Folge aus der bekannten Tatsache, daß die Fundamentalgruppe von G Abelsch ist, einerseits und den bekannten Beziehungen zwischen den Fundamentalgruppen von G und von W andererseits; diese Beziehungen sind z. B. dargestellt bei *Ehresmann*, l. c., p. 399, sowie enthalten in dem Satz XII von *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen I, Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), 112—119.

[6a]) *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen IV, Proc. Akad. Amsterdam **39** (1936), 215—224; insbesondere p. 224.

[6b]) *G. de Rham*, Über mehrfache Integrale, Abh. Math. Seminar Hamburg **12** (1938), 313—339; insbesondere p. 335. — Herr de Rham hat uns darauf hingewiesen, daß an dieser Stelle die a. a. O. gemachte Voraussetzung der „Symmetrie" des Wirkungsraumes unnötig ist.

Es ist aber nicht daran zu zweifeln, daß die Homologie-Eigenschaften der Wirkungsräume viel schärferen Bedingungen unterliegen, als nur den Bedingungen b), ähnlich wie es bei den Gruppenräumen — also denjenigen Wirkungsräumen, in denen eine Gruppe G *einfach* transitiv wirkt — der Fall ist. Im folgenden wird ein einzelner hierhergehöriger Satz bewiesen, der von der einfachsten Homologie-Invariante, nämlich der Euler-Poincaréschen Charakteristik, handelt. Er lautet:

Die Charakteristik eines Wirkungsraumes einer geschlossenen Lieschen Gruppe ist positiv oder Null.

Mannigfaltigkeiten mit negativer Charakteristik sind also niemals Wirkungsräume. Es wird sich ferner zeigen, daß zwischen den Wirkungsräumen mit positiver und denen mit verschwindender Charakteristik ein Unterschied besteht, der sich in Eigenschaften der betreffenden Transformationsgruppen äußert.

2. Die Charakteristik $\chi(P)$ eines Polyeders P ist durch die Euler-Poincarésche Formel

$$\chi(P) = \Sigma(-1)^r a_r = \Sigma(-1)^r p_r$$

gegeben, wobei a_r die Anzahl der r-dimensionalen Zellen einer beliebigen Zellenzerlegung von P und p_r die r-te Bettische Zahl von P bezeichnet. Die Beziehung der Charakteristik zu stetigen Transformationen wird durch den folgenden Fixpunktsatz vermittelt[7]: „f sei eine stetige Abbildung des n-dimensionalen Polyeders P in sich, welche 1. durch eine stetige Deformation von P in sich aus der Identität entstanden ist, und welche 2. höchstens endlich viele Fixpunkte besitzt; dann ist die Summe der Indizes der Fixpunkte gleich $(-1)^n \cdot \chi(P)$." (Wenn P eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist — nur dieser Fall interessiert uns hier —, so ist bei ungeradem n bekanntlich $\chi(P) = 0$, und daher kann der Faktor $(-1)^n$ in der Behauptung des Satzes weggelassen werden.) Wir wollen unseren Satz aus Nr. 1 auf den Fixpunktsatz zurückführen; hierfür brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 1. Der Wirkungsraum W sei n-dimensional; dann hat jeder isolierte Fixpunkt einer Abbildung f_a, $a \varepsilon G$, den Index $(-1)^n$. [8])

Beweis. Die Transformationen f_a, $a \varepsilon G$, können als Isometrien einer Riemannschen Metrik in W aufgefaßt werden[9]). Wir betrachten die Funktionalmatrix F von f_a in einem Fixpunkt ξ von f_a. Wenn F einen

[7]) *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), p. 542 sowie p. 534 ff.

[8]) Am Schluß von Nr. 6 wird dieser Hilfssatz noch präzisiert werden.

[9]) *Cartan*, l. c., p. 43.

reellen positiven Eigenwert besitzt, so bleibt bei der Abbildung f_a eine Richtung durch den Punkt ξ fest, und folglich bleibt, da f_a eine Isometrie ist, auch die in dieser Richtung von ξ ausgehende geodätische Linie Punkt für Punkt fest (woraus man übrigens sieht, daß der Eigenwert gleich 1 ist); dann ist ξ also nicht isolierter Fixpunkt. Nun sei aber ξ isolierter Fixpunkt; dann besitzt nach dem Vorstehenden F keinen positiven Eigenwert, d. h., für alle positiven Zahlen λ sind die Determinanten $|F - \lambda E| \neq 0$; für die spezielle Determinante $|F - E|$ bedeutet dies erstens, daß sie nicht verschwindet, und zweitens, daß sie das gleiche Vorzeichen hat wie $|F - \lambda E|$ für große λ, also das Vorzeichen $(-1)^n$. Daher ist bekanntlich[10]) auch der Index des Fixpunktes ξ gleich $(-1)^n$, w. z. b. w.

Es sei jetzt f_a, $a \varepsilon G$, eine Transformation von W mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, und zwar sei deren Anzahl gleich A, $A \geqslant 0$. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz ist die Indexsumme der Fixpunkte gleich $(-1)^n \cdot A$; andererseits erfüllt f_a die Voraussetzungen des oben zitierten Fixpunktsatzes, denn indem man das Eins-Element der Gruppe G stetig in das Element a überführt, erzeugt man f_a durch eine stetige Deformation aus der Identität; daher ist die Indexsumme auch gleich $(-1)^n \cdot \chi(W)$; es ist also $A = \chi(W)$; damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz I. Besitzt eine Transformation f_a, $a \varepsilon G$, des Wirkungsraumes W einer geschlossenen Gruppe G höchstens endlich viele Fixpunkte, so ist deren Anzahl gleich der Charakteristik von W.

Falls die Existenz einer Transformation f_a feststeht, welche die Voraussetzung des Satzes I erfüllt, so folgt aus diesem Satz die in Nr. 1 behauptete Tatsache $\chi(W) \geqslant 0$; dieses Ziel ist also erreicht, sobald noch folgender Satz bewiesen ist:

Satz II. Ist W ein beliebiger Wirkungsraum einer geschlossenen Gruppe G, so gibt es ein solches Element a in G, daß die Transformation f_a von W höchstens endlich viele Fixpunkte hat.[11])

3. Bei dem Beweis des Satzes II werden wir nicht in dem Wirkungsraum W, sondern in dem Gruppenraum G — also in der Mannigfaltigkeit, deren Punkte die Elemente von G sind — arbeiten; dies ist möglich auf Grund der bekannten Deutung der Punkte von W als Nebengruppen in G; wir erinnern hier kurz an diese Deutung[12]):

---

[10]) *Alexandroff-Hopf*, l. c., p. 537.

[11]) Man beachte die Verschärfung dieses Satzes in Fußnote 20.

[12]) Man vergleiche: *Cartan*, l. c., p. 25 ff.; *Ehresmann*, l. c., p. 397 ff.

In W zeichne man einen Punkt α aus; dann bilden diejenigen Elemente a von G, für welche $f_a(\alpha) = \alpha$ ist, eine abgeschlossene Untergruppe U von G, die „Isotropiegruppe" von W; für einen beliebigen Punkt ξ von W bilden die Elemente a, für welche $f_a(\alpha) = \xi$ ist, eine Nebengruppe xU von U; hierdurch ist eine eineindeutige Beziehung zwischen den Nebengruppen xU einerseits und den Punkten von W andererseits hergestellt. Geometrisch bilden die Nebengruppen xU eine stetige Zerlegung oder „Faserung" von G; jeder Punkt von G liegt auf einer und nur einer „Faser" xU; die einzelnen Fasern sind miteinander, also insbesondere mit der Gruppe U, homöomorph; W ist der Raum, der entsteht, wenn man die einzelne Nebengruppe als Punkt auffaßt; daher nennt man W auch einen „Nebengruppenraum". Die Transformation f_a von W ist gleichbedeutend mit der durch die Abbildung $x \to ax$ des Gruppenraumes G auf sich bewirkten Zuordnung

$$xU \to axU \tag{1}$$

im Nebengruppenraum.

Alles dies ist im wesentlichen — d. h. bis auf einen inneren Automorphismus von G — unabhängig von dem Punkt α; denn zeichnet man statt α einen Punkt β aus, so hat man nur U durch die Gruppe $U' = sUs^{-1}$ zu ersetzen, wobei s ein Element von G mit $f_s(\alpha) = \beta$ ist.

Die hiermit beschriebene Beziehung zwischen einem Wirkungsraum und einer Nebengruppen-Zerlegung von G kann man auch umgekehrt zur Definition von Wirkungsräumen benutzen. Man nehme eine beliebige abgeschlossene Untergruppe U von G und deute ihre Nebengruppen xU als Punkte eines Raumes W, in welchem in naheliegender Weise eine Topologie auf Grund der Topologie von G erklärt ist; W ist eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension gleich der Differenz der Dimensionen von G und von U ist; für jedes Element a von G verstehe man unter f_a die durch die Zuordnung (1) erklärte Transformation von W; dann ist W ein Wirkungsraum; seine Isotropiegruppe ist U; man schreibt mitunter $W = G/U$.[13])

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß jede Eigenschaft von Wirkungsräumen als Eigenschaft von Gruppenräumen gedeutet werden kann. Uns interessiert im Hinblick auf den Satz II die Frage, wie die Fixpunkte einer Transformation f_a von W im Gruppenraum G in Erscheinung treten. Aus der Deutung (1) von f_a sieht man, daß der Nebengruppe xU dann und nur dann ein Fixpunkt in W entspricht, wenn $axU = xU$, also $ax = xu$ mit $u \varepsilon U$ ist; man hat somit folgendes Krite-

[13]) Entsprechend der Bemerkung in Fußnote 3 haben wir hier nicht gefordert, daß U keine invariante Untergruppe von G (außer der Einheitsgruppe) enthalte.

rium: Die Nebengruppe xU stellt dann und nur dann einen Fixpunkt der Transformation f_a von W dar, wenn

$$x^{-1}ax \varepsilon U \tag{2}$$

ist.

Der Beweis des Satzes II muß demnach darin bestehen, daß man zu jeder Untergruppe[14]) U von G die Existenz eines solchen Elementes a von G nachweist, daß höchstens für endlich viele Nebengruppen xU die Relation (2) gilt.

4. Für den Beweis des Satzes II sind Eigenschaften Abelscher Untergruppen von G wichtig[15]). Bekanntlich gibt es in G einparametrige Untergruppen; die abgeschlossene Hülle einer solchen ist eine Gruppe T, welche abgeschlossen, zusammenhängend und Abelsch ist; als abgeschlossene Untergruppe von G ist T eine Liesche Gruppe[16]); die einzigen kompakten, zusammenhängenden, Abelschen, Lieschen Gruppen sind die „Toroide", d. h. die direkten Produkte von endlich vielen geschlossenen einparametrigen Gruppen[17]); es gibt also in G gewiß ein Toroid T.

Die Multiplikation in einem r-dimensionalen Toroid ist isomorph der Vektor-Addition im r-dimensionalen Raum, wenn man alle Vektor-Komponenten modulo 1 reduziert. Hieraus ergeben sich auf Grund bekannter Tatsachen die folgenden beiden Eigenschaften der Toroide:

(I) Die Gruppe der (stetigen) Automorphismen eines Toroids ist eine diskrete Gruppe; denn die Automorphismen werden durch ganzzahlige Matrizen beschrieben.

(II) In jedem Toroid T gibt es „erzeugende" Elemente, d. h. solche, deren Potenzen auf T überall dicht liegen; dies ist der Hauptinhalt des klassischen Approximationssatzes von Kronecker[18]).

---

[14]) Unter Untergruppen von G sollen, wenn nichts anderes gesagt wird, immer abgeschlossene Untergruppen verstanden werden.

[15]) Nachdem der eine von uns (H. Hopf) über den Inhalt der vorliegenden Arbeit in der Sitzung der Schweizerischen Math. Gesellschaft, September 1940 in Locarno, berichtet hatte, machte uns Herr G. de Rham auf die Note von *A. Weil*, Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan, C. R. 200 (1935), 518—520, aufmerksam; der im Titel dieser Note erwähnte Satz von Cartan ist unser Hilfssatz 4. Unser Beweis dieses Cartanschen Satzes ist mit dem Beweis von Weil identisch, und überhaupt enthält die obige Nr. 4 nichts, was über den Inhalt der Note von Weil hinausginge; trotzdem wiederholen wir diese Dinge ausführlich, da wir den Gedankengang des Beweises für unseren Satz in Nr. 1 lückenlos darstellen wollen.

[16]) *Cartan*, l. c., p. 22; sowie: *L. Pontrjagin*, Topological groups (Princeton 1939), p. 196 ff.

[17]) *Cartan*, l. c., p. 36; sowie, ohne Differenzierbarkeits-Voraussetzungen: *Pontrjagin*, l. c., p. 169.

[18]) Man vergleiche z. B. *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen (Berlin 1936), p. 83.

Eine besondere Rolle spielen für unseren Beweis — und bekanntlich nicht nur für diesen — die „maximalen" Toroide in G, d. h. diejenigen Toroide, welche nicht in höherdimensionalen Toroiden enthalten sind; die für uns wichtigsten Eigenschaften sind in den nachstehenden drei Hilfssätzen 2, 3 und 4 enthalten. Für den Hilfssatz 2 erinnern wir an den Begriff des „Normalisators" N_V einer Untergruppe V von G: der Normalisator N_V ist die Menge derjenigen Elemente x von G, für welche $x^{-1}Vx = V$ ist; er ist eine Gruppe, und er enthält V.

Hilfssatz 2. Ein maximales Toroid T hat in seinem Normalisator N_T endlichen Index, d. h. es gibt eine endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = c_1T + c_2T + \cdots + c_\sigma T\ , \quad (c_1 \varepsilon T)\ . \tag{3}$$

Beweis. Da N_T eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, gibt es jedenfalls eine endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = c_1A + c_2A + \cdots + c_\sigma A\ , \quad (c_1 \varepsilon A)\ , \tag{3'}$$

wobei die Untergruppe A diejenige Komponente von N_T ist, welche das Eins-Element e enthält. Da T zusammenhängend und $T \subset N_T$ ist, ist $T \subset A$; wir behaupten: $T = A$; diese Behauptung ist gleichbedeutend mit der folgenden: T hat dieselbe Dimension wie A; und dies ist bewiesen, sobald gezeigt ist: jede Richtung $\mathfrak{x}$, die im Einheitspunkt e der Gruppe G angebracht ist und in A liegt, liegt auch in T. Es sei also $\mathfrak{x}$ eine derartige Richtung; in dieser Richtung geht von e eine einparametrige Untergruppe L der Gruppe A aus; da $L \subset N_T$ ist, bewirkt jedes Element x von L durch die Zuordnung $t \to x^{-1}tx$, $t \varepsilon T$, einen Automorphismus von T; da sich x auf L in den Punkt e überführen läßt, bilden diese Automorphismen eine stetige Schar, welche die Identität enthält; infolge der — oben als Eigenschaft (I) formulierten — Diskretheit der Automorphismengruppe ist daher jeder der betrachteten Automorphismen die Identität; es ist also $x^{-1}tx = t$ für beliebige $x \varepsilon L$, $t \varepsilon T$; da L und T selbst Abelsch sind, ist mithin auch die von T und L erzeugte Gruppe Abelsch; sie ist überdies zusammenhängend, und ihre abgeschlossene Hülle ist daher ein Toroid T'; da $T \subset T'$ und T maximal ist, ist $T' = T$; also ist L und daher auch die Richtung $\mathfrak{x}$ in T enthalten; somit ist in der Tat $T = A$. Hieraus und aus (3′) folgt (3).

Hilfssatz 3. T sei ein maximales Toroid und b ein beliebiges Element von G; dann ist b in einem mit T konjugierten Toroid xTx^{-1} enthalten.

Beweis. Zu T gehört, wie in Nr. 3 festgestellt wurde, ein Wirkungsraum $W = G/T$. Es sei a ein erzeugendes Element von T, wie es auf

Grund der oben formulierten Eigenschaft (II) existiert. Wir betrachten die Transformation f_a von W und fragen nach ihren Fixpunkten, also — entsprechend dem Kriterium in Nr. 3 — nach denjenigen Nebengruppen xT, für welche

$$x^{-1}ax \varepsilon T \tag{2'}$$

ist. Die Relation (2′) ist, da $a \varepsilon T$ ist, gewiß für alle Elemente x des Normalisators N_T erfüllt; daher stellt jede der σ Nebengruppen $c_i T$ aus (3) einen Fixpunkt dar. Wir behaupten, daß dies die einzigen Fixpunkte von f_a sind; in der Tat: wenn xT einen Fixpunkt repräsentiert, wenn also (2′) gilt, so ist, da das Element a das Toroid T erzeugt, auch $x^{-1}Tx \subset T$, also $x^{-1}Tx = T$, also $x \varepsilon N_T$, also $xT = c_i T$, wobei $c_i T$ eine der Nebengruppen aus (3) ist. Somit hat f_a genau σ Fixpunkte; nach Satz I (Nr. 2) ist daher $\chi(W) = \sigma$, also jedenfalls $\chi(W) \neq 0$. Jetzt sei b ein beliebiges Element von G; hätte die Transformation f_b keinen Fixpunkt, so wäre nach Satz I $\chi(W) = 0$, entgegen dem soeben Bewiesenen; f_b besitzt also wenigstens einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein solches Element x, daß $x^{-1}bx \varepsilon T$, also $b \varepsilon xTx^{-1}$ ist.

Hilfssatz 4. Je zwei maximale Toroide T und T' sind miteinander konjugiert, d. h. es gibt ein Element x, so daß $T' = xTx^{-1}$ ist.

Beweis. Es sei b ein erzeugendes Element von T'; nach Hilfssatz 3 gibt es ein x, so daß $b \varepsilon xTx^{-1}$ ist; dann ist auch $T' \subset xTx^{-1}$, also, da T' maximal ist, $T' = xTx^{-1}$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 4 folgt insbesondere, daß alle maximalen Toroide die gleiche Dimension haben; diese Dimensionszahl l nennen wir den „Rang" der Gruppe G. [19])

5. Wir kommen jetzt zum Beweise des Satzes II; und zwar werden wir sogleich noch folgenden *Zusatz* beweisen:

Es sei a ein Element, das ein maximales Toroid T erzeugt; dann erfüllt a die Behauptung des Satzes II.

Wir knüpfen an Nr. 3 an; U sei also eine beliebige Untergruppe[14]) von G; zu zeigen ist, daß höchstens für endlich viele Nebengruppen xU die Relation (2) gilt; diese Relation ist, da a erzeugendes Element von T ist, gleichbedeutend mit

$$x^{-1}Tx \subset U\,. \tag{4}$$

Der Rang von U ist gewiß nicht größer als der Rang l von G; wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem er kleiner als l oder gleich l ist.

[19]) Diese Definition weicht zwar von der sonst üblichen, „infinitesimalen" Definition des „Ranges" einer Lieschen Gruppe etwas ab, sie ist aber für manche Zwecke praktisch.

Wenn der Rang von U kleiner als l ist, so enthält U kein l-dimensionales Toroid; (4) ist also für kein x erfüllt. Die Abbildung f_a hat daher keinen Fixpunkt.

Der Rang von U sei l; dann enthält U ein l-dimensionales Toroid T'. Nach Hilfssatz 4 sind T und T' konjugiert, es gibt also ein Element x_0, so daß $T' = x_0^{-1} T x_0$ ist; dann ist $a' = x_0^{-1} a x_0$ erzeugendes Element von T'; da die ähnlichen Abbildungen f_a und $f_{a'} = f_{x_0}^{-1} f_a f_{x_0}$ offenbar die gleiche Anzahl von Fixpunkten haben, dürfen wir T' und a' durch T und a ersetzen, und also annehmen, daß $T \subset U$ ist.

Es sei nun x ein Element, das (4) erfüllt. Da T und $x^{-1}Tx$ l-dimensionale, also maximale Toroide in U sind, gibt es nach dem Hilfssatz 4, angewandt auf die Gruppe U statt auf G, ein Element $u \varepsilon U$, so daß $uTu^{-1} = x^{-1}Tx$ ist; dann ist $xuTu^{-1}x^{-1} = T$, also ist xu Element des Normalisators N_T von T; die Nebengruppe xU enthält somit ein Element von N_T. Es sei umgekehrt xU eine Nebengruppe, die ein Element y von N_T enthält; dann ist $x = yu$, $u \varepsilon U$, also $x^{-1}Tx = u^{-1}y^{-1}Tyu = u^{-1}Tu \subset U$; es gilt also (4). Damit ist gezeigt: die Nebengruppe xU repräsentiert dann und nur dann einen Fixpunkt von f_a, wenn sie ein Element von N_T enthält.

Wenn aber in xU ein Element y enthalten ist, so ist, da $T \subset U$ ist, auch die ganze Nebengruppe $yT \subset xU$. Nach Hilfssatz 2 gibt es nur endlich viele Nebengruppen yT mit $y \varepsilon N_T$; folglich gibt es auch nur endlich viele Nebengruppen xU, welche Fixpunkte von f_a repräsentieren. Mithin ist die Anzahl dieser Fixpunkte endlich; sie ist übrigens positiv, da jedenfalls U selbst einen Fixpunkt repräsentiert.

Damit ist der Satz II samt dem oben formulierten Zusatz bewiesen.[20])

6. Durch den Beweis des Satzes II ist auch der Beweis der Behauptung $\chi(W) \geqslant 0$, der unser Hauptziel war, beendet. Wir können jetzt zu dieser Behauptung noch ein gruppentheoretisches Kriterium für die Unterscheidung zwischen $\chi > 0$ und $\chi = 0$ hinzufügen. Nach Satz I ist χ ja gleich der Anzahl der Fixpunkte einer Abbildung f_a, von welcher nur vorausgesetzt werden muß, daß sie höchstens endlich viele Fixpunkte hat; die in Nr. 5 betrachteten Abbildungen f_a haben, falls der Rang von U kleiner als l ist, keine Fixpunkte, und falls der Rang von U gleich l ist, eine positive Anzahl von Fixpunkten, wie am Schluß des Beweises be-

[20]) Aus dem Zusatz zu Satz II folgt, daß die Menge M der Elemente a, für welche die f_a höchstens endlich viele Fixpunkte haben, in G überall dicht ist; denn die maximalen Toroide überdecken G vollständig (Hilfssatz 3), und auf jedem Toroid liegen die erzeugenden Elemente überall dicht (Kroneckerscher Approximationssatz[18])). Da M überdies, wie man leicht zeigt, eine in G offene Menge ist, ist man berechtigt zu sagen, daß „fast alle" Elemente von G die im Satz II ausgesprochene Eigenschaft haben.

merkt wurde. Man kann daher die Aussage $\chi(W) \geqslant 0$ folgendermaßen präzisieren:

Die Charakteristik $\chi(W)$ des Wirkungsraumes W ist positiv oder Null, jenachdem die Isotropiegruppe U den gleichen Rang hat wie die ganze Gruppe G oder kleineren Rang als diese.

Wir wollen den Unterschied zwischen den Wirkungsräumen mit positiver und denen mit verschwindender Charakteristik noch etwas weiter verfolgen; er äußert sich besonders in Fixpunkt-Eigenschaften.

Ein Punkt ξ von W soll „permanenter" Fixpunkt einer Untergruppe A von G heißen, wenn er Fixpunkt jeder Transformation f_a mit $a \varepsilon A$ ist. Wir behaupten zunächst:

Es sei $\chi(W) > 0$; dann gehört zu jeder zusammenhängenden Abelschen Untergruppe A von G ein permanenter Fixpunkt; dabei braucht A übrigens nicht abgeschlossen zu sein.

Denn die abgeschlossene Hülle von A ist ein Toroid T; dieses wird von einem Element b erzeugt; die Abbildung f_b besitzt, da $\chi(W) > 0$ ist, einen Fixpunkt ξ, und dieser ist dann auch Fixpunkt aller Transformationen f_t mit $t \varepsilon T$, also insbesondere mit $t \varepsilon A$.

Unter den hier betrachteten Gruppen A sind die einparametrigen, geschlossenen oder offenen, Untergruppen von G enthalten; diese einparametrigen Gruppen A^1 untersuchen wir noch näher, ohne vorläufig etwas über $\chi(W)$ vorauszusetzen. Die Transformationen f_a von W, welche zu den Elementen a einer Untergruppe A^1 von G gehören, bilden eine stationäre Strömung von W, von der wir sagen, daß sie durch A^1 bewirkt wird. Wir nennen A^1 von der 1. Art oder von der 2. Art, jenachdem A^1 Untergruppe einer mit der Isotropiegruppe U konjugierten Gruppe xUx^{-1} ist oder nicht ist. Ist A^1 von der 1. Art, also $A^1 \subset xUx^{-1}$, so ist $x^{-1}ax \varepsilon U$ für alle $a \varepsilon A^1$; dann ist der Punkt ξ, der durch die Nebengruppe xU repräsentiert wird, permanenter Fixpunkt von A^1. Ist A^1 von der 2. Art, so ist der Tangentialvektor von A^1 im Einheitspunkt e von G an keine Gruppe xUx^{-1} tangential; aus der Kompaktheit von G und von U folgt dann leicht, daß die von e verschiedenen Elemente a einer Umgebung von e auf A^1 ebenfalls keiner Gruppe xUx^{-1} angehören; das bedeutet, daß die zugehörigen Transformationen f_a fixpunktfrei sind; wir sagen dann: die durch A^1 bewirkte Strömung ist „im kleinen fixpunktfrei".

Wenn $\chi(W) > 0$ ist, so gehört, wie schon gezeigt wurde, zu jeder Gruppe A^1 ein permanenter Fixpunkt; es gibt also dann nur Gruppen A^1

von der 1. Art. Wenn dagegen $\chi(W) = 0$ ist, so gibt es (nach den Sätzen II und I) eine Transformation f_a ohne Fixpunkt; da jedes Element von G auf einem Toroid liegt (Hilfssatz 3), liegt, wie aus einfachen Eigenschaften der Toroide ersichtlich ist, jedes Element auch auf einer einparametrigen Gruppe A^1; es sei A^1 eine solche Gruppe, die ein Element a enthält, für welches f_a fixpunktfrei ist; dann besitzt A^1 keinen permanenten Fixpunkt; folglich ist A^1 von der 2. Art. Man sieht also:

Ist $\chi(W) > 0$, so besitzt jede Strömung von W, die durch eine Untergruppe A^1 von G bewirkt wird, einen permanenten Fixpunkt; ist $\chi(W) = 0$, so gibt es solche Untergruppen A^1 von G, daß die durch sie bewirkten Strömungen von W im Kleinen fixpunktfrei sind, und daß daher die zugehörigen Systeme von Stromlinien keine Singularität besitzen[21]).

Im Falle $\chi(W) = 0$ kann man noch etwas mehr behaupten. Diejenigen Richtungen im Punkte e von G, die tangential an Gruppen A^1 der 1. Art sind, bilden eine Menge $\mathfrak{A}_1$, welche, wie aus der Kompaktheit von G und von U leicht folgt, abgeschlossen im Bündel aller Richtungen ist; ihre Komplementärmenge $\mathfrak{A}_2$ ist daher offen; $\mathfrak{A}_2$ ist ferner, wenn $\chi(W) = 0$ ist, nicht leer, da es in diesem Falle ja Gruppen A^1 von der 2. Art gibt, wie oben gezeigt wurde. Nun bilden aber diejenigen Richtungen, zu welchen *geschlossene* Gruppen A^1 gehören, eine in dem Bündel aller Richtungen überall dichte Menge (dies folgt leicht daraus, daß auf jedem Toroid die Punkte endlicher Ordnung überall dicht liegen); folglich enthält auch die offene und nicht leere Menge $\mathfrak{A}_2$ derartige Richtungen. Daraus ist ersichtlich:

Ist $\chi(W) = 0$, so gibt es sogar geschlossene Untergruppen A^1 von G, welche Strömungen von W bewirken, die im Kleinen fixpunktfrei sind; bei einer solchen Strömung sind alle Stromlinien einfach geschlossen.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Fällen $\chi(W) > 0$ und $\chi(W) = 0$ zeigt sich, wenn man die Frage nach dem Auftreten *isolierter* Fixpunkte untersucht. Wenn $\chi(W) > 0$ ist, so folgt aus den Sätzen I und II, daß es Abbildungen f_a mit einer endlichen positiven Anzahl von Fixpunkten gibt; diese Fixpunkte sind sämtlich isoliert. Wenn $\chi(W) = 0$ ist, so gibt es gewiß keine Abbildung f_a, welche *nur* isolierte Fixpunkte besäße;

[21]) Auf jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit, deren Charakteristik 0 ist, gibt es stetige Vektorfelder ohne Nullstellen (*Alexandroff-Hopf*, l. c., p. 552), also auch stationäre Strömungen ohne Singularitäten; in dem obigen Satz liegt der Ton auf der Tatsache, daß die genannten Strömungen durch Untergruppen der gegebenen transitiven Gruppe G bewirkt werden; daraus folgt z. B., daß diese Strömungen Isometrien im Sinne der gegenüber G invarianten Riemannschen Metrik von W sind (*Cartan*, l. c., p. 43).

denn deren Anzahl müßte endlich und positiv sein, was sich nicht mit dem Satz I verträgt; eine Abbildung f_a hat also entweder keinen Fixpunkt oder unendlich viele Fixpunkte; dadurch ist aber das Auftreten eines isolierten Fixpunktes in einer unendlichen Menge von Fixpunkten noch nicht ausgeschlossen[22]). Es gilt jedoch folgender Satz:

Ist $\chi(W) = 0$, so tritt bei keiner Transformation f_a ein isolierter Fixpunkt auf.

Beweis. ξ sei isolierter Fixpunkt von f_a; wir haben zu zeigen, daß dann $\chi(W) > 0$ ist. Ist xU die ξ repräsentierende Nebengruppe, so ist $x^{-1}ax \varepsilon U$; nach Hilfssatz 3 liegt a auf einem l-dimensionalen Toroid T, wobei l wieder den Rang von G bezeichnet; dann ist $(tx)^{-1}a(tx) = x^{-1}axtU$ für alle $t \varepsilon T$; dies bedeutet: ist $x' \varepsilon Tx$, so repräsentiert $x'U$ einen Fixpunkt von f_a. Da ξ isolierter Fixpunkt und Tx zusammenhängend ist, muß daher $Tx \subset xU$, also $x^{-1}Tx \subset U$ sein; dann hat U den Rang l. Nach dem ersten Satz dieser Nummer ist daher $\chi(W) > 0$.

Bemerkung. Eine naheliegende Verfeinerung dieses Beweises liefert den folgenden Satz: Wenn U den Rang l' hat, so liegt jeder Fixpunkt einer Transformation f_a auf einer $(l - l')$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die ganz aus Fixpunkten von f_a besteht.

Wenn die Dimension von W ungerade ist, so ist $\chi(W) = 0$, also tritt dann niemals ein isolierter Fixpunkt auf; der Hilfssatz 1 (Nr. 2) ist daher folgendermaßen zu präzisieren:

Ein isolierter Fixpunkt einer Transformation f_a eines Wirkungsraumes W hat immer den Index $+1$; ist die Dimension von W ungerade, so gibt es keinen isolierten Fixpunkt.

7. Zum Schluß soll noch die Frage behandelt werden, welche positiven Zahlen als Charakteristiken von Wirkungsräumen einer gegebenen Gruppe G auftreten. Hierfür knüpfen wir an den Hilfssatz 2, also an die endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = T_1 + T_2 \cdots + T_\sigma \tag{3}$$

des Normalisators N_T eines maximalen Toroids T nach T an, worin $T_i = c_i T$, $T_1 = T$ ist; da T Normalteiler von N_T ist, gibt es eine Faktorgruppe $N_T/T = \mathfrak{S}$; nach (3) ist sie endlich, und zwar von der Ordnung σ. Aus dem Hilfssatz 4 folgt, daß die Struktur der Gruppe $\mathfrak{S}$ nicht von dem

[22]) Zum Beispiel gibt es in der Gruppe G der elliptischen Bewegungen der reellen projektiven Ebene W Transformationen, bei denen die Menge der Fixpunkte aus den Punkten einer Geraden und einem isolierten Punkt besteht; hierbei ist aber $\chi(W) = 1$.

speziell gewählten maximalen Toroid T, sondern nur von der Gruppe G abhängt (bekanntlich spielt diese endliche Gruppe $\mathfrak{S}$ eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Struktur von G). [23])

Es sei nun $W = G/U$ und $\chi(W) > 0$; dann hat U den Rang l (Nr. 6), und U enthält daher ein maximales Toroid T von G. Aus dem Beweis des Satzes II (Nr. 5) ist zu ersehen, wie man die Charakteristik $\chi(W)$, die dort als Anzahl von Fixpunkten einer Transformation f_a auftritt, bestimmt: eine Nebengruppe xU repräsentiert dann und nur dann einen Fixpunkt, wenn sie ein Element von N_T enthält, oder was dasselbe ist, wenn sie eine Nebengruppe cT, $c \varepsilon N_T$, enthält; andererseits ist jede Nebengruppe cT in einer Nebengruppe xU enthalten; jedem der σ Elemente T_i von $\mathfrak{S}$ ist also ein Fixpunkt durch die Vorschrift zugeordnet, daß $T_i = c_i T$ in der Nebengruppe xU, welche den Fixpunkt darstellt, enthalten sei, und durch diese Zuordnung werden alle Fixpunkte erfaßt. Zwei Elementen $T_i = c_i T$ und $T_j = c_j T$ ist dann und nur dann derselbe Fixpunkt zugeordnet, wenn $c_j \varepsilon c_i U$ ist; diese Bedingung läßt sich auch anders ausdrücken: die Durchschnittsgruppe $U \frown N_T = U'$ enthält T und besteht daher aus Nebengruppen $c_i T$; die Faktorgruppe $U'/T = \mathfrak{S}'$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$; die soeben formulierte Bedingung dafür, daß den Elementen T_i und T_j von $\mathfrak{S}$ derselbe Fixpunkt zugeordnet sei, ist dann offenbar gleichbedeutend mit der folgenden: es ist $T_j \varepsilon T_i \mathfrak{S}'$, d. h., T_i und T_j gehören derselben Nebengruppe in der Nebengruppen-Zerlegung von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{S}'$ an. Hieraus ist ersichtlich: die Anzahl $\chi(W)$ der Fixpunkte ist gleich dem Index der Untergruppe $\mathfrak{S}'$ in der Gruppe $\mathfrak{S}$.

Umgekehrt kann man zu jeder Zahl χ, welche als Index einer Untergruppe $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ auftritt, einen Wirkungsraum W mit der Charakteristik χ finden: man hat nur unter $U = U'$ diejenige Untergruppe von N_T zu verstehen, deren Elemente in den zu $\mathfrak{S}'$ gehörigen Nebengruppen $c_i T$ enthalten sind; dann hat, wie aus der soeben durchgeführten Überlegung hervorgeht, der Wirkungsraum $W = G/U$ die Charakteristik χ.

Damit ist gezeigt:

Als positive Charakteristiken von Wirkungsräumen der Gruppe G treten die und nur die Zahlen auf, welche Indizes von Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{S}$ sind; alle diese Zahlen sind Teiler von σ; die Zahl σ selbst ist die Charakteristik des Wirkungsraumes G/T.

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

[23]) *Cartan*, l. c., pp. 40—41. — Die Gruppe $\mathfrak{S}$ ist isomorph der Gruppe derjenigen Automorphismen von T, welche durch innere Automorphismen von G bewirkt werden.