Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Les espaces réguliers et le problème de métrisation.
Autor: Alexits, Georges
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13545

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les espaces réguliers et le problème de métrisation

Par Georges Alexits, Budapest

1. Un espace à écart symmétrique est un ensemble dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire d'un écart assujetti aux conditions suivantes:

$$1^0 \quad pq = qp \geqq 0 \ ;$$
$$2^0 \quad pq = 0 \ \textit{équivaut à} \ p = q \ .$$

Nous appelons *espace semi-distancié* un espace à écart symmétrique qui est en même temps un espace topologique de M. Hausdorff. Un espace semi-distancié s'appelle *espace distancié,* si l'écart pq satisfait aussi à l'inégalité triangulaire

$$3^0 \quad pq + qr \geqq pr \ .$$

Le problème de métrisation consiste à trouver des conditions auxquelles un espace de Hausdorff doit satisfaire pour être homéomorphe avec un espace distancié. Il est évident qu'un tel espace métrisable E est *à caractère dénombrable,* c'est-à-dire que la famille originelle des voisinages d'un point arbitraire p de E contient une infinité dénombrable de voisinages $V_1(p)$, $V_2(p)$, ..., $V_n(p)$, ... de sorte que

$$V_{n+1}(p) \subset V_n(p) \qquad \text{et} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} V_n(p) = (p) \ .$$

Une autre condition évidemment nécessaire est la régularité de E. Cette expression signifie, pour un espace à caractère dénombrable, que la suite alternante des voisinages $V_n(p)$ et de leurs fermetures $\overline{V_n(p)}$ est monotone; en autres termes, l'espace E est *régulier,* lorsque

$$\overline{V_{n+1}(p)} \subset V_n(p) \ .$$

2. Le problème de métrisation des espaces réguliers a été résolu, grâce à un théorème de M. Tychonoff[1]), par P. Urysohn[2]) sous la condition supplémentaire que l'espace régulier E soit *parfaitement séparable.* On entend par cette expression: non seulement les voisinages des points

[1]) *A. Tychonoff,* Math. Ann. **95** (1925), p. 139—142.

[2]) *P. Urysohn,* Math. Ann. **94** (1925), p. 309—315.

individuels de E forment une infinité dénombrable, comme dans le cas des espaces à caractère dénombrable, mais aussi la famille de *tous* les voisinages de E est dénombrable. Cette condition restrictive intervient explicitement aussi dans la métrisation des espaces compacts; problème résolu par le même auteur[3]). Si E est semi-distancié, l'introduction explicite de cette condition est superflue, car M. Niemytzki[4]) a démontré que tout espace semi-distancié compact est homéomorphe avec un espace distancié. Dans ce qui suit, nous allons voir que les points d'accumulation des espaces réguliers à caractère dénombrable se laissent définir par l'intermédiaire d'un écart symmétrique d'où nous tirerons immédiatement le théorème qu'un espace compact et à caractère dénombrable est homéomorphe avec un espace distancié. Dans ce théorème, la condition de séparabilité parfaite n'intervient pas explicitement; notre théorème surpasse donc en généralité le théorème correspondant de Urysohn. Nous donnerons enfin, à titre d'application de notre méthode, une démonstration simple d'un théorème de métrisation dû à Mme Frink[5]).

3. *Tout espace E à caractère dénombrable et régulier est homéomorphe avec un espace semi-distancié.*

Etant donnés deux points arbitraires p et q de E, envisageons tous les voisinages $V_n(p)$ et $V_n(q)$ pour lesquels $V_n(p) \cdot V_n(q) = 0$. Désignons par $n_{p,q}$ le plus petit indice n pour lequel cette relation a lieu. Nous définissons l'écart pq des points p et q par la relation

$$pq = \frac{1}{n_{p,q}} \cdot$$

Il est évident que pq satisfait aux conditions 1⁰ et 2⁰. Désignons par E^* l'espace dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire de l'écart pq. A étant un sous-ensemble de l'espace E, nous désignerons par A^* le sous-ensemble de E^* correspondant à l'ensemble A. Nous avons à démontrer que les points d'accumulation d'un ensemble arbitraire $A \subset E$ sont identiques avec les points d'accumulation de l'ensemble correspondant $A^* \subset E^*$. Soit donc p un point d'accumulation de A. Tout voisinage $V_n(p)$ contient un point $p_n \varepsilon A$ différent de p, donc $V_n(p) \cdot V_n(p_n) \neq 0$; par suite $pp_n < 1/n$, c'est-à-dire p est un point d'accumulation de A^*. Si, au contraire, p est un point d'accumulation de l'ensemble A^*, il existe pour tout $k = 1, 2, \ldots$ un point $p_k \varepsilon A^*$ différent

[3]) *P. Urysohn*, Math. Ann. **92** (1924), p. 275—293.

[4]) *V. Niemytzki*, Math. Ann. **104** (1934), p. 666—671.

[5]) *A. H. Frink*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (1937), p. 133—142.

de p de sorte que $pp_k < 1/k$. S'il existait un entier fixe n tel que p_k soit pour tout $k = 1, 2, \ldots$ un point de $E - V_n(p)$, alors p_k serait a fortiori situé, en vertu de la régularité de E, dans l'ensemble $E - \overline{V_{n+1}(p)}$. L'ensemble $E - \overline{V_{n+1}(p)}$ étant ouvert, on peut déterminer un entier k_n tel que $V_{k_n}(p) \subset E - \overline{V_{n+1}(p)}$. Il en résulterait

$$V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(p_k) \subset V_n(p) \cdot V_{k_n}(p_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

par conséquent $pp_k \geqq 1/k_n$, contrairement à notre hypothèse $pp_k < 1/k$. La relation $p_k \varepsilon E - V_n(p)$ nous a conduit à une contradiction. Il existe donc pour tout indice n un entier i_n de sorte que, pp_k étant $< 1/i_n$, on ait $p_k \varepsilon V_n(p)$, c'est-à-dire tout point d'accumulation p de A^* est aussi un point d'accumulation de A; ce qui achève la démonstration.

4. *Dans un espace E à caractère dénombrable et régulier, tout ensemble fermé est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.*

Introduisons, en vertu du théorème précédent, l'écart pq pour définir les points d'accumulation de E. Alors, la proposition de notre théorème revient à une proposition que l'auteur a démontrée ailleurs[6]) et d'après laquelle tout ensemble fermé F d'un espace semi-distancié est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts. Voilà la démonstration. En désignant par $S(p, 1/n)$ l'ensemble de tous les points $q \varepsilon E$ tels que $pq < 1/n$, il existe un voisinage $V_{k_n}(p) \subset S(p, 1/n)$. Posons

$$G_n = \sum_{p \varepsilon F} V_{k_n}(p) .$$

G_n étant la somme des ensembles ouverts $V_{k_n}(p)$, il est lui-même ouvert. Soit q un point du produit des ensembles G_n, $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors, il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un point $q_n \varepsilon F$ tel que $qq_n < 1/n$. L'écart qq_n tend, par conséquent, vers zéro, q est donc un point d'accumulation de l'ensemble F. Or, F étant fermé, il contient tous ses points d'accumulation. Le point arbitraire q du produit $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ est donc un point de F, c'est-à-dire que

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n \subset F .$$

Mais, on a par définition $F \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, par conséquent $F = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$; c. q. f. d.

5. *Un espace de Hausdorff E compact et à caractère dénombrable est homéomorphe avec un espace distancié.*

---

[6]) *G. Alexits*, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie **31** (1938), p. 36—42.

Puisqu'un espace régulier à caractère dénombrable est, d'après 3, homéomorphe avec un espace semi-distancié et tout espace semi-distancié compact est, en vertu du théorème précité de M. Niemytzki, homéomorphe avec un espace distancié, nous n'avons qu'à démontrer que notre espace E est régulier. Admettons le contraire et nous en déduirons une contradiction. En effet, si E n'est pas régulier, il existe un entier n tel qu'on puisse déterminer pour tout $k = 1, 2, \ldots$ un point

$$q_k \varepsilon \overline{V_k(p)} \cdot (E - V_n(p)) . \tag{1}$$

E étant compact, on peut extraire de la suite $\{q_k\}$ une suite partielle $\{q_{i_k}\}$ convergente vers un point-limite q. Soit $V_m(q)$ un voisinage arbitraire de q et choisissons i_k de sorte que $q_{i_k} \varepsilon V_m(q)$. Alors, il existe un entier j_k tel que

$$V_{j_k}(q_{i_k}) \subset V_m(q) . \tag{2}$$

Or q_{i_k} est, d'après (1), un point de $\overline{V_{i_k}(p)}$, le voisinage $V_{j_k}(q_{i_k})$ contient par suite un point p_k de $V_{i_k}(p)$ d'où on obtient, d'après (2), que p_k est un point de $V_m(q)$. Comme $V_m(q)$ est un voisinage arbitraire de q, il s'ensuit que q est un point d'accumulation de la suite $\{p_k\}$. Mais, p_k étant un point de $V_{i_k}(p)$, la suite $\{p_k\}$ tend vers p. On a donc à la fois $p_k \to p$ et $p_k \to q$, ce qui équivaut à $p = q$. Or, q étant, d'après (1), un point d'accumulation de l'ensemble fermé $E - V_n(p)$, on a $q \varepsilon E - V_n(p)$, contrairement à la relation justement démontrée $p = q$. Cette contradiction prouve que E est un espace régulier, c. q. f. d.

6. Nous allons encore démontrer que le théorème mentionné de Mme Frink se laisse ramener au théorème suivant de M. Niemytski[7]: S'il existe, dans un espace semi-distancié E, une fonction $\varphi(p, \varepsilon)$ de sorte que, les relations $pq < \varphi(p, \varepsilon)$ et $qr < \varphi(p, \varepsilon)$ ayant lieu, on ait $pr < \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$, alors E est homéomorphe avec un espace distancié. Voici le théorème de Mme Frink:

Pour qu'un espace de Hausdorff E soit homéomorphe avec un espace distancié, il faut et il suffit que E soit à caractère dénombrable et qu'il existe, pour tout point p et tout entier n, un entier $k_n = k(p, n)$ tel que, la relation $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$ ayant lieu, on ait $V_{k_n}(q) \subset V_n(p)$.

La nécessité de cette condition est, comme l'a démontré Mme Frink, une conséquence immédiate de la métrisabilité de E. Quant à sa suffisance,

[7]) *V. W. Niemytzki*, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), p. 507—513.

soit q un point arbitraire de $\overline{V_{k_n}(p)}$; alors $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$, par conséquent $V_{k_n}(q) \subset V_n(p)$. On a donc

$$\overline{V_{k_n}(p)} \subset \sum_{(q)} V_{k_n}(q) \subset V_n(p) .$$

E est par suite un espace régulier, nous y pouvons donc introduire l'écart pq que nous avons défini au no. **3**. Choisissons maintenant n de sorte que $1/n < \varepsilon$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. Alors, si $pq < 1/k_n$ et $qr < 1/k_n$, il résulte de la définition de l'écart pq que $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$ et $V_{k_n}(q) \cdot V_{k_n}(r) \neq 0$. On en tire $V_{k_n}(q) \subset V_n(q)$, par conséquent

$$V_n(p) \cdot V_n(r) \supset V_n(p) \cdot V_{k_n}(r) \supset V_{k_n}(q) \cdot V_{k_n}(r) \neq 0 .$$

Cette relation équivaut, grâce à la définition de l'écart pr, à l'inégalité $pr < 1/n < \varepsilon$. En posant donc $\varphi(p, \varepsilon) = k_n$, nous avons défini une fonction satisfaisant aux conditions de M. Niemytzki, ce qui était justement notre but.

(Reçu le 12 avril 1940.)