Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Sur une généralisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher.

Autor: Lévy, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15554

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur une généralisation des fonctions orthogonales de M. Rademacher

Par Paul Lévy, Lyon

L'objet du présent travail est de définir un système de fonctions orthogonales dans l'intervalle (0,1) qui est lié à la numération à base p comme le système bien connu de H. Rademacher l'est à la numération dyadique. Seulement, tandis que les fonctions de Rademacher sont réelles, toujours égales à -1 ou à $+1$, il s'agit ici de fonctions imaginaires, ayant p valeurs possibles, qui sont les racines p-ièmes de l'unité, et elles sont liées par la relation d'orthogonalité complexe (ou hermitienne)

$$\int_0^1 \varphi_h(x)\,\overline{\varphi}_k(x)\,dx = 0 \qquad (h \neq k)\ , \tag{1}$$

où $\overline{\varphi}_k$ désigne l'imaginaire conjuguée de φ_k ; leurs modules étant constamment égaux à l'unité, elles sont de plus normales, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_0^1 |\,\varphi_h^2(x)\,|\,dx \equiv \int_0^1 \varphi_h(x)\,\overline{\varphi}_h(x)\,dx = 1\ . \tag{2}$$

Si simples que soient ces fonctions, il ne semble pas qu'elles aient encore été signalées. Du moins *Kaczmarz* et *Steinhaus*, dans leur *Theorie der Orthogonalreihen* publiée en 1935, n'en font pas mention.

1. Rappelons d'abord ce qui fait l'intérêt des systèmes de fonctions définis successivement par A. Haar[1]) et par H. Rademacher[2]), et par là même de celui que nous allons définir.

Lagrange et ses contemporains ne croyaient pas qu'il fût possible de représenter n'importe quelle fonction continue, dans un intervalle fini, par des combinaisons linéaires d'une infinité dénombrable de fonctions données. Cette idée erronée provenait évidemment d'une induction incorrecte faite en partant de la série de Taylor. Le moyen le plus simple de montrer que Lagrange se trompait est fourni par l'étude des fonctions à paliers. Une *fonction à paliers* est une fonction qui, dans un intervalle fini (a, b), n'admet qu'un nombre fini de discontinuités, et est constante

[1]) *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Mathematische Annalen, t. 69 (1910), p. 331—371.

[2]) *H. Rademacher*, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Mathematische Annalen, t. 87 (1922), p. 112—138.

dans chacun des intervalles où elle est continue. Il résulte évidemment de la continuité uniforme des fonctions continues dans l'intervalle fermé (a, b) qu'une telle fonction $f(x)$ peut être approchée, par des fonctions à paliers, avec une erreur inférieure en tous les points de cet intervalle, à un nombre positif arbitrairement petit près. Il est même évident qu'on ne change rien à ce résultat en ne considérant que les fonctions à paliers dont les points de discontinuité appartiennent à un ensemble donné E, si cet ensemble est partout dense dans (a, b).

Nous prendrons pour (a, b) l'intervalle $(0,1)$, et pour E l'ensemble E_p des nombres rationnels représentés par des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de p. Pour chaque fonction à paliers $g(x)$ dont les points de discontinuité appartiennent ainsi à E_p, il existe un entier h tel que $g(x)$ soit constant dans chacun des intervalles $i_{h,k} \equiv [(k-1)/p^h, k/p^h]$; $g(x)$ est donc de la forme

$$c_1 \psi_{h,1}(x) + c_2 \psi_{h,2}(x) + \cdots + c_H \psi_{h,H}(x) \quad (H = p^h) \ , \tag{3}$$

c_k désignant la valeur constante de $g(x)$ dans l'intervalle $i_{h,k}$ et $\psi_{h,k}(x)$ désignant la fonction à paliers égale à l'unité dans cet intervalle et nulle partout ailleurs. Une fonction continue $f(x)$ est donc une limite uniforme d'expressions de la forme (3); elle est donc une combinaison linéaire de l'ensemble des fonctions $\psi_{h,k}(x)$ $(h = 0,1,\ldots ; k = 1, 2,\ldots, H)$.

Il faut remarquer que ces fonctions ne sont pas linéairement indépendantes; on a en effet

$$\psi_{h,k}(x) = \psi_{h+1,(k-1)p+1}(x) + \psi_{h+1,(k-1)p+2}(x) + \cdots + \psi_{h+1,kp}(x) \ .$$

Pour obtenir une suite de fonctions linéairement indépendantes, il n'y a qu'à supprimer les fonctions $\psi_{h+1,kp}(x)$. En rangeant les fonctions conservées dans l'ordre des h croissants, et, pour chaque valeur de h, dans l'ordre des k croissants, on obtient une suite de fonctions

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots, \tag{4}$$

qui est *fermée* dans l'espace des fonctions définies et continues dans $(0,1)$, c'est-à-dire qu'une telle fonction $f(x)$ peut être approchée uniformément, autant qu'on veut, par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions $\psi_n(x)$.

On peut naturellement normaliser ces fonctions, en les multipliant par $\sqrt{p}$; pour $p = 2$, on obtient ainsi les fonctions de M. Haar.

Pour terminer ces remarques préliminaires, observons que la suite (4), fermée dans l'espace des fonctions continues, l'est aussi dans l'espace

L_α des fonctions dont la puissance d'exposant α est sommable dans l'intervalle (0,1). On sait en effet qu'une fonction $f(x)$ de L_α peut être approchée autant qu'on veut, en moyenne d'ordre α, par des fonctions à paliers dont les points de discontinuité appartiennent à l'ensemble E_p. La conclusion, en ce qui concerne la suite (4), est alors la même que pour l'approximation uniforme des fonctions continues.

2. Les résultats relatifs aux fonctions $\psi_n(x)$ s'étendent évidemment à toutes les suites de fonctions $\varphi_n(x)$ définies dans l'intervalle (0,1) et présentant les caractères suivants:

1. Ce sont des fonctions à paliers.
2. Elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'aucune d'elles n'est une combinaison linéaire des précédentes.
3. Les seuls points de discontinuité possibles pour les $H = p^h$ premières de ces fonctions sont les points d'abscisses multiples de p^{-h}.

Ces conditions sont en effet suffisantes pour que l'ensemble des combinaisons linéaires des H premières fonctions $\varphi_n(x)$ soit l'ensemble des fonctions à paliers constantes dans chacun des intervalles $i_{h,k}(k = 1, 2, \ldots, H)$.

Parmi les suites de fonctions réelles ou complexes qui présentent ces caractères, celles qui sont orthogonales et normales (au point de vue complexe, défini par les formules (1) et (2)) présentent un intérêt particulier. Comme elles sont complètes dans L_2, on sait que n'importe quelle fonction $f(x)$ de L_2 peut être représentée par une série, convergente en moyenne quadratique, de la forme $\sum a_n \varphi_n(x)$; les coefficients a_n sont donnés par la formule de Fourier généralisée

$$a_n = \int_0^1 f(x)\, \bar{\varphi}_n(x)\, dx \ , \tag{5}$$

et l'on a

$$\sum |a_n^2| = \int_0^1 |f^2(x)|\, dx \leqslant \infty \ . \tag{6}$$

Inversement, il résulte du théorème de Fischer et Riesz que, si l'on se donne une suite de coefficients a_n telle que la série $\sum |a_n|^2$ soit convergente, la série $\sum a_n \varphi_n(x)$ converge en moyenne quadratique vers une fonction $f(x)$, de carré sommable et qui vérifie les formules (5) et (6).

L'orthogonalité d'un certain nombre de fonctions entraînant leur indépendance linéaire, si, par un procédé quelconque, nous formons une suite de fonctions $\varphi_n(x)$, deux à deux orthogonales, normales, et telles de plus

que les $H = p^h$ premières de ces fonctions soient constantes dans chacun des intervalles $i_{h,k} (k = 1, 2, \ldots, H)$, tous les résultats précédents s'appliquent à cette suite. Elle est en particulier fermée, aussi bien dans l'espace des fonctions continues que dans n'importe lequel des espaces L_α, et elle est équivalente à la suite (4) en ce sens que les combinaisons linéaires des H premières fonctions considérées sont exactement les mêmes pour l'une et l'autre de ces suites (dans cet énoncé on ne peut pas remplacer $H = p^h$ par un nombre entier quelconque).

3. Pour former une telle suite, désignons par α une racine primitive de l'équation

$$x^p = 1, \tag{7}$$

et par $\eta(x)$ la partie entière de x, et posons

$$\omega(x) = \alpha^{\eta(x)}, \quad \omega_h(x) = \omega(p^h x) \qquad (h = 1, 2, \ldots) . \tag{8}$$

Si r est un entier qui ne soit pas multiple de p, $\omega_h^r(x)$ est une fonction périodique, de période $1/p^{h-1}$, et prenant successivement dans une période les valeurs $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{p-1}$ $(\beta = \alpha^r \neq 1 ; \beta^p = \alpha^{pr} = 1)$. On a donc

$$\int_{i_{h-1,k}} \omega_h^r(x)\, dx = \frac{1 + \beta + \cdots + \beta^{p-1}}{p^h} = \frac{\beta^p - 1}{p^h(\beta - 1)} = 0 . \tag{9}$$

Pour définir maintenant les fonctions $\varphi_n(x)$, utilisons la numération à base p ; elle donne pour chaque entier n positif ou nul une représentation et une seule de la forme

$$n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 p + \varepsilon_3 p^2 + \cdots + \varepsilon_\nu p^{\nu-1} + \cdots , \tag{10}$$

les ε_ν étant des entiers $\geqslant 0$ et $< p$, un nombre fini d'entre eux étant seuls différents de zéro. Si $n = 0$, tous les ε_ν sont nuls; si $n > 0$, il y a au moins un ε_ν positif, et la plus grande valeur de ν pour laquelle ε_ν soit positif est le plus grand exposant entier h tel que $p^h < n$. Nous définirons alors $\varphi_n(x)$ par la formule

$$\varphi_n(x) = \omega_1^{\varepsilon_1}(x)\, \omega_2^{\varepsilon_2}(x) \ldots \omega_\nu^{\varepsilon_\nu}(x) \ldots , \tag{11}$$

qui représente bien entendu un produit fini, puisque les facteurs d'indices $> h$ sont égaux à l'unité. On a $\varphi_0(x) = 1$, tandis que, pour $n > 0$, les $h - 1$ premiers facteurs étant constants dans chacun des intervalles

$i_{h-1,k}$, $\varphi_n(x)$ est, dans chacun de ces intervalles, de la forme $c_k \omega_h^r(x)$, l'exposant $r = \varepsilon_h$ étant un entier compris entre 0 et p. Compte tenu de la formule (9), on a donc

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \sum_k \int_{i_{h-1,k}} \varphi_n(x)\, dx = \begin{cases} 1\,, & \text{si } n = 0\,, \\ 0\,, & \text{si } n > 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

Pour évaluer maintenant l'intégrale (1), observons que, $\varphi_h(x)$ et $\varphi_k(x)$ ayant respectivement les valeurs

$$\varphi_h(x) = \Pi\, \omega_\nu^{\varepsilon'_\nu}(x)\,, \quad \varphi_k(x) = \Pi\, \omega_\nu^{\varepsilon''_\nu}(x)\,,$$

analogues à la valeur (11) de $\varphi_n(x)$, on a

$$\varphi_h(x)\, \bar{\varphi}_k(x) = \Pi\, \omega_\nu^{\varepsilon_\nu}(x)\,, \tag{13}$$

ε_ν étant indifféremment égal à $\varepsilon'_\nu - \varepsilon''$ ou à $\varepsilon'_\nu - \varepsilon''_\nu + p$, ce qui permet de rendre tous les $\varepsilon_\nu \geqslant 0$ et $< p$; il n'y en a d'ailleurs qu'un nombre fini qui soient différents de zéro. Le produit (13) est donc de la forme (11); il représente une fonction $\varphi_n(x)$. D'ailleurs, si $h = k$, et dans ce cas seulement, la suite des ε'_ν est identique à celle des ε''_ν, tous les ε_ν sont nuls, et n, défini par la formule (10), est nul. La formule (13) donne donc

$$\int_0^1 \varphi_h(x)\, \bar{\varphi}_k(x)\, dx = \begin{cases} 0\,, & \text{si } h \neq k\,, \\ 1\,, & \text{si } h = k\,. \end{cases} \tag{14}$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont donc des fonctions à paliers, formant une suite orthogonale et normale dans l'intervalle (0,1); si $n < p^h$, $\varphi_n(x)$ est constant dans chacun des intervalles $i_{h,k}$. Ces fonctions vérifient donc toutes les conditions énoncées au No. 2.

4. *Discussion. Conditions de réalité.*

Si on remplace α par la racine imaginaire conjuguée $\bar{\alpha} = 1/\alpha$, les fonctions $\omega_\nu(x)$, et par suite les fonctions $\varphi_n(x)$, sont remplacées par les fonctions imaginaires conjuguées $\bar{\omega}_\nu(x)$ et $\bar{\varphi}_n(x)$. A l'ordre près, la suite des fonctions $\bar{\varphi}_n(x)$ ainsi obtenues est évidemment identique à celle des fonctions $\varphi_n(x)$; on ne change en effet pas le produit (11) en remplaçant $\omega_\nu(x)$ par $\bar{\omega}_\nu(x) = 1/\omega_\nu(x)$, et, pour tous les indices ν pour lesquels ε_ν n'est pas nul, ε_ν par $p - \varepsilon_\nu$. Les fonctions $\varphi_n(x)$ sont donc, ou bien réelles, ou bien deux à deux imaginaires conjuguées. Tout indice n pour lequel $\varphi_n(x)$ n'est pas réel est donc associé à un autre indice n' tel que

$$\bar{\varphi}_{n'}(x) = \varphi_n(x)\,. \tag{15}$$

Pour $h = n$, $k = n' \neq n$, la relation d'orthogonalité (14) s'écrit alors

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x)\, dx = 0 \ ,$$

de sorte que, en désignant respectivement par $R_n(x)$ et $I_n(x)$ la partie réelle et la partie imaginaire de $\varphi_n(x)$, on a

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 R_n^2(x)\, dx = \int_0^1 I_n^2(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 |\varphi_n^2(x)|\, dx = \tfrac{1}{2} \ , \\ &\int_0^1 R_n(x)\, I_n(x)\, dx = 0 \ , \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

En remplaçant $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n'}(x)$ par $\sqrt{2}\, R_n(x)$ et $\sqrt{2}\, I_n(x)$, et opérant ainsi pour tous les couples de nombres associés n et n', on obtient donc une nouvelle suite orthogonale et normale, composée uniquement de fonctions réelles.

Etudions maintenant les conditions de réalité des fonctions $\varphi_n(x)$. Remarquons à cet effet que toutes les valeurs possibles de $\varphi_n(x)$ sont des puissances de α ; les seules valeurs réelles possibles sont donc -1 et $+1$, la valeur -1 n'étant possible que si p est pair.

Si donc p est impair, la seule fonction $\varphi_n(x)$ réelle est la fonction $\varphi_0(x)$, constamment égale à l'unité. Toutes les autres sont deux à deux imaginaires conjuguées.

Pour $p = 2$, la seule racine primitive de l'équation (7) est $\alpha = -1$; toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ sont donc réelles ; c'est le cas étudié par M. Rademacher.

Si enfin $p = 2p' > 2$, si tous les ε_ν sont égaux à 0 ou à p', tous les $\omega_\nu(x)$, et par suite $\varphi_n(x)$, sont égaux à -1 ou $+1$; parmi les p^h premières fonctions $\varphi_n(x)$, on obtient ainsi 2^h fonctions réelles, toujours égales à -1 et $+1$. Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, il suffit d'observer que $\varphi_n(x)$ réel, c'est-à-dire $n = n'$, implique qu'aucun des ε_ν ne soit changé quand on passe de n à n' ; or, si ε_ν n'est pas nul, il est remplacé par $p - \varepsilon_\nu$, qui n'est égal à ε_ν que si $\varepsilon_\nu = p$; les seules valeurs inchangées sont donc 0 et p', et, pour que $\varphi_n(x)$ soit réel, il est finalement nécessaire et suffisant que tous les ε_ν soient égaux à 0 ou à p'.

5. *Nouvelle extension.* Au lieu de la numération à base p, considérons la numération généralisée. Un système de numération généralisée est défini par une suite d'entiers

$$p_1, p_2, \ldots, p_h, \ldots,$$

tous plus grands que l'unité. Pour chaque valeur de h, ε_h peut alors prendre les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p_h - 1$, et, si l'on pose

$$P_h = p_1 p_2 \cdots p_h ,$$

chaque entier n positif ou nul peut être représenté d'une manière et d'une seule par la formule

$$n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 P_1 + \varepsilon_3 P_2 + \cdots + \varepsilon_h P_{h-1} .$$

Désignons maintenant par α_k une racine primitive de l'équation

$$x^{p_k} = 1 ,$$

et posons

$$\omega_k(x) = \alpha_k^{\eta(P_k x)} ,$$

$$\varphi_n(x) = \omega_1^{\varepsilon_1}(x)\, \omega_2^{\varepsilon_2}(x) \ldots \omega_h^{\varepsilon_h}(x) .$$

On obtient ainsi, comme dans le cas où tous les p_h ont une même valeur p, une suite complète de fonctions orthogonales et normales; ce sont des fonctions à paliers, et les P_h premières sont constantes dans chacun des intervalles $\left(\frac{k_{-1}}{P_h}, \frac{k}{P_h}\right)$.

En dehors du cas particulier où tous les p_h ont une même valeur p, un cas remarquable est celui où

$$p_h = h , \quad \text{donc} \quad P_h = h !$$

(Reçu le 1 septembre 1942)