Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen.

Autor: Nef, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15558

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für Potentialfunktionen

Von Walter Nef, Zürich

1.

Von *Fatou* stammt der Satz:

Wenn eine analytische Funktion im Innern des Einheitskreises regulär und beschränkt ist, so existiert bei radialer Annäherung von innen an einen Punkt des Einheitskreises der Grenzwert der Funktionswerte für alle Punkte des Kreises, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maß 0 von Punkten auf dem Kreis[1]).

Da zu Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $w = u + iv$ der komplexen Variabeln $z = x + iy$ stets eine Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ existiert, so daß

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

ist; da umgekehrt für jede Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ die Funktion

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

analytisch in der Variabeln $z = x + iy$ ist, können wir den *Fatou*schen Satz auch so aussprechen:

Ist eine Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ im Innern des Kreises

$$| x^2 + y^2 | = 1$$

regulär und sind daselbst die Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

---

[1]) *Fatou*, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica, vol. 30, pag. 335.

Ein zweiter, einfacher Beweis wurde von *Caratheodory* gegeben:

C. Caratheodory, Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis, Mathematische Annalen, Bd. 73, pag. 305. Der Beweis, den wir für unseren Satz geben, ist eine Verallgemeinerung dieses Beweises von Caratheodory.

beschränkt, so konvergieren die Werte dieser Ableitungen bei radialer Annäherung von innen an irgendeinen Punkt des Kreises, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maß 0 von Punkten.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Gültigkeit dieses Satzes für Potentialfunktionen von beliebig vielen Variabeln zu zeigen, also zu beweisen:

Hauptsatz 1. *Wenn eine im Innern der Einheitskugel*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

reguläre harmonische Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *der* n *Variabeln* $x_1, \ldots, x_n$ *Ableitungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

hat, die alle im Innern derselben Einheitskugel beschränkt sind, so konvergieren diese Ableitungen bei radialer Annäherung von innen an einen Randpunkt der Kugel, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom $(n-1)$*-dimensionalen Maß 0 von Punkten auf der Kugel.*

Die Grundlage des Beweises wird von einer Theorie regulär hyperkomplexer Funktionen gebildet, die im folgenden entwickelt werden wird. Vorbild waren mir dabei die Arbeiten von Herrn *Rud. Fueter* über die regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln, über den Satz von *Hartogs*[2]) und seine Arbeit über die Funktionentheorie der *Diracschen* Differentialgleichungen[3]).

Ich bemerke noch, daß die analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln unter meinen regulären Funktionen enthalten sind. Ist nämlich

$$w = f(z) = u + iv$$

analytisch in der Variabeln $z = x + iy$, so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

---

[2]) *Rud. Fueter*, Über einen Hartogsschen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variabeln, C. M. H. vol. 14, pag. 394.

[3]) *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Diracschen Differentialgleichungen, C. M. H. vol. 16, pag. 19.

Bilden wir nun die hyperkomplexe Funktion

$$w^* = e_1 u + e_2 v ,$$

und fassen sie auf als Funktion der Variabeln

$$z^* = e_1 y + e_2 x ,$$

so lauten für w^* die Regularitätsbedingungen (4a, b):

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und sind also erfüllt. Also ist immer, wenn die Funktion $w = u + iv$ eine analytische Funktion der Variabeln $z = x + iy$ ist, die Funktion $w^* = e_1 u + e_2 v$ eine im unten (3, 4) definierten Sinne reguläre Funktion der Variabeln $z^* = e_1 y + e_2 x$.

Ich erwähne schließlich noch, daß für analytische Funktionen von zwei komplexen Variabeln ein verwandter Satz bereits von *Bergmann* und *Marcinkiewicz*[4]) bewiesen ist, welche zeigen, daß für in gewissen Bereichen mit ausgezeichneten Randflächen reguläre Funktionen zweier komplexer Variabler bei einfachen Voraussetzungen über das mittlere Wachstum der Funktion fast überall auf einer ausgezeichneten Randfläche der Grenzwert existiert.

2.

$\mathfrak{A}$ sei eine *Clifford*sche Algebra der Ordnung 2^n mit den Basiselementen

$$1 , e_1 , \ldots , e_n , e_{12} , \ldots , e_{12\ldots n} ,$$

wo 1 die Haupteinheit ist und wo die Basisgrößen $e_j (j = 1 , \ldots , n)$ den Relationen

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & e_j^2 = 1 & (j = 1 , \ldots , n) \\ \text{II.} & e_j e_k = - e_k e_j & (j , k = 1 , \ldots , n , j \neq k) \end{array}$$

genügen[5]). Die Zahlen, mit denen wir im folgenden rechnen werden, sind

---

[4]) *St. Bergmann* und *J. Marcinkiewicz*, Sur les valeurs limites des fonctions de deux variables complexes, C. R. Acad. Sci., 208, pag. 877.

[5]) Vgl. die Zürcher Dissertation:
Paul Bosshard, Die Cliffordschen Zahlen, ihre Algebra und ihre Zahlentheorie, Zürich 1940.

die Zahlen dieser Algebra im Körper der reellen Zahlen, d. h. die Größen der Form:

$$z = x + \sum_{j=1}^{n} e_j x_j + \cdots + e_{12\ldots n} \cdot x_{12\ldots n} ,$$

wo die x beliebige reelle Zahlen sind.

Der Zahl z ordnen wir nach der folgenden Definition den Betrag $|z|$ zu:

$$|z| = \left| x^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \cdots + x_{12\ldots n}^2 \right|^{1/2} .$$

Für zwei beliebige Zahlen z_1 und z_2 beweist man dann leicht:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \\ &\text{b)} \quad |z_1 \cdot z_2| \leqslant |z_1| \cdot |z_2| \cdot \mu^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bedeutet μ die Ordnung 2^n der Algebra. In erster Linie werden die Größen von der Form

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \tag{2}$$

eine Rolle spielen. Damit ordnen wir den n reellen Variabeln $(x_1, \ldots, x_n)$ der Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ die eine hyperkomplexe Variable z zu.

Wir werden im folgenden Funktionen zu betrachten haben, die als Argumente Variable von der Form (2) haben und selber von der Gestalt

$$w = f(z) = \sum_{j=1}^{n} u_j (x_1, \ldots, x_n) e_j$$

sind. w heißt in einem Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ nach der Variabeln x_k partiell differenzierbar, wenn alle Ableitungen

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

in diesem Punkte existieren. Als partielle Ableitung der Funktion w nach der Variabeln x_k bezeichnen wir dann den Ausdruck:

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_j .$$

w heißt in einem Gebiete nach der Variabeln x_k differenzierbar, wenn die Differenzierbarkeit in jedem Punkt des Gebietes besteht.

Definition: *Die Funktion $w = f(z)$ heißt in einem Gebiete H regulär, wenn sie in H zweimal stetig nach beliebigen Variabeln $x_j (j = 1, \ldots, n)$ differenzierbar ist, und wenn in H die Beziehung gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = 0 \ . \tag{3}$$

Zerlegt man die Bedingung (3) in ihre Komponenten, so erhält man die Regularitätsbedingung in der folgenden reellen Gestalt:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \ ; \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0 \quad (j, k = 1, \ldots, n) \ . \qquad (4\,\mathrm{a}) \ (4\,\mathrm{b})$$

Auf dieselbe reelle Bedingung führt die hyperkomplexe Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0 \ . \tag{5}$$

Diese und (3) sind also äquivalent, ohne übereinzustimmen.

Zwischen den regulären Funktionen und den Potentialfunktionen besteht ein naher Zusammenhang, der durch die folgenden vier Sätze klargelegt wird.

Satz 2. *Die Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ sei in einem Gebiete H harmonisch. Dann ist die Funktion*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} e_k$$

in H regulär.

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß (3) erfüllt ist. In

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_j} e_k e_j$$

heben sich wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_j}$$

und

$$e_j e_k = - e_k e_j \quad \text{für} \quad j \neq k$$

alle Terme mit $j \neq k$ weg. Es bleibt also

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j} e_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} e_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \ .$$

Da aber u harmonisch ist, ist dies tatsächlich gleich 0.

Satz 3. *Die Funktion*

$$w = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j$$

sei in einem Gebiete H regulär. Dann existiert eine in H harmonische Funktion U, deren erste Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = u_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

sind.

Beweis: Auf Grund der Regularitätsbedingungen (4b):

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, n)$$

existiert in H eine Funktion $U(x_1, \ldots, x_n)$, deren Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = u_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

sind. Die linke Seite der Potentialgleichung, für diese Funktion U angeschrieben, d. h. der Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2},$$

ist dann gleich

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber gleich 0 nach der Regularitätsbedingung (4a). Also ist U in H harmonisch.

Satz 4. *Die Funktion*

$$w = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j$$

sei in einem Gebiete H regulär. Dann sind alle Funktionen $u_j(x_1, \ldots, x_n)$ in H harmonisch ($j = 1, \ldots, n$).

Beweis: Es sei

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_k} e_k = 0 .$$

Dies differenzieren wir nach x_j, multiplizieren rechtsseitig mit e_j und summieren über j:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \, \partial x_j} e_k \, e_j = 0 \ ,$$

d. h.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = 0 \ .$$

Da zwischen den e_j keine Beziehung besteht, ist infolgedessen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \ .$$

Satz 5. *H sei ein zylinderförmiges Gebiet, dessen Seitenlinien der x_1-Achse parallel und dessen Grund- und Deckhyperebenen zu derselben senkrecht sind. Die reelle Funktion $u_1(x_1, \ldots, x_n)$ sei in H harmonisch. Dann existieren in H $(n-1)$ weitere Funktionen, $u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n)$ von solcher Art, daß*

$$w = \sum_{j=1}^{n} u_j \, e_j$$

in H regulär ist.

Beweis: $\psi(x_2, \ldots, x_n)$ sei ein beliebiges Integral der Differentialgleichung in $(n-1)$ Variabeln:

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = - \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{x_1 = a} ,$$

wo $x_1 = a$ eine das Gebiet H schneidende Hyperebene ist. Wir setzen

$$u_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \int_a^{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \, dx_1 \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

und behaupten, daß

$$w = \sum_{j=1}^{n} u_j \, e_j$$

regulär ist. Um nämlich (4a) zu bestätigen, beachten wir, daß

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} + \int_a^{x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2} \, dx_1 \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

ist. Also ist

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \ .$$

Um (4b) zu beweisen, berechnen wir für $j, k = 2, \ldots, n$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \, \partial x_j} + \int_a^{x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k \, \partial x_j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad .$$

Ferner wird

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \qquad (k = 2, \ldots, n) \quad .$$

Also sind die Regularitätsbedingungen (4a) und (4b) erfüllt.

Satz 6. *Satz 5 gilt auch für jedes einfach zusammenhängende Gebiet H, das sich in abzählbar viele zylinderförmige Gebiete von der in Satz 4 beschriebenen Art zerlegen läßt.*

Beweis: Wir gehen von einem der zylinderförmigen Gebiete H_1 aus und konstruieren in demselben nach dem Beweis zu **Satz 4** die Funktionen $u_2, \ldots, u_n$. H_2 sei ein zweites der zylinderförmigen Gebiete, das mit H_1 einen Teil der Hyperebene $x_1 = b$ gemeinsam habe. Die in der Hyperebene $x_1 = b$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Funktion $\psi^*(x_2, \ldots, x_n)$, die den Gleichungen

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x_j} = u_j \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

genügt, erfüllt dann auch die Differentialgleichung

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_j^2} = \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad .$$

Also können wir die Funktionen $u_1, \ldots, u_n$ in H_2 wie folgt definieren:

$$u_j = \frac{\partial \psi^*}{\partial x_j} + \int_b^{x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \, dx_1 \qquad (j = 2, \ldots, n) \quad .$$

Diese Funktionen hängen mit den entsprechenden in H_1 definierten stetig zusammen, da ψ^* bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, und ihre Ableitungen haben für $x_1 = b$ dieselben Werte. Auf dieselbe Art können die Funktionen $u_2, \ldots, u_n$ auf das ganze Gebiet H ausgedehnt werden.

Satz 7. *Die Funktionen w und v sollen in einem Gebiet H und auf seinem Rand R regulär sein. R sei eine geschlossene orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld. Dann ist*

$$\int_R w\, dZ\, v = 0 \ ,$$

wenn wir mit dZ die Größe

$$dZ = dr \sum_{j=1}^{n} \xi_j\, e_j$$

bezeichnen, wo dr das $(n-1)$-dimensionale Hyperflächenelement auf R bedeutet und wo die $\xi_j\,(j = 1, \ldots, n)$ die Komponenten der (äußeren oder inneren) Normalen auf R sind.

Beweis: Nach dem Satz von *Gauß* ist:

$$\int_R w\, dZ\, v = \sum_{j=1}^{n} \int_R w\, \xi_j\, e_j\, v\, dr =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_H \frac{\partial}{\partial x_j} (w\, e_j\, v)\, dh = \sum_{j=1}^{n} \int_H \left[\frac{\partial w}{\partial x_j}\, e_j\, v + w\, e_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dh = 0$$

nach der Regularitätsbedingung (3) und der dazu äquivalenten (5).

Die Funktion

$$Q(\zeta - z) = \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} e_j (\zeta_j - x_j)}{\left| \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - x_j)^2 \right|^{n/2}}$$

ist, als Funktion von ζ, für jeden Wert von z regulär für alle Werte von ζ, mit Ausnahme von $\zeta = z$. Man bestätigt das leicht durch Einsetzen in die Regularitätsbedingungen 4a), b). Nun sei R eine geschlossene orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld. Eine Funktion $f(z)$ sei im Innern von R und auf R regulär. z sei ein Punkt im Innern von R und K_ϱ bedeute die Hyperkugel mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt z. ϱ sei so klein, daß K_ϱ ganz im Innern von R liegt. dZ bedeute sowohl auf R wie auf K_ϱ die Größe

$$dZ = dr \sum_{j=1}^{n} e_j\, \xi_j \ ,$$

wo dr das Hyperflächenelement auf R bzw. K_ϱ bedeutet und wo die $\xi_j\,(j = 1, \ldots, n)$ die Komponenten der äußeren Normalen bedeuten. Nach Satz 7 ist dann

$$\int\limits_{K_\varrho} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) - \int\limits_{R} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) = 0$$

für jeden Wert von ϱ, also auch

$$\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{K_\varrho} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) - \int\limits_{R} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) = 0 \ . \tag{6}$$

Wir berechnen zuerst:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{K_\varrho} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) = \\ &= \lim_{\varrho \to 0} f(z) \int\limits_{K_\varrho} dZ\, Q(\zeta - z) + \lim_{\varrho \to 0} \int\limits_{K_\varrho} [f(\zeta) - f(z)]\, dZ\, Q(\zeta - z) = \\ &= \lim_{\varrho \to 0} J_1 + \lim_{\varrho \to 0} J_2 \ . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nun gilt auf K_ϱ:

$$|Q(\zeta - z)| = \frac{1}{\varrho^{n-1}} \ .$$

Wenn ferner F das Maximum der Beträge aller ersten Ableitungen der Funktion $f(z)$ auf und innerhalb R bedeutet, so ist, wenn ζ auf K_ϱ liegt:

$$|f(\zeta) - f(z)| < n \varrho F \ .$$

Daraus folgt auf Grund von (1):

$$|J_2| < \mu^4 \cdot K_n \cdot \varrho^{n-1} \cdot n \varrho F \cdot \frac{1}{\varrho^{n-1}} = \mu^4 \cdot K_n \cdot n F \varrho \ ,$$

wo K_n die Oberfläche der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum bedeutet, also

$$\lim_{\varrho \to 0} J_2 = 0 \ . \tag{8}$$

Aus (6), (7), (8) folgt:

$$\lim_{\varrho \to 0} f(z) \int\limits_{K_\varrho} dZ\, Q(\zeta - z) = \int\limits_{R} f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) \ . \tag{9}$$

Hier berechnen wir zuerst das auf der linken Seite stehende Integral. Es ist auf K_ϱ:

$$dZ = \frac{\zeta - z}{\varrho}\, dr$$

und

$$Q(\zeta - z) = \frac{\zeta - z}{\varrho^n},$$

also

$$\int_{K_\varrho} dZ\, Q(\zeta - z) = \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_{K_\varrho} \sum_{j=1}^{n} (\zeta - z)_j^2\, dr = \frac{1}{\varrho^{n-1}} \int_{K_\varrho} dr = K_n\,,$$

wo K_n wiederum die Oberfläche der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum bedeutet. Somit wird nach (9):

$$f(z) = \frac{1}{K_n} \int_R f(\zeta)\, dZ\, Q(\zeta - z) = \frac{1}{K_n} \int_R f(\zeta)\, dZ \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^n}\,.$$

Dies ist der

Satz 8. *Die Funktion $f(z)$ sei im Innern einer geschlossenen orientierbaren Hyperfläche R und auf derselben regulär. R möge in jedem ihrer Punkte eine Normale besitzen. Dann gilt für jeden Punkt z im Innern von R:*

$$f(z) = \frac{1}{K_n} \int_R f(\zeta)\, dZ \frac{(\zeta - z)}{|\zeta - z|^n}\,.$$

Dabei bedeutet dZ die Größe

$$dZ = dr \sum_{j=1}^{n} e_j\, \xi_j\,,$$

wo dr das Flächenelement auf R ist, und wo wir mit $\xi_j\,(j = 1, \ldots, n)$ die Komponenten der äußeren Normalen auf R bezeichnet haben. K_n ist die Oberfläche der Einheitskugel im n-dimensionalen Raum.

Mit Hilfe von **Satz** 8 erhält man die Darstellung einer Potentialfunktion durch das *Poissonsche* Integral. Ich gebe den Beweis hier an, trotzdem das Resultat natürlich nichts Neues bietet.

Satz 9. *Ist die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ auf der Kugel*

$$K:\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$$

und in ihrem Innern harmonisch, so gilt für jeden im Innern der Kugel gelegenen Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{r^2 - \varrho^2}{r \cdot K_n} \int\limits_K \frac{\varphi \, dr}{(\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos \vartheta)^{n/2}} \; .$$

Dabei ist $\varrho = \overset{+}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$ *und* ϑ *bedeutet den Winkel zwischen den zum Punkt* $(x_1, \ldots, x_n)$ *und zum Integrationspunkt führenden Kugelradien.*

Beweis: (Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung eines Beweises von Herrn Fueter[6].)

Nach **Satz 6** genügt es, für eine auf und innerhalb der Kugel reguläre Funktion $f(z)$ zu zeigen:

$$f(z) = \frac{r^2 - |z|^2}{r \cdot K_n} \int\limits_K \frac{f(\zeta)}{|\zeta - z|^n} \, dr \; . \tag{10}$$

Nach **Satz 8** ist

$$f(z) = \frac{1}{K_n} \int\limits_K \frac{f(\zeta) \, dZ(\zeta - z)}{|\zeta - z|^n} =$$

$$= \frac{1}{K_n} \int\limits_K f(\zeta) \frac{\zeta}{r} \, dr \, \frac{(\zeta - z)}{|\zeta - z|^n} =$$

$$= \frac{1}{r \cdot K_n} \int\limits_K f(\zeta) \frac{r^2 - \zeta z}{|\zeta - z|^n} \, dr =$$

$$= \frac{1}{r \cdot K_n} \int\limits_K f(\zeta) \frac{r^2 - z^2}{|\zeta - z|^n} \, dr + J =$$

$$= \frac{1}{r \cdot K_n} \int\limits_K f(\zeta) \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^n} \, dr + J \; ,$$

wo J die Bedeutung hat:

$$J = \frac{1}{r \cdot K_n} \int\limits_K f(\zeta) \frac{z^2 - \zeta z}{|\zeta - z|^n} \, dr \; .$$

Wenn wir zeigen können, daß $J = 0$ ist, haben wir (10) und damit **Satz 8** bewiesen. Nun ist:

---

[6]) *Rud. Fueter,* Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, Monatshefte f. Math. u. Phys. Bd. 43, S. 69.

$$J = \frac{1}{r \cdot K_n} \int_K f(\zeta) \frac{z - \zeta}{|\zeta - z|^n} \, dr \cdot z =$$

$$= - \frac{1}{r \cdot K_n} \int_K f(\zeta) \frac{(\zeta - z)}{|\zeta - z|^{n-2} (\zeta - z)^2} \, dr \cdot z =$$

$$= - \frac{1}{r \cdot K_n} \int_K f(\zeta) \, |\zeta - z|^{-(n-2)} \cdot (\zeta - z)^{-1} \, dr \cdot z \; .$$

Es ist aber:

$$- (\zeta - z) = - (r^2 \zeta^{-1} - |z|^2 z^{-1}) =$$

$$= - |z|^2 z^{-1} \left(\frac{r^2}{|z|^2} z - \zeta \right) \zeta^{-1} =$$

$$= \quad |z|^2 z^{-1} \left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right) \zeta^{-1} \; .$$

Somit ist:

$$- (\zeta - z)^{-1} = \zeta \left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)^{-1} \cdot z \cdot |z|^{-2} =$$

$$= |z|^{-2} \zeta \left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)^{-1} \cdot z \; .$$

Ferner ist:

$$|\zeta - z|^{-2} = [- (\zeta - z)^{-1}]^2 =$$

$$= |z|^{-4} r^2 \left[\left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)^{-1} \right]^2 \cdot |z|^2 =$$

$$= |z|^{-2} r^2 \left| \zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right|^{-2}$$

und

$$|\zeta - z|^{-(n-2)} = |z|^{-(n-2)} r^{(n-2)} \left| \zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right|^{-(n-2)}$$

und folglich

$$- |\zeta - z|^{-(n-2)} (\zeta - z)^{-1} \, dr =$$

$$= |z|^{-(n-2)} r^{(n-2)} \left| \zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right|^{-(n-2)} \cdot |z|^{-2} \cdot \zeta \left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)^{-1} \cdot z \, dr =$$

$$= |z|^{-n} r^{n-1} \frac{\zeta}{r} \, dr \left| \zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right|^{-(n-2)} \left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)^{-1} z =$$

$$= |z|^{-n} r^{n-1} \, dZ \frac{\left(\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right)}{\left| \zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z \right|^n} \cdot z \; .$$

Nun ist die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z}{\left|\zeta - \frac{r^2}{|z|^2} z\right|^n} \cdot z^2$$

als Funktion von ζ überall dort regulär, wo $\zeta \neq \frac{r^2}{|z|^2} z$ ist, was auf der Kugel K und in ihrem Innern stets der Fall ist; denn die Funktion

$$w(\zeta) = \frac{\zeta}{|\zeta|^n}$$

ist überall regulär, außer für $\zeta = 0$. Man sieht aber leicht, daß mit einer Funktion $w(\zeta)$ auch alle Funktionen $w(\zeta - \alpha) \cdot \beta$ regulär sind, wo α und β beliebige hyperkomplexe Konstanten sind.

Nach **Satz 7** folgt also $J = 0$, womit **Satz 9** bewiesen ist.

4.

Wir gehen jetzt zum Beweis von **Hauptsatz 1** über. Unter den dort über die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

gemachten Voraussetzungen ist die Funktion

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e_j$$

im Innern der Einheitskugel beschränkt. Nach **Satz 2** ist sie daselbst regulär. **Hauptsatz 1** ist somit bewiesen, wenn wir den folgenden Satz bewiesen haben:

Satz 10. *Wenn eine im Innern der Einheitskugel*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

reguläre Funktion

$$w = f(z)$$

daselbst beschränkt ist, so existiert bei radialer Annäherung von innen an irgend einen Punkt der Kugel der Grenzwert der Funktion $f(z)$, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom $(n-1)$-dimensionalen Maß 0 von Punkten auf der Kugel.

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir zuerst einige Vorbereitungen.

$\mathfrak{G}$ sei ein meßbares Gebiet auf der Einheitskugel, dessen Berandung auf der Einheitskugel ein stetiges Normalenfeld besitzt. Mit $\mathfrak{G}(r)$ $(0 < r \leqslant 1)$ bezeichne ich das Gebiet, das aus $\mathfrak{G}$ durch Projektion vom Kugelmittelpunkt aus auf die konzentrische Kugel vom Radius r entsteht. r_1 und r_2 seien zwei Zahlen mit $0 < r_2 < r_1 < 1$. Mit $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ bezeichne ich die Menge aller Punkte derjenigen Radienstücke, die einen Randpunkt von $\mathfrak{G}(r_1)$ mit dem entsprechenden Punkt des Randes von $\mathfrak{G}(r_2)$ verbinden. Die Menge

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}(r_1) + \mathfrak{S}(r_1, r_2) + \mathfrak{G}(r_2)$$

ist dann eine geschlossene Hyperfläche. Wenden wir auf die Funktion $f(z)$ und auf die ebenfalls reguläre Funktion $g(z) \equiv 1$ den **Satz 7** an, so erhalten wir:

$$\int\limits_{\mathfrak{G}(r_1)} f(\zeta)\, dZ - \int\limits_{\mathfrak{G}(r_2)} f(\zeta)\, dZ = \int\limits_{\mathfrak{S}(r_1, r_2)} f(\zeta)\, dZ \;, \tag{11}$$

wenn dZ auf $\mathfrak{G}(r_1)$ und auf $\mathfrak{G}(r_2)$ die Größe $\frac{\zeta}{r_1}\, dr$ bzw. $\frac{\zeta}{r_2}\, dr$, und auf $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ die Größe bezeichnet, die dem Betrage nach gleich dem Flächenelement auf $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ ist, und deren Komponenten einen Vektor bilden, der der inneren Normalen auf $\mathfrak{Q}$ parallel und gleichgerichtet ist. Nach der Voraussetzung zu **Satz 10** existiert eine positive Zahl M, so daß innerhalb der Einheitskugel gilt:

$$|\, f(\zeta)\, | < M \;.$$

Wegen (1) ist dann

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{S}(r_1, r_2)} f(\zeta)\, dZ \right| < M\, L(r_1 - r_2)\, \mu^2 \;,$$

wo L die Oberfläche des Randes von $\mathfrak{G}$ auf der Einheitskugel bedeutet. Also ist nach (11):

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{G}(r_1)} f(\zeta)\, dZ - \int\limits_{\mathfrak{G}(r_2)} f(\zeta)\, dZ \right| < M\, L(r_1 - r_2)\, \mu^2 \;.$$

Daraus folgt aber, daß

$$F(\mathfrak{G}) = \lim_{r \to 1} \int\limits_{\mathfrak{G}(r)} f(\zeta)\, dZ \tag{12}$$

existiert. Bedeutet $m(\mathfrak{G})$ das $(n-1)$-dimensionale Maß von $\mathfrak{G}$, so ist, wieder nach (1):

$$|F(\mathfrak{G})| \leqslant M \cdot m(\mathfrak{G}) \cdot \mu^2 . \tag{14}$$

Diese Funktion, die für alle meßbaren Gebiete auf der Einheitskugel definiert ist, ist offenbar in diesem Definitionsbereich additiv[7]). Wir wollen jetzt ihren Definitionsbereich auf die Gesamtheit aller meßbaren Mengen auf der Einheitskugel ausdehnen. $\mathfrak{M}$ sei eine solche. $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ sei eine Folge von meßbaren Gebieten auf der Einheitskugel mit den Eigenschaften:

1. $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$
2. $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$
3. $\lim\limits_{i \to \infty} m(\mathfrak{G}_i) = m(\mathfrak{M})$.

Wegen der Additivität im Bereich aller meßbaren Gebiete und (14) konvergiert dann die Folge

$$F(\mathfrak{G}_1), F(\mathfrak{G}_2), \ldots$$

und wir definieren:

$$\lim_{i \to \infty} F(\mathfrak{G}_i) = F(\mathfrak{M}) .$$

Man sieht leicht, daß diese Definition nicht von der besonderen Wahl der Folge $\{\mathfrak{G}_i\}$ abhängig ist. Denn, sei $\{\mathfrak{G}'_i\}$ eine zweite Folge von derselben Art wie $\{\mathfrak{G}_i\}$. ε sei eine beliebige positive Zahl. — Wählen wir i_0 so groß, daß

$$m(\mathfrak{M}) - m(\mathfrak{G}_i) < \varepsilon \quad \text{ist für} \quad i \geqslant i_0 ,$$

und für jedes i die Größe $j_0(i)$ so groß, daß

$$m(\mathfrak{G}_i) \leqslant m(\mathfrak{G}'_j) \quad \text{wird für} \quad j \geqslant j_0(i) ,$$

so wird

$$m(\mathfrak{G}'_i) - m(\mathfrak{G}_i) \leqslant m(\mathfrak{M}) - m(\mathfrak{G}_i) < \varepsilon \qquad \big(i \geqslant i_0 ,\ j \geqslant j_0(i)\big) ,$$

also

$$F(\mathfrak{G}'_j) - F(\mathfrak{G}_i) \leqslant M\, \varepsilon\, \mu^2 \quad \big(i \geqslant i_0 ,\ j \geqslant j_0(i)\big) ,$$

d. h. es ist

$$\lim_{i \to \infty} F(\mathfrak{G}_i) = \lim_{j \to \infty} F(\mathfrak{G}'_j) = F(\mathfrak{M}) .$$

Es ist natürlich

$$|F(\mathfrak{M})| \leqslant M\, m(\mathfrak{M})\, \mu^2$$

---

[7]) *C. Caratheodory*, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1927, pag. 470, § 425.

für jede meßbare Menge $\mathfrak{M}$ auf der Einheitskugel, d. h. die Mengenfunktion F ist im Bereich aller meßbaren Mengen auf der Einheitskugel totalstetig[8]). Ferner ist F additiv. Somit ist $F(\mathfrak{M})$ auf der ganzen Einheitskugel mit eventueller Ausnahme einer Menge vom $(n-1)$-dimensionalen Maß 0 von Punkten derselben differenzierbar und besitzt dort eine endliche Derivierte[9]). Wenn wir zeigen können, daß bei radialer Annäherung von innen an einen Punkt z_0 der Einheitskugel, in dem diese Derivierte $D(z_0)$ existiert,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = D(z_0)\, z_0^{-1}$$

ist, so ist **Satz 10** bewiesen. Wir beweisen deshalb:

Hilfssatz 11: *Existiert in einem Punkte z_0 auf der Einheitskugel die Derivierte*

$$D(z_0) = \lim_{m(\mathfrak{M}) \to 0} \frac{F(\mathfrak{M})}{m(\mathfrak{M})}\ ;$$

ist ferner ε eine beliebige positive Zahl, so existiert eine positive Zahl δ von der Art, daß für jede auf dem Radius Oz_0 gelegene Zahl z, deren Abstand von z_0 kleiner als δ ist, die Beziehung gilt:

$$|\, f(z) - D(z_0)\, z_0^{-1} \,| < \varepsilon\ .$$

Beweis: z_0 sei ein Punkt der Einheitskugel, in welchem die Derivierte $D(z_0)$ existiert. Bedeuten dann $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten irgend eines Punktes in irgendeinem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Kugelmittelpunkt liegt und dessen ξ_1-Achse durch den Punkt z_0 geht, so führen wir durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= r \cos t_1 \cos t_2 \ldots \cos t_{n-2} \cos t_{n-1} \\
\xi_2 &= r \cos t_1 \cos t_2 \ldots \cos t_{n-2} \sin t_{n-1} \\
\xi_3 &= r \cos t_1 \cos t_2 \ldots \sin t_{n-2} \\
&\ \vdots \\
\xi_n &= r \sin t_1
\end{aligned}$$

$$\left(0 \leqslant r\ ,\ 0 \leqslant t_{n-1} < 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t_j \leqslant \frac{\pi}{2}\ (\mathrm{j} = 1, \ldots, n-2)\right)$$

---

[8]) *C. Caratheodory*, a. a. O. pag. 475, § 429.

[9]) *C. Caratheodory*, a. a. O. pag. 496, § 445, Satz 1.

die Polarkoordinaten $r, t_1, \ldots, t_{n-1}$ ein. Das Hyperflächenelement auf der Kugel $K(r)$ vom Radius r mit 0 als Mittelpunkt ist dann

$$dr = r^{n-1} \cos^{n-2} t_1 \cos^{n-3} t_2 \ldots \cos t_{n-2}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1} \,. \tag{15}$$

z sei irgendein Punkt im Innern der Einheitskugel, der auf demselben Radius liegt wie der Punkt z_0. Nach (10) und (15) ist dann:

$$f(z) = \frac{r^{n-2}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(r)} f(\zeta) \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^n} \cos^{n-2} t_1 \ldots \cos t_{n-2}\, dt_1 \ldots dt_{n-1} \,,$$

wenn wir dieses Integral über die Kugel $K(r)$ erstrecken $(|z| < r < 1)$. Durch die Relationen

$$\tau_j = \int_0^{t_j} (\cos t_j)^{n-j-1}\, dt_j \qquad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{16}$$

führen wir die neuen Variabeln τ_j ein. Das Flächenelement auf der Kugel $K(r)$ wird dann

$$dr = r^{n-1}\, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \,,$$

und wir erhalten:

$$f(z) = \frac{r^{n-2}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(r)} f(\zeta) \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^n}\, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} =$$

$$= \frac{r^{n-2}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(r)} \left\{ f(\zeta \cdot \zeta) \right\} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(r^2 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \,.$$

Durch sukzessive partielle Integration nach den Variabeln $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ erhält man hieraus:

$$f(z) = (-1)^{n-1} \frac{r^{n-2}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(r)} \{ f(\zeta) \cdot \zeta \}^{(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})} \,.$$

$$\cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(r^2 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} + R \,. \tag{17}$$

Darin hat $\{f(\zeta)\cdot\zeta\}^{(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})}$ die Bedeutung

$$\{f(\zeta)\cdot\zeta\}^{(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})} = \int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{n-1}} f(\zeta)\cdot\zeta\cdot d\tau_1\ldots d\tau_{n-1} = \Phi_r(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}),$$

und R bedeutet eine Summe von Termen, die von den Integrationsgrenzen herrühren. Die Funktion $\Phi_r(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})$ hat die Eigenschaft, daß

$$\lim_{r\to 1}\Phi_r(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})$$

existiert. Bezeichnen wir nämlich mit $t_1^*, t_2^*,\ldots,t_{n-1}^*$ die Werte der Variabeln $t_1,\ldots,t_{n-1}$, die gemäß (16) den als Argumente der Funktion Φ_r auftretenden Werten von $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$ entsprechen, und bedeutet $\mathfrak{K}$ das auf der Einheitskugel gelegene Gebiet, für dessen Punkte gilt:

$$0 \leqslant t_j < t_j^* \qquad (j = 1,\ldots,n-1),$$

so hat die durch (12) definierten Mengenfunktion F für die Menge $\mathfrak{K}$ den Wert

$$F(\mathfrak{K}) = \lim_{r\to 1}\int_{K(r)} f(\zeta)\,dZ = \lim_{r\to 1}\int_{K(r)} f(\zeta)\,\frac{\zeta}{r}\,dr =$$

$$= \lim_{r\to 1}\int_{K(r)} f(\zeta)\,\zeta\,dr = \lim_{r\to 1}\int_{K(r)} f(\zeta)\,\zeta\,d\tau_1\ldots d\tau_{n-1} =$$

$$= \lim_{r\to 1}\Phi_r(t_1^*,\ldots,t_{n-1}^*) = F(t_1^*,\ldots,t_{n-1}^*),$$

indem wir die letztere Funktion $F(t_1^*,\ldots,t_{n-1}^*)$ durch diese Gleichung definieren. Also existiert der $\lim r\to 1$ des in (17) auftretenden über $K(r)$ erstreckten Integrals, und somit auch derjenige von R. Wir setzen $\lim\limits_{r\to 1} R = S$ und erhalten:

$$f(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{K(1)} F(t_1,\ldots,t_{n-1})\cdot \tag{18}$$

$$\cdot\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau_1\ldots\partial\tau_{n-1}}\left\{\frac{\zeta^{-1}(1-|z|^2)}{|\zeta-z|^n}\right\}d\tau_1\ldots d\tau_{n-1} + S\,.$$

Wenden wir diese Formel auf die reguläre Funktion $f(z) \equiv 1$ an, so finden wir:

$$1 = \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(1)} J(t_1, \ldots, t_{n-1}) \tag{19}$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} + S' ,$$

wo die Funktion J wie folgt definiert ist:

$$J(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*) = \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \zeta \, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} , \tag{20}$$

wo $|\zeta| = 1$, die Integration also über einen Bereich auf der Einheitskugel zu erstrecken ist.

Aus (18), (19) folgt:

$$f(z) - D(z_0) \cdot z_0^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(1)} \{F - D(z_0) \cdot z_0^{-1} \cdot J\} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} + S - D(z_0) \cdot z_0^{-1} \cdot S' =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(1)} \{F J^{-1} - D(z_0) \, z_0^{-1}\} \, J \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} + S - D(z_0) \cdot z_0^{-1} \cdot S' .$$

Von hier aus gelangen wir in den folgenden vier Schritten zum Ziel:

1. Es ist $\lim\limits_{z \to z_0} S = \lim\limits_{z \to z_0} S' = 0$.

Dabei beziehen sich die $\lim z \to z_0$ auf radiale Annäherung des Punktes z an den Punkt z_0. S und S' sind nämlich Summen von Termen, die teils Integrale, teils integrallose Ausdrücke sind. Die letzteren enthalten die Größe

$$\frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n}$$

oder eine ihrer Ableitungen als Faktor, bei den ersteren tritt eine solche Größe als Faktor des Integranden auf. Da S und S' von den Integrationsgrenzen

$$\begin{array}{llllll} & 0 & \text{und} & 2\pi & \text{für} & \tau_{n-1} \\ \text{bzw.} & -\pi/2 & \text{und} & \pi/2 & \text{für} & \tau_j \quad (j = 1, \ldots, n-2)\,, \end{array}$$

herrühren, sind die in S und S' auftretenden Nenner $|\zeta - z|^n$ nach unten beschränkt; weil ferner

$$\lim_{z \to z_0} |z| = 1$$

ist, folgt daraus die Behauptung.

Nun sei η irgendeine positive Zahl. Nach dem vorhergehenden gibt es eine Zahl $\delta_1 > 0$ derart, daß für $|z - z_0| < \delta_1$

$$|S - D(z_0) \cdot z_0^{-1} \cdot S'| < \eta \tag{21}$$

ist.

2. Wegen

$$J(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*) = \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \zeta \, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \quad \text{(vgl. (20))}$$

ist

$$\lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^* \to 0} F(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*) \, (J(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*))^{-1} =$$

$$= \lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^* \to 0} F(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*) \left\{ \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \zeta \, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \right\}^{-1} =$$

$$= \lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^* \to 0} \frac{F \cdot z_0^{-1}}{\tau_1 \ldots \tau_{n-1}}\,,$$

weil der den Werten $t_1^* = t_2^* = \cdots = t_{n-1}^* = 0$ entsprechende Wert von ζ gleich z_0^{-1} ist.

Ferner ist:

$$\lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^*} \frac{F z_0^{-1}}{\tau_1 \ldots \tau_{n-1}} = \lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^* \to 0} \frac{F z_0^{-1}}{\int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}} =$$

$$= \lim_{t_1^* \to 0} \ldots \lim_{t_{n-1}^* \to 0} \frac{F(\mathfrak{K})\, z_0^{-1}}{m(\mathfrak{K})} = D(z_0)\, z_0^{-1} \quad \text{(vgl. (16))}\,.$$

Also existiert eine Zahl $\alpha > 0$, so daß für

$$-\alpha < t_j < \alpha \qquad (j = 1, \ldots, n-1): \tag{22}$$

$$|F(t_1, \ldots, t_{n-1})\,(J(t_1, \ldots, t_{n-1}))^{-1} - D(z_0)\,z_0^{-1}| < \eta$$

ist. Wir nennen das Gebiet auf der Einheitskugel, für welches

$$-\alpha < t_j < \alpha \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

ist, $\mathfrak{A}$. Mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir den Bereich $K(1) - \mathfrak{A}$, also die Gesamtheit der Punkte auf $K(1)$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören. Dann ist:

$$\frac{1}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{K(1)}\{FJ^{-1} - D(z_0)\,z_0^{-1}\}\,J\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau_1\ldots\partial\tau_{n-1}}\left\{\frac{\zeta^{-1}(1-|z|^2)}{|\zeta - z|^n}\right\}d\tau_1\ldots d\tau_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{\mathfrak{A}} + \frac{1}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{\mathfrak{B}}\,. \tag{23}$$

3. Es ist

$$\left|\frac{1}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{\mathfrak{A}}\right| <$$

$$< \frac{\mu^4}{K_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{\mathfrak{A}}|FJ^{-1} - D(z_0)\,z_0^{-1}|\;|J|\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau_1\ldots\partial\tau_{n-1}}\left\{\frac{\zeta^{-1}(1-|z|^2)}{|\zeta - z|^n}\right\}\right|d\tau_1\ldots d\tau_{n-1}$$

$$\text{(vgl. (1))}\,. \tag{24}$$

Wegen

$$(\zeta^{-1})_1 = \cos t_1\,\cos t_2 \ldots \cos t_{n-1}$$

und

$$(\zeta^{-1})_j = \cos t_1 \ldots \cos t_{n-j}\,\sin t_{n-j+1} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

ist

$$\frac{\zeta^{-1}}{|\zeta - z|^n} = \sum_{j=1}^{n} e_j\,\psi_j(\zeta, z)$$

wo die Funktionen $\psi_j(\zeta, z)$ spezielle Funktionen der allgemeineren Form

$$\Phi(\zeta, z) = C\,\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\sin t_k)^{\nu_k}(\cos t_k)^{\mu_k}}{|\zeta - z|^{\lambda}} \qquad (\nu_k \geqq 0\,,\ \mu_k \geqq 0\,(k = 1, \ldots, n-1)) \tag{25}$$

sind. Unter dem Index einer Funktion von der Gestalt (25) verstehen wir die ganze Zahl

$$i = \nu - \lambda \ ,$$

wo

$$\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k$$

ist. Zum Beispiel ist der Index der Funktion $\psi_1(\zeta, z)$ gleich $-n$, derjenige der Funktionen $\psi_j(\zeta, z)$ $(j = 2, \ldots, n)$ gleich $1 - n$.

Es gilt: Die Ableitung $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t_l}$ einer Funktion $\Phi(\zeta, z)$ von der Gestalt (25) nach einer Variabeln t_l $(l = 1, \ldots, n-1)$ ist gleich einer Summe von Funktionen derselben Art. Ist i der Index von $\Phi(\zeta, z)$, so haben alle Summanden der Funktion $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t_l}$ Indizes, die $\geqslant i - 1$ sind. Man findet nämlich, wenn man berücksichtigt, daß

$$|\zeta - z| = |1 + |z|^2 - 2|z| \cos t_1 \ldots \cos t_{n-1}|^{1/2}$$

ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_l} = C \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\sin t_k)^{\nu_k} (\cos t_k)^{\mu}}{|\zeta - z|^{\lambda+2}}$$

$$\left\{ \frac{\nu_l (\sin t_l)^{\nu_l - 1} (\cos t_l)^{\mu_l + 1} - \mu_l (\sin t_l)^{\nu_l + 1} (\cos t_l)^{\mu_l - 1}}{(\sin t_l)^{\nu_l} (\cos t_l)^{\mu_l}} |\zeta - z|^2 + \right.$$

$$\left. + \lambda |z| \frac{\sin t_l}{\cos t_l} \prod_{j=1}^{n-1} \cos t_j \right\} .$$

Daraus kann man die Behauptung ablesen.

Es ist deshalb:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots d\tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}}{|\zeta - z|^n} \right\} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}}{|\zeta - z|^n} \right\} \cdot \frac{dt_1}{d\tau_1} \cdots \frac{dt_{n-1}}{d\tau_{n-1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \Phi_j(\zeta, z) \frac{1}{(\cos t_1)^{n-2} \ldots \cos t_{n-1}} , \tag{26}$$

wo die $\Phi_j(\zeta, z)$ Funktionen der Gestalt (25) sind, deren Indizes $\geqslant -(2n-1)$ sind und wo N eine natürliche Zahl bedeutet.

An die Zahl α (vgl. (22)) stellen wir nun nachträglich noch die Forderung, daß für

$$-\alpha < t_j < \alpha \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

$$\left| \frac{1}{(\cos t_1)^{n-2} \ldots \cos t_{n-1}} \right| < 2 \tag{27}$$

sein soll.

Aus (16), (20) folgt:

$$|J(t_1^*, \ldots, t_{n-1}^*)| = \left| \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \zeta \, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \right| <$$

$$< \left| \int_0^{t_1^*} \cdots \int_0^{t_{n-1}^*} \zeta \, dt_1 \ldots dt_{n-1} \right| < n \, |t_1 \ldots t_{n-1}| \, . \tag{28}$$

Aus (24), (26), (27), (28) folgt somit:

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{A}} \right| <$$

$$< 2n \frac{\mu^4}{k_n} \eta \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{A}} |t_1 \ldots t_{n-1}| \, (1 - |z|^2) \, |\Phi_j(\zeta_1 z)| \, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \, . \tag{29}$$

Nun ist

$$|\zeta - z| = (1 + |z|^2 - 2\,|z| \cos t_1 \ldots \cos t_{n-1})^{1/2} > (1 + |z|^2 - 2|z| \cos t_k)^{1/2} >$$

$$> |\sin t_k| > \left| \frac{t_k}{2} \right| \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \, ,$$

wenn wir an α die weitere Forderung stellen, daß für $-\alpha < t_j < \alpha$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ die letzte Beziehung gilt. Daraus folgt auf Grund von (25) und (29), wenn wir noch berücksichtigen, daß für die Indizes i_j der Funktionen $\Phi_j(\zeta, z)$

$$i_j \geqslant -(2n-1) \quad (j = 1, \ldots, N) \quad \text{ist:}$$

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{A}} \right| < 2^n \cdot n \frac{\mu^4}{K_n} \eta \sum_{j=1}^{N} C_j \int_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^{\nu_j}} \, dr \, , \tag{30}$$

wo

$$0 \leqslant \nu_j \leqslant n \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

ist. Nach **Satz 9**, angewendet auf die harmonische Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 1$, ist:

$$\frac{1}{K_n} \int\limits_{K(1)} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^n} dr = 1 \ .$$

Also ist

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^n} dr \text{, da } A \text{ ein Teilgebiet von } K(1) \text{ ist,}$$

für $z \to z_0$ beschränkt. Verlangen wir nun schließlich von der Zahl α noch, daß im Gebiete

$$-\alpha < t_j < \alpha \quad (j = 1, \ldots, n-1)$$

gilt:

$$|\zeta - z| < 1 \ ,$$

sobald

$$|z| > \tfrac{1}{2}$$

ist, so wird für $\nu < n$:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^\nu} dr < \int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^n} dr$$

und

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^\nu} dr$$

ist somit für $z \to z_0$ auch beschränkt. Also gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß für alle Werte von $|z|$ $(|z| < 1)$

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^{\nu_j}} dr < M$$

ist. Dann wird nach (30)

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{A}} \{FJ^{-1} - D(z_0) z_0^{-1}\} J \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots d\tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \right| < 2^n n \frac{\mu^4}{K_n} M \eta \ . \tag{31}$$

4. Wir betrachten nun

$$\frac{1}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{B}} \{FJ^{-1} - D(z_0) z_0^{-1}\} J \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau_1 \ldots \partial \tau_{n-1}} \left\{ \frac{\zeta^{-1}(1 - |z|^2)}{|\zeta - z|^n} \right\} d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}$$

(vgl. (23)).

Da der Bereich $\mathfrak{B}$ die Umgebung $\mathfrak{A}$ des Punktes $t_1 = \cdots = t_{n-1} = 0$ auf $K(1)$ nicht enthält, ist auf $\mathfrak{B}$

$$|\zeta - z| = |1 + |z|^2 - 2|z| \cos t_1 \ldots \cos t_{n-1}|^{1/2}$$

gleichmäßig in τ und $|z|$ nach unten beschränkt. Wegen des im Integranden auftretenden Faktors $(1 - |z|^2)$ ist somit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{B}} = 0$$

und es gibt eine Zahl $\delta_2 > 0$ von der Art, daß für $|z - z_0| < \delta_2$:

$$\left| \frac{1}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{\mathfrak{B}} \right| < \eta \tag{32}$$

ist.

Nun sei δ eine positive Zahl, die sowohl $< \delta_1$ (vgl. (21)) als auch $< \delta_2$ ist. Dann ist nach (21), (23), (31), (32) für $|z - z_0| < \delta$:

$$|f(z) - D(z_0) \cdot z_0^{-1}| = \left| \frac{1}{K_n} \underbrace{\int \cdots \int}_{K(1)} \right| < 2\eta + 2^n n \frac{\mu^4}{K_n} M \eta \ .$$

Sei ε die Zahl, von der in **Hilfssatz 11** die Rede ist, und setzen wir

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2 + 2^n n \dfrac{\mu^4}{K_n} M} \ ,$$

so wird für $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z) - D(z_0) \cdot z_0^{-1}| < \varepsilon \ ,$$

womit **Hilfssatz 11** bewiesen ist.

5.

Es gilt schließlich die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Fatou für die *regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln:*

Satz 12. *Wenn eine im Innern der Einheitshyperkugel*

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

rechtsreguläre Funktion

$$w = f(z)$$

der Quaternionenvariabeln

$$z = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$$

daselbst beschränkt ist, so existiert bei radialer Annäherung von innen an irgendeinen Punkt der Kugel der Grenzwert der Funktion $f(z)$, mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maß 0 von Punkten auf der Hyperkugel.

Man beweist diesen Satz genau wie **Satz 10,** nur hat man dabei unsere Algebra $\mathfrak{A}$ durch die Algebra der Quaternionen zu ersetzen.

(Eingegangen den 14. September 1943.)