Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Un théorème d'invariance projective relatif au mouvement brownien.
Autor: Lévy, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15559

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Un théorème d'invariance projective relatif au mouvement brownien

Par PAUL LÉVY, Lyon

1. La fonction $X(t)$ du mouvement brownien linéaire

L'étude du mouvement brownien conduit tout naturellement à l'idée d'une fonction aléatoire $X(t)$ vérifiant la condition suivante: *quels que soient t' et $t'' > t'$, l'accroissement $X(t'') - X(t')$ est une variable aléatoire gaussienne d'écart type $\sqrt{t'' - t'}$, c'est-à-dire que l'on a*

$$Pr\{X(t'') - X(t') < x\sqrt{t'' - t'}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \text{ [1]} . \tag{1}$$

Cette loi est d'ailleurs indépendante aussi bien de $X(t')$ que des valeurs prises par $X(t)$ avant l'instant t'.

D'après les propriétés connues de la loi dite de Gauss[2]), cette condition n'implique aucune contradiction. Comme elle ne peut définir la nature stochastique de la fonction $X(t)$ qu'à une constante près, on la complète par la condition que, pour une valeur t_0 de t, $X(t)$ ait une valeur donnée x_0, ou bien dépende d'une loi donnée. Sauf avis contraire, nous prendrons pour condition initiale $X(0) = 0$. Alors, pour $t > 0$, $X(t)$ est une variable gaussienne d'écart type $\sqrt{t}$. Si $0 < t < t_1$, l'ensemble des variables $X = X(t)$ et $X_1 = X(t_1)$ dépend de la loi de Gauss à deux variables, les trois paramètres dont dépend cette loi étant définis par les formules

$$M\{X^2\} = M\{XX_1\} = t\,, \quad M\{X_1^2\} = t_1\,; \tag{2}$$

le coefficient de corrélation entre X et X_1 est donc $\sqrt{t/t_1}$.

Il n'est pas nécessaire de rien ajouter concernant la corrélation des variables $X(t)$ groupées trois à trois (ou n à n). Si en effet $t_1 < t_2 < t_3$, l'accroissement $X_3 - X_2$ étant indépendant du passé, la loi qui régit X_3, quand on connaît X_1 et X_2, ne dépend que de X_2; la connaissance de X_1

---

[1]) Les notations $Pr\{A\}$, $Pr\{A, B\}$ et $Pr\{A/B\}$ désignent respectivement la probabilité d'un événement A, celle de A et B, et la probabilité conditionnelle de A si B est réalisé. La notation $M\{x\}$ désigne la valeur probable de x.

[2]) Nous nous conformons à l'usage en parlant de la loi de Gauss et de variables gaussiennes. Mais il convient de rappeler que cette loi, bien avant Gauss, a été considérée par de Moivre et Laplace.

est sans influence. Des différents renseignements dont on dispose, le plus récent compte seul, et dispense de connaître les autres. En d'autres termes, à chaque instant, la connaissance de la valeur actuelle de $X(t)$ sépare le passé et l'avenir, qui n'influent pas directement l'un sur l'autre.

Faisons maintenant une remarque importante. Quelle que soit la loi à deux variables X_1 et X, on peut réaliser un choix régi par cette loi en choisissant d'abord X_1, puis X, ce second choix devant alors être régi par la loi conditionnelle dont dépend X lorsque X_1 est connu. Si $t_0 < t < t_1$, $X_0 = X(t_0)$ étant connu, on voit qu'on peut choisir d'abord $X_1 = X(t_1)$, $X_1 - X_0$ étant une variable gaussienne d'écart type $\sqrt{t_1 - t_0}$, puis $X = X(t)$ d'après la formule

$$X(t) = \mu(t) + \sigma(t)\,\xi(t)\,, \tag{3}$$

où $\xi(t)$ est une variable gaussienne *réduite* (c'est-à-dire que son écart type est l'unité) et indépendante de X_0 et X_1, et où

$$\mu(t) = \frac{(t - t_0)\,X_1 + (t_1 - t)\,X_0}{t_1 - t_0}\,, \tag{4}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{(t - t_0)\,(t_1 - t)}{t_1 - t_0}}\,, \tag{5}$$

sont la valeur probable conditionnelle et l'écart type conditionnel de X, quand X_0 et X_1 sont connus.

Remarquons tout de suite que, pour t_1 infini, $\sigma(t)$ se réduit à $\sqrt{t - t_0}$; d'autre part, quelque petit que soit ε positif, l'ordre de grandeur probable de X_1 étant celui de $\sqrt{t_1}$, on a

$$\lim Pr\{\,|\mu(t) - X_0| > \varepsilon\,\} = 0\,.$$

La formule (3) se réduit donc à la limite à la formule (1), appliquée à l'accroissement $X - X_0$; l'influence de la donnée relative à l'instant t_1 devient négligeable.

L'avantage de la méthode d'interpolation est qu'elle permet de choisir une suite de valeurs distinctes

$$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \tag{6}$$

de t, qui constituent un ensemble partout dense, soit dans un intervalle fini (t_0, T), soit de t_0 à l'infini, et de déterminer successivement tous les

$X(t_n)$ en appliquant la formule (1) ou la formule (3) suivant que t_n dépasse, ou non, le plus grand des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Naturellement, les valeurs de t qui doivent intervenir dans chacune de ces applications sont t_n, le plus grand des $t_\nu (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ qui soit inférieur à t_n, et, éventuellement, le plus petit de ceux qui dépassent t_n.

Désignons maintenant par $X_n(t)$ la fonction continue égale à X_0 pour $t = t_0$, prenant pour $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$, les valeurs ainsi successivement obtenues, et variant linéairement dans chacun des intervalles séparés par ces valeurs de t; à droite de ces valeurs, elle conserve la dernière valeur connue. C'est donc la valeur probable conditionnelle de $X(t)$ quand on connaît $X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)$. On démontre que, pour n infini, elle tend *presque sûrement* (c'est-à-dire que l'hypothèse contraire, théoriquement possible, a une probabilité nulle) vers une limite $X(t)$, fonction de t bien définie et continue dans l'intervalle considéré (t_0, T) ou (t_0, ∞); la convergence est uniforme dans toute partie finie de cet intervalle.

Par la manière même dont les $X(t_n)$ ont été choisis, on peut à tout moment affirmer que le résultat est stochastiquement le même que si, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, ayant été rangés par ordre de grandeur, on n'avait appliqué que la formule (1). Cette formule est donc vérifiée, quels que soient les nombres de la suite (6) que l'on y substitue à t' et t''. On en déduit aisément, par continuité, qu'elle est vérifiée quels que soient $t' \geqslant t_0$ et $t'' > t'$ (et $\leqslant T$). La fonction aléatoire $X(t)$ est stochastiquement indépendante du choix des t_n.

2. La fonction réduite $\xi(t)$

Occupons-nous maintenant de la fonction aléatoire réduite $\xi(t)$ définie par la formule (3), et proposons-nous de l'étudier dans l'intervalle (t_0, t_1). Qu'il s'agisse de $\xi(t)$ ou de la fonction à moitié réduite

$$X_1(t) = X(t) - \mu(t) = \sigma(t)\, \xi(t)\,, \tag{7}$$

le processus dont dépend la fonction étudiée est indépendant de $X(t_0)$ et $X(t_1)$. Comme pour $X(t)$, si, à un instant quelconque t, on connaît la valeur actuelle de la fonction étudiée, les renseignements qu'on peut avoir sur ses valeurs antérieures sont sans influence sur les probabilités conditionnelles des événements futurs, et réciproquement. Comme pour $X(t)$, il en résulte que le processus est bien défini si l'on définit la corrélation qui existe entre les valeurs de $\xi(t)$ groupées deux à deux. Comme enfin la loi à deux variables $\xi(t)$ et $\xi(u)$ est une loi de Gauss, et que ces

variables, considérées séparément, sont réduites, il n'y a qu'à déterminer le coefficient de corrélation $\varrho = \varrho(t, u)$ de $\xi(t)$ et $\xi(u)$, qui est aussi celui de $X_1(t)$ et $X_1(u)$.

Nous pouvons supposer $t < u$. On a donc

$$t_0 < t < u < t_1 . \tag{8}$$

Si $X_1(t)$ est connu, $X_1(t_1)$ étant nul, la formule (3) s'applique à la loi conditionnelle dont dépend $X_1(u)$; il n'y a qu'à y remplacer t_0, t et X par t, u, et X_1. Il vient ainsi

$$X_1(u) = \frac{t_1 - u}{t_1 - t} X_1(t) + \sqrt{\frac{(u - t)\ (t_1 - u)}{t_1 - t}}\ \xi_1(u) ,$$

$\xi_1(u)$ étant une variable gaussienne réduite, indépendante de $X_1(t)$; on en déduit

$$M\{X_1(t)\ X_1(u)\} = \frac{t_1 - u}{t_1 - t} M\{X_1^2(t)\} ,$$

et, pour le coefficient de corrélation ϱ, on trouve la valeur

$$\varrho = \frac{M\{X_1(t)\ X_1(u)\}}{\sigma(t)\ \sigma(u)} = \frac{t_1 - u}{t_1 - t}\ \frac{\sigma(t)}{\sigma(u)} ,$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'expression (5) de $\sigma(t)$,

$$\varrho = \sqrt{\frac{(t - t_0)\ (t_1 - u)}{(u - t_0)\ (t_1 - t)}} . \tag{9}$$

D'après cette expression, $-\varrho^2$ est un des rapports anharmoniques des quatre nombres t_0, t, u, t_1. Il est donc invariant par une substitution homographique effectuée sur ces quatre nombres, cette substitution étant soumise à la seule restriction que les inégalités (8) soient, ou bien conservées, ou bien retournées. D'après une remarque du n° 1, le cas limite où l'un des nombres t_0 et t_1 est infini ne donne lieu à aucune difficulté.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème 1. La fonction $\xi(t)$, définie dans l'intervalle (t_0, t_1) par la formule (7), a toutes ses propriétés stochastiques dans cet intervalle invariantes pour n'importe quelle substitution homographique effectuée à la fois sur t_0, t_1 et t, avec cette seule restriction que, si t_0, t_1 et leurs transformés t_0', t_1' sont finis, l'intérieur de l'intervalle (t_0, t_1) corresponde à l'intérieur de (t_0', t_1').

3. Applications

Nous allons nous placer dans le cas où $\mu(t)$ est identiquement nul dans l'intervalle (t_0, t_1). Si t_0 et t_1 sont finis, cela implique que $X(t)$ s'annule en ces deux points; si l'un d'eux, par exemple t_1, est infini, cela implique seulement $X(t_0) = 0$. Dans ces conditions les racines de $X(t)$ comprises entre t_0 et t_1 sont celles de $\xi(t)$, et le théorème 1 entraîne l'invariance des propriétés stochastiques de l'ensemble E de ces racines, pour toutes les transformations homographiques considérées dans l'énoncé de ce théorème.

On peut alors, de propriétés établies dans le cas où t_1 est infini, déduire des propriétés relatives au cas où t_0 et t_1 sont finis. Ainsi, dans un travail antérieur[3]), nous avons établi les résultats suivants:

1° Si $X(0) = 0$, et $0 < t < u$, la probabilité que l'intervalle (t, u) ne contienne aucune racine de $X(\tau)$ est

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \sqrt{\frac{t}{u}} .$$

2° Si $X(0) = 0$, $0 < t < u$, et si $X(\tau)$ n'a aucune racine comprise entre 0 et t, la probabilité qu'il n'y en ait aucune entre 0 et u est $\sqrt{t/u}$.

A l'aide du théorème 1, on en déduit immédiatement les théorèmes suivants:

Théorème 2. Si $t_0 < t < u < t_1$, et si $X(t_0) = X(t_1) = 0$, la probabilité que l'intervalle (t, u) ne contienne aucune racine de $X(\tau)$ est $(2/\pi)$ Arc sin ϱ.

Théorème 3. Si $t_0 < t < u < t_1$, si $X(t_0) = X(t_1) = 0$, et s'il n'y a aucune racine de $X(\tau)$ comprise entre t_0 et t, la probabilité qu'il n'y en ait aucune entre t_0 et u est ϱ.

On démontre de la même manière, en désignant par $M(u)$ le maximum de

$$\varrho(t, u)\ \xi(t) = \sqrt{\frac{(t_1 - t_0)\ (t_1 - u)}{u - t_0}}\ \frac{X_1(t)}{t_1 - t} \tag{10}$$

quand t varie de t_0 à $u < t_1$, que:

---

[3]) *Paul Lévy*, Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio mathematica, vol. 7 (1939), p. 283—339. V. formules (35), (42) et (44).

Théorème 4. On a

$$Pr\{M(u) < y / X(t_0) = X(t_1) = 0\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta \,, \qquad (11)$$

$$Pr\{M(u) > y / X(t_0) = X(t_1) = 0 \,,\; M(u) = \xi(u)\} = e^{-\frac{y^2}{2}} \,. \qquad (12)$$

C'est en effet un énoncé de forme invariante. Pour t_1 infini, il se réduit à un théorème connu[4]).

Si t_1 est fini, la condition $M(u) = \xi(u)$, dans la formule (12), indique que $X_1(t)/(t_1 - t)$ atteint, pour $t = u$, une valeur non encore dépassée. Si t_1 est infini, elle exprime la même circonstance pour $X_1(t)$.

4. Remarques

1° Le théorème 1 s'étend naturellement au cas de l'espace. Si $M = M(t)$ désigne le point mobile soumis au mouvement brownien, si $A = A(t)$ désigne un point qui coïncide avec M aux instants t_0 et t_1 et a pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1) un mouvement rectiligne et uniforme, de sorte que A est la position probable de M si $M_0 = M(t_0)$ et $M_1 = M(t_1)$ sont connus, si l'on pose

$$AM = \sigma(t)\, V(t) \,,$$

de sorte que $V(t)$ est à chaque instant un vecteur gaussien réduit, alors: *les propriétés stochastiques de la fonction aléatoire vectorielle $V(t)$, dans l'intervalle (t_0, t_1), sont invariantes par les substitutions homographiques considérées au théorème* 1.

2° Quelque simple que soit le calcul qui nous a conduit à l'expression (9) du coefficient de corrélation ϱ, il peut y avoir intérêt à donner du théorème 1 une démonstration indépendante de ce calcul.

Tout d'abord le résultat énoncé est bien évident si la substitution homographique considérée est linéaire.

Considérons maintenant le processus définissant $X(t)/\sqrt{t}$ dans l'intervalle $(0, \infty)$, et dans l'hypothèse $X(0) = 0$. La corrélation entre $X(t)/\sqrt{t}$ et $X(u)/\sqrt{u}$ est absolument symétrique. Comme elle ne dépend que de t/u, cela suffit à prouver que ce processus est invariant, non seulement par le changement de t en $\lambda^2 t$, mais par celui de t en λ^2/t. [5])

---

[4]) V. les formules (15) et (19) du mémoire cité, note 3.

[5]) Cf. *Paul Lévy*, Le mouvement brownien plan. American journal of mathematics, t. LXII (1940), p. 487—550 (v. le théorème 2 de ce mémoire).

Cette invariance implique celle des probabilités conditionnelles relatives au cas où l'on impose à $X(t)$ certaines conditions restrictives. A l'hypothèse $X(0) = 0$, ajoutons l'hypothèse $X(t_0) = 0$ (t_0 étant un nombre positif donné). La fonction gaussienne initialement réduite $X(t)/\sqrt{t}$ a alors une valeur probable nulle, et un écart type $\sigma(t)$, égal à $\sqrt{(t_0 - t)/t_0}$ si $t < t_0$ et à $\sqrt{(t - t_0)/t}$ si $t > t_0$. Elle se ramène par la formule

$$X(t) = \sigma(t)\, \xi(t) \sqrt{t}$$

à une nouvelle fonction réduite $\xi(t)$, et il est bien évident que $\sigma(t)$ et le processus dont dépend $\xi(t)$ sont invariants par le changement de t en t_0^2/t (qui laisse t_0 invariant).

Le résultat relatif à $\xi(t)$ est précisément, pour le changement de t en t_0^2/t, celui que nous voulions obtenir. La donnée de la valeur zéro pour $X(t_0)$ sépare le passé et l'avenir, qui deviennent stochastiquement indépendants, et l'intervalle infini (t_0, ∞) se trouve ramené sur l'intervalle fini $(0, t_0)$. Comme d'ailleurs on peut placer l'origine à n'importe quel instant antérieur à l'instant t_0, et faire suivre le changement considéré d'un changement linéaire sur t, le théorème 1 se trouve démontré pour toutes les substitutions homographiques amenant l'intervalle (t_0, ∞) sur un intervalle fini, et par suite aussi pour toutes celles amenant deux intervalles finis l'un sur l'autre.

(Reçu le 1er septembre 1943.)