Sur la décomposition des polyèdres.

Autor(en): **Sydler, J.-P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **16 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15562

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur la décomposition des polyèdres

Par J.-P. SYDLER, Zurich

Les recherches poursuivies dans le cadre de l'étude axiomatique du volume ont conduit à une notion plus raffinée que la notion d'égalité de volume, celle d'équivalence[1]:

„Deux polyèdres P et P' sont dits *équivalents* (zerlegungsgleich) s'il est possible de les décomposer en polyèdres partiels $p_1, p_2, \ldots p_n$, respectivement $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, tels que p_i et p'_i soient congruents ($i = 1, \ldots, n$)."

Il intervient encore la généralisation suivante de cette notion[1]:

„P et P' sont dits *équivalents par adjonction* (ergänzungsgleich) si, en leur ajoutant deux polyèdres équivalents Q et Q', on peut obtenir deux polyèdres $P + Q$ et $P' + Q'$ qui sont équivalents."

Il est clair que deux polyèdres équivalents sont équivalents par adjonction et que deux polyèdres équivalents par adjonction ont même volume.

L'importance de ces notions apparaît surtout dans la géométrie non-archimédienne, mais elles sont aussi intéressantes dans la géométrie habituelle, archimédienne et euclidienne, à laquelle les considérations suivantes se rapportent exclusivement.

Dans le plan où les polygones remplacent les polyèdres, on peut éventuellement renoncer à introduire ces deux notions, car dans la géométrie archimédienne, deux polygones plans de même aire sont toujours équivalents et par suite équivalents par adjonction[1]).

Dans l'espace par contre, Dehn a trouvé le théorème suivant: „Il existe des polyèdres P et P' de même volume qui ne sont pas équivalents par adjonction et par conséquent qui ne sont pas équivalents." Ainsi par exemple, le tétraèdre régulier n'est pas équivalent à un cube[2]).

Dehn a encore démontré ce qui suit: „Si deux polyèdres équivalents par adjonction sont compris dans la même ‚classe', l'ensemble des classes formées avec tous les polyèdres de même volume est infini et a la puissance du continu." [3])

---

[1]) *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie (7*me* édition, Leipzig et Berlin, 1930), chap. IV.

[2]) *M. Dehn*, Über den Rauminhalt, Math. Ann. 55 (1902), 465—478. Démonstration simplifiée par Kagan, Über die Transformation der Polyeder, Math. Ann. 57 (1903), 421—424.

[3]) *M. Dehn*, Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie, Math. Ann. 59 (1904), 84—88.

Pour ses démonstrations, Dehn établit des conditions nécessaires pour l'équivalence par adjonction et il est aisé d'indiquer des couples de polyèdres P et P' qui n'y satisfont pas.

On n'a pas encore trouvé de conditions suffisantes générales pour l'équivalence ou l'équivalence par adjonction. On peut noter à ce propos que l'on ne connaît que peu de polyèdres simples, et en particulier de tétraèdres, qui sont équivalents à un cube. (On ne connaît guère que les prismes [4]) et les tétraèdres de Hill [5]).)

Les considérations de géométrie élémentaire suivantes se rattachent à ce cycle de problèmes. Au § 2, il est démontré que deux polyèdres équivalents par adjonction sont équivalents. Dans la géométrie habituelle où l'axiome d'Archimède est valable, la distinction entre équivalence et équivalence par adjonction est donc superflue. Dans le § 3, il est montré qu'il existe entre les polyèdres qui sont équivalents à un cube et ceux qui ne le sont pas, une autre différence qui a trait à la manière dont ils peuvent être décomposés. Le § 4 donne une nouvelle démonstration du deuxième théorème de Dehn mentionné plus haut sur l'existence d'une infinité de classes d'équivalence: Partant d'un seul polyèdre qui n'est pas équivalent à un cube (le tétraèdre régulier par exemple), on peut construire une infinité de polyèdres appartenant chacun à une classe différente, et cela à l'aide de considérations purement géométriques, sans employer les conditions de Dehn. Tous nos théorèmes et toutes nos constructions se basent sur un lemme formulé et démontré au § 1.

§ 1.

Si deux polyèdres P et P' sont équivalents, nous écrirons symboliquement $P \sim P'$. Nous ne parlerons de somme de deux polyèdres que s'ils n'ont pas de points intérieurs communs. Nos polyèdres ne sont pas nécessairement connexes.

Rappelons que tout prisme est équivalent à un cube[4]). La somme de n polyèdres équivalents à un cube est équivalente à un cube[6]). Ceci dit, établissons notre lemme fondamental.

---

[4]) *Enriques*, Fragen der Elementargeometrie (traduction allemande de Thieme, Leipzig, 1911), 1re partie.

Killing und Hovestadt, Handbuch des mathematischen Unterrichts (Leipzig und Berlin, 1913), II, § 13 et 14.

[5]) *Hill*, Determination of the volumes of certain species of tetrahedra, Proceedings of the London Mathematical Society XXVII (1896), 39—53.

[6]) Chacun de ces polyèdres étant équivalent à un parallélipipède rectangle de hauteur h_i et dont la base est un carré de côté 1, leur somme est équivalente à un parallélipipède de même base et de hauteur Σh_i.

LEMME

Soit P un polyèdre quelconque et soient n nombres positifs a_i tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

Il existe n polyèdres p_i et un polyèdre R tels que:

1. *Les polyèdres p_i sont semblables à P, le rapport linéaire de similitude étant a_i;*
2. *R est équivalent à un cube;*
3. $P \sim p_1 + p_2 + \ldots + p_n + R$.

Considérons d'abord le cas où P est un tétraèdre $ABCD$. Divisons l'arête AD en n segments proportionnels aux nombres a_i. Par les points de division A_i, menons les plans parallèles à la face ABC. Soit $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2$ le polyèdre compris entre deux plans consécutifs, les points A_2, B_2, C_2 étant respectivement entre les points A_1 et D, B_1 et D, C_1 et D. Le plan mené par A_2 parallèlement à la face BCD coupe les arêtes $A_1 B_1$ et $A_1 C_1$ en E et F. Le plan $A_2 B_2 F$ coupe l'arête $B_1 C_1$ en G. Le tétraèdre $A_2 A_1 EF$ est semblable au tétraèdre $DABC$, le rapport linéaire de similitude étant un des a_i; les polyèdres $A_2 EFB_2 B_1 G$ et $A_2 B_2 C_2 FGC_1$ sont des prismes. En appliquant la même décomposition à toutes les sections, nous trouvons les n tétraèdres cherchés et un polyèdre R composé de $2_n - 2$ prismes, donc équivalent à un cube.

Si P est un polyèdre quelconque, nous pouvons le décomposer en tétraèdres T_i:

$$P \sim \sum_i T_i \ .$$

Appliquons à chaque tétraèdre la décomposition précédente:

$$T_i \sim t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{in} + R_i \ .$$

Avec ces tétraèdres t_{ik}, nous pouvons construire n polyèdres p_k semblables à P:

$$\sum_i t_{ik} \sim p_k \ .$$

Par conséquent:

$$P \sim \sum T_i \sim p_1 + p_2 + \cdots + p_n + R \ .$$

$R \sim \sum R_i$ est équivalent à un cube, ce qui démontre notre théorème dans le cas général.

Comme nous emploierons souvent ce procédé, nous le nommerons „décomposition ϑ“.

§ 2.

Théorème. *Deux polyèdres équivalents par adjonction sont équivalents.*

Plus explicitement: *Soient A et B deux polyèdres quelconques et soient C et D deux polyèdres équivalents. Si les polyèdres $A + C$ et $B + D$ sont équivalents, les polyèdres A et B sont équivalents.*

Démonstration: Soient V_1 et V_2 les volumes de A et de C. Choisissons un n tel que $n^2 > \frac{V_1 + 3V_2}{V_1}$. A l'aide de la décomposition ϑ, nous tirons de A n polyèdres A' semblables à A et de volume $\frac{1}{n^3} V_1 = V_1'$. Le polyèdre restant R est équivalent à un cube. De ce polyèdre R, tirons n polyèdres C' semblables à C et de volume $\frac{1}{n^3} V_2 = V_2'$. A cause de notre choix de n, il reste un polyèdre S de volume

$$V_3 = V_1 - nV_1' - nV_2' > 0 .$$

Cette dernière transformation, purement géométrique, est toujours possible. En effet, supposons d'abord que C soit un tétraèdre. Les tétraèdres C' sont inscrits dans des prismes P' construits sur trois arêtes concourantes de C', de volume $3V_2'$ et équivalents à des cubes. Du cube R, nous pouvons tirer n cubes de volume $3V_2'$, les transformer en prismes P' desquels nous tirons les tétraèdres C'. Ceci est possible si le volume du cube R est plus grand que celui des n prismes P', c'est-à-dire: $V_1 - nV_1' > n3V_2'$, $n^2 > \frac{V_1 + 3V_2}{V_1}$. Si C est un polyèdre quelconque, il suffit de le décomposer en tétraèdres auxquels on applique la transformation précédente.

Nous avons donc

$$R \sim nC' + S$$

et par suite

$$A \sim nA' + R \sim nA' + nC' + S \sim n(A' + C') + S .$$

Par hypothèse,

$$A' + C' \sim B' + D',$$

B' et D' désignant deux polyèdres semblables à B et D, de volume V_1' et V_2', donc

$$A \sim n(B' + D') + S \sim nB' + nD' + S .$$

Par hypothèse

$$C' \sim D',$$

et par conséquent

$$A \sim n\,B' + n\,C' + S \sim n\,B' + (n\,C' + S)\,.$$

Mais $(n\,C' + S)$ n'est autre que R; donc

$$A \sim n\,B' + R\,.$$

D'autre part, si nous appliquons la décomposition ϑ au polyèdre B nous voyons que

$$B \sim n\,B' + R',$$

R' étant un polyèdre équivalent à un cube de même volume que R; R et R' sont donc équivalents et nous obtenons finalement

$$A \sim n\,B' + R \sim n\,B' + R' \sim B,$$
$$A \sim B\,.$$

Ce théorème n'est pas vrai dans une géométrie non-archimédienne; dans le plan déjà, si l'axiome d'Archimède n'est pas valable, deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents par adjonction, mais ne sont pas nécessairement équivalents.[1])

Nous pouvons encore énoncer notre théorème sous la forme suivante: Si de deux polyèdres équivalents, on enlève deux polyèdres équivalents, les restes sont équivalents (ce qui justifie en quelque sorte la soustraction des polyèdres). En particulier, si d'un polyèdre équivalent à un cube, on enlève un polyèdre équivalent à un cube, le reste est équivalent à un cube.

Tirons une conséquence de notre théorème: Soient deux polyèdres équivalents A et B et soit C leur intersection prise de façon quelconque. Les polyèdres $A - C$ et $B - C$ sont équivalents. En particulier, si A et B sont congruents, on obtient facilement une infinité de couples de polyèdres équivalents.

§ 3.

Théorème. *Si en enlevant de façon quelconque d'un polyèdre P un polyèdre P' semblable à P, on obtient un polyèdre non vide R équivalent à un cube, le polyèdre P est équivalent à un cube.* Réciproquement, *si P est équivalent à un cube, R est équivalent à un cube.* Démonstration: Soient a et a' les longueurs de deux arêtes correspondantes de P et P'. D'après notre lemme,

$$P \sim P' + P'' + C,$$

P'' étant un polyèdre semblable à P et d'arête $a'' = a - a'$, C étant équivalent à un cube. Par hypothèse,

$$P \sim P' + R\,.$$

Comme R et C sont équivalents à un cube,

$$R \sim C + C',$$

où C' est équivalent à un cube. Par conséquent,

$$P' + P'' + C \sim P' + R \sim P' + C + C'\,.$$

D'après le théorème précédent,

$$P'' \sim C';$$

P'' est équivalent à un cube, donc P aussi.

Réciproquement, si P est équivalent à un cube, R l'est aussi comme différence de deux polyèdres équivalents à un cube.

Théorème. *Si à l'aide de n polyèdres P_i semblables à un polyèdre P on peut construire un polyèdre semblable à P, le polyèdre P est équivalent à un cube.*

En effet, d'après notre lemme, P est équivalent à la somme d'un cube C et de n polyèdres P'_i semblables à P et proportionnels aux polyèdres P_i. La somme de ces n polyèdres P'_i est équivalente à un polyèdre P' semblable à P:

$$P \sim \sum P'_i + C \sim P' + C\,.$$

D'après notre théorème précédent, P est équivalent à un cube.

Nous pouvons énoncer cette proposition sous la forme suivante:

Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polyèdre soit équivalent à un cube est qu'il soit équivalent à k polyèdres semblables à lui-même* $(k > 1)$.

Il est clair en effet qu'un polyèdre équivalent à un cube est équivalent à k polyèdres semblables à lui-même.

Remarquons encore que si cette propriété est vraie pour un certain k, elle est vraie pour tout k. Nous pouvons donc toujours supposer $k = 2$.

De ce théorème, nous déduisons immédiatement le théorème suivant:

Il est impossible de décomposer un polyèdre non équivalent à un cube en k polyèdres semblables à lui-même.

C'est la généralisation d'un théorème de Dehn: Il est impossible de décomposer un tétraèdre régulier en k tétraèdres réguliers[3]).

§ 4.

Si l'on considère l'ensemble de tous les polyèdres de même volume, on peut les ranger en classes d'équivalence: Deux polyèdres appartiennent à la même classe s'ils sont équivalents et à deux classes différentes s'ils ne sont pas équivalents. Dans le plan, il n'existe qu'une seule classe. Dans l'espace, nous savons qu'il existe un polyèdre qui n'est pas équivalent à un cube (le tétraèdre régulier par exemple)[2]).

Théorème. *L'ensemble des classes d'équivalence est infini et a la puissance du continu.*

Démonstration: Soit P^* un polyèdre non équivalent à un cube. Désignons par A une de ses arêtes et par d la longueur de A; soit $C\,d^3$ le volume de P^*. Soit $P \sim p + p'$ un polyèdre de volume C, p et p' étant semblables à P^*. Soient encore a et a' les longueurs des arêtes de p et p' homologues à A et soit $b = a + a'$.

Si l'on ne distingue pas deux polyèdres équivalents, à tout nombre b, $1 \leqslant b \leqslant \sqrt[3]{4}$, correspond un et un seul polyèdre $P(b)$ [7]). En effet, le système

$$\begin{aligned} a^3 + a'^3 &= 1 \\ a + a' &= b \end{aligned}$$

n'admet que les solutions (a, a') et (a', a) où

$$a = \frac{3b^2 + \sqrt{12b - 3b^4}}{6b} \quad \text{et} \quad a' = \frac{3b^2 - \sqrt{12b - 3b^4}}{6b},$$

solutions réelles et positives si $1 \leqslant b \leqslant \sqrt[3]{4}$. Mais aux deux systèmes (a, a') et (a', a) correspondent deux polyèdres équivalents que nous ne distinguons pas.

---

[7]) Pour $b = 1$, $a' = 0$: Le polyèdre p' est vide.

Nous prétendons maintenant que:

La condition nécessaire et suffisante pour que deux polyèdres $P(b)$ et $P(b')$ soient équivalents est que $b = b'$.

La suffisance découle immédiatement de ce qui précède.

Si $b \neq b'$, les polyèdres $P(b)$ et $P(b')$ ne sont pas équivalents. En effet, supposons $b > b'$. Soit P' un polyèdre semblable à P^*, l'arête homologue à A ayant la longueur b. D'après notre lemme,

$$P' \sim P(b) + R \sim P(b') + P'' + R',$$

P'' étant semblable à P^*, l'arête homologue à A ayant la longueur $b - b'$. Comme R et R' sont équivalents à des cubes,

$$R \sim R' + R'',$$

R'' étant équivalent à un cube. Il est impossible que $P(b)$ et $P(b')$ soient équivalents, car nous aurions alors

$$P'' + R' \sim R \sim R' + R''$$
$$P'' \sim R'',$$

P'' serait équivalent à un cube, donc P^* aussi, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Ainsi donc, à tout nombre b, $1 \leqslant b \leqslant \sqrt[3]{4}$, correspond un polyèdre $P(b)$ et à deux nombres différents correspondent deux polyèdres non équivalents, donc de classes différentes. L'ensemble des classes d'équivalence a donc la puissance du continu.

(Reçu le 27 décembre 1943).