Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Eine elementare Ableitung der isoperimetrischen Ungleichung für Polygone.

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15565

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine elementare Ableitung der isoperimetrischen Ungleichung für Polygone

Von H. Hadwiger (Bern)

In einer kürzlich erschienenen Note hat *G. Bol*[1]) einen ersten vollständig elementaren Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0 \tag{1}$$

für konvexe Polygone mit Umfang L und Flächeninhalt F mitgeteilt. Das Beweisverfahren beruht auf der Bildung der „Parallelpolygone nach innen" nach *Th. Kaluza.*

Nachfolgend[2]) gebe ich eine ebenfalls einfache neue Ableitung der Ungleichung in der folgenden verschärften Gestalt

$$L^2 - 4\pi F \geqq \frac{\pi^2}{4}(s - 2r)^2 \ . \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet r den Radius des Inkreises und s die Länge einer beliebigen Sehne des Polygons, die durch den Mittelpunkt des Inkreises hindurchläuft. Gleich wie bei *G. Bol* werden für die Durchführung nur elementarste, der Planimetrie angehörende Formeln für Längen- und Flächenmessung benötigt.

Zunächst definieren wir den äußeren Parallelbereich eines nicht notwendig konvexen Polygons im Abstand ϱ. Dieser wird durch alle Punkte gebildet, die zu einem Kreis vom Radius ϱ gehören, dessen Mittelpunkt dem Polygon angehört. Dabei soll ein Punkt des Randes der betreffenden Figur auch als zur Figur gehörend betrachtet werden.

Im ersten Teil wird eine Relation induktiv abgeleitet, die man zweckmäßig als Steinersche Ungleichung bezeichnet. Diese Relation stellt eine naheliegende Erweiterung der bekannten Formel für den Flächeninhalt des äußeren Parallelbereiches eines konvexen Polygons von *J. Steiner*[3]) auf nicht notwendig konvexe Polygone dar. — Im zweiten Teil wird die angekündigte Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung als Folge-

---

[1]) *G. Bol*, Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität, 15, 27—36 (1943).

[2]) Es handelt sich um einen Beweis, den Verf. am 3. Dezember 1943 in der Mathematischen Vereinigung in Bern vorgetragen hat.

[3]) *J. Steiner*, Über parallele Flächen. Mber. Preuß. Akad. Wiss. 1840, 114—118. Ges. Werke Bd. 2, 173—176.

rung der Steinerschen Ungleichung dargestellt. Der Kerngedanke des Beweises besteht darin, daß das fraglich konvexe Polygon als Loch in einem umfassenden Polygon aufgefaßt wird.

1. Es bezeichne $F(\varrho)$ den Flächeninhalt des äußeren Parallelbereiches eines einfach zusammenhängenden Polygons vom Umfang L und Flächeninhalt F im Abstand ϱ. Dann gilt die Steinersche Ungleichung

$$F(\varrho) \leqq F + L\varrho + \pi\varrho^2 \ . \tag{3}$$

Eine elementare Diskussion lehrt folgendes: Der Parallelbereich eines Punktes ist ein Kreis, derjenige einer Strecke läßt sich in ein Rechteck und in zwei Halbkreise zerlegen; der Parallelbereich eines Dreieckes zerfällt in das ursprüngliche Dreieck, in drei Rechtecke und in drei Kreissektoren, die sich zu einem vollständigen Kreis zusammensetzen lassen. Man erkennt nun unmittelbar, daß die Relation (3) für die genannten drei Parallelbereiche richtig ist, und zwar gilt in allen drei Fällen insbesondere das Gleichheitszeichen. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß als Umfang einer Strecke die doppelte Streckenlänge in die Formel eingeht.

Wir beweisen nun die Ungleichung (3) durch vollständige Induktion: Es sei zunächst (3) richtig für alle Polygone mit den Eckpunktszahlen $1, 2, 3, \ldots n$. Diese induktive Voraussetzung ist nach dem Vorausgehenden jedenfalls für $n = 3$ richtig. Es liege nun ein Polygon vom Umfang L und Flächeninhalt F mit $n + 1$ Ecken vor. Durch eine geeignete Sehne s der Länge s zerlegen wir das Polygon in zwei Teilpolygone, deren Eckenzahlen n nicht übersteigen. Ihre Umfänge und Flächeninhalte bezeichnen wir mit L_1, L_2 und F_1, F_2, so daß die Relation

$$F = F_1 + F_2, \ L = L_1 + L_2 - 2s \tag{4}$$

gelten. — Da nun ein Punkt des Parallelbereiches des ursprünglichen Polygons zu mindestens einem Parallelbereich der beiden Teilpolygone und ein Punkt des Parallelbereiches $s(\varrho)$ der Sehne s sicher zu beiden Parallelbereichen der Teilpolygone gehört, gilt die folgende Relation für die Flächeninhalte dieser Parallelbereiche

$$F(\varrho) \leqq F_1(\varrho) + F_2(\varrho) - s(\varrho) \ . \tag{5}$$

Auf Grund der induktiven Voraussetzung kann für die Teilpolygone die Ungleichung (3) beansprucht werden. So folgt zunächst

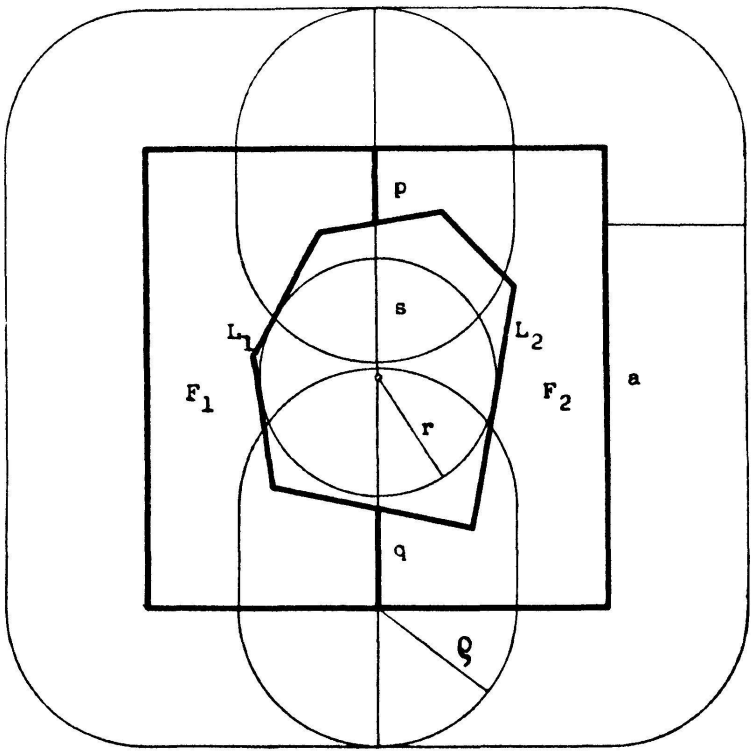
$$F(\varrho) \leqq F_1 + F_2 + (L_1 + L_2)\,\varrho + 2\pi\varrho^2 - (2s\varrho + \pi\varrho^2)\,,$$

und mit Rücksicht auf (4)

$$F(\varrho) \leqq F + L\varrho + \pi\varrho^2\,. \tag{6}$$

Damit ist der induktive Beweis von (3) geschlossen.

2. Wir wenden uns nun dem Beweis der isoperimetrischen Ungleichung (2) zu. Das ursprünglich gegebene konvexe Polygon P vom Umfang L und Flächeninhalt F umschließen wir vollständig durch ein Quadrat Q der Seitenlänge a, dessen Mittelpunkt mit dem Inkreismittelpunkt zusammenfällt. (Vgl. die untenstehende Figur.) Es sei r der Radius des



Inkreises. Eine Gerade durch den erwähnten Mittelpunkt durchsetze das Polygon längs einer Sehne der Länge s und durchschneide das Ringpolygon R, das das ursprüngliche Polygon umfaßt, längs der beiden Strecken p und q; ferner zerlege diese Gerade den Umfang des Polygons in die zwei Teile L_1 und L_2 und halbiere den Umfang des umschließenden Quadrates. Die Fläche des Ringpolygons werde entsprechend in die beiden Teile F_1 und F_2 zerlegt. Offenbar gelten die nachstehenden Relationen

$$L = L_1 + L_2,\; F + F_1 + F_2 = a^2,\; s \geqq 2r\,. \tag{7}$$

Wir wählen nun ϱ so, daß

$$2r \leqq 2\varrho \leqq s \tag{8}$$

gilt. Es bezeichne nun der Reihe nach $R(\varrho)$, $F_1(\varrho)$, $F_2(\varrho)$, $p(\varrho)$, $q(\varrho)$ den Flächeninhalt des äußeren Parallelbereiches im Abstand ϱ des Ringpolygons R, seiner beiden Teile F_1 und F_2 und der beiden Strecken p und q. Da nun einerseits jeder zu $R(\varrho)$ gehörende Punkt in wenigstens einem der beiden Flächenstücke $F_1(\varrho)$ und $F_2(\varrho)$ enthalten ist, und da andererseits jeder zu $p(\varrho)$ oder $q(\varrho)$ gehörende Punkt sicher in beiden Flächenstücken $F_1(\varrho)$ und $F_2(\varrho)$ gleichzeitg liegt, gilt die Relation

$$R(\varrho) + p(\varrho) + q(\varrho) \leqq F_1(\varrho) + F_2(\varrho) . \tag{9}$$

Hierbei ist noch zu beachten, daß die beiden Flächenstücke $p(\varrho)$ und $q(\varrho)$ wegen (8) keine gemeinsamen inneren Punkte aufweisen. Ebenfalls im Hinblick auf (8) folgert man weiter, daß der Parallelbereich $R(\varrho)$ des Ringpolygons mit dem entsprechenden Parallelbereich des Quadrates Q identisch wird. Offenbar ist nur zu zeigen, daß jeder Punkt im Innern des Polygons P zu $R(\varrho)$ gehören muß. In der Tat: Würde dort ein Punkt nicht zu $R(\varrho)$ gehören, so würde der Kreis, den man mit dem Radius ϱ um ihn legt, keinen Punkt des Randes des Polygons P enthalten (vgl. die Definition des äußeren Parallelbereiches), so daß man einen Kreis bilden könnte, der noch ganz im Innern des Polygons P liegen würde, dessen Radius andererseits größer als r wäre, im Widerspruch zur Definition des Inkreises. So kann also

$$R(\varrho) = a^2 + 4a\varrho + \pi\varrho^2 \tag{10}$$

gesetzt werden. Wendet man nun auf die beiden Flächeninhalte $F_1(\varrho)$ und $F_2(\varrho)$ die Steinersche Ungleichung (3) an, so geht die Relation (9) mit gleichzeitiger Berücksichtigung von (10) über in

$$a^2 + 4a\varrho + \pi\varrho^2 + 2p\varrho + \pi\varrho^2 + 2q\varrho + \pi\varrho^2 \leqq$$
$$F_1 + (L_1 + 2a + p + q)\,\varrho + \pi\varrho^2 + F_2 + (L_2 + 2a + p + q)\,\varrho + \pi\varrho^2 ,$$

oder nach verschiedenen Kürzungen und Rücksicht auf (7)

$$F \leqq L\varrho - \pi\varrho^2 . \tag{11}$$

Durch eine naheliegende quadratische Ergänzung schließt man weiter auf die Relation

$$L^2 - 4\pi F \geqq (L - 2\pi\varrho)^2 . \tag{12}$$

Für $\varrho = r$ stellt (12) eine bekannte Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung dar[4]).

Addiert man die beiden mit $\varrho = r$ und $\varrho = \frac{s}{2}$ resultierenden Ungleichungen, so gewinnt man mit Verwendung der einfachen Ungleichung

$$2(\alpha^2 + \beta^2) \geqq (\alpha - \beta)^2$$

noch die Relation

$$L^2 - 4\pi F \geqq \frac{\pi^2}{4}(s - 2r)^2 \,, \tag{13}$$

und damit die behauptete Verschärfung.

Wie man ohne weiteres einsieht, kann das isoperimetrische Defizit, also der Ausdruck auf der linken Seite von (13), nur dann verschwinden, wenn jede durch das Zentrum des Inkreises gehende Sehne der ursprünglichen konvexen Figur die Länge $2r$ hat, was nur dann möglich ist, wenn die Figur mit dem Inkreis zusammenfällt. Diese Möglichkeit besteht für ein Polygon also nicht.

(Eingegangen den 14. Februar 1944.)

---

[4]) Vgl. *T. Bonnesen*, Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper. Math. Ann. 84, 216—227 (1921). *K. Th. Vahlen*, Zwei Beweise für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises. Ann. Mat. pura appl. 10, 121—124 (1932).