Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Über die Stieltjès'schen Integrale.
Autor: Nef, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15545

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Stieltjès'schen Integrale

Herrn Professor Carathéodory zum siebzigsten Geburtstage gewidmet!

Von Walter Nef, Zürich

Im Gebiete der in einem reellen Intervall $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen $f(x)$ sei ein lineares Funktional $A(f(x))$ gegeben, d. h. ein Funktional, welches den beiden Bedingungen genügt:

I. Es ist $A(f_1(x) + f_2(x)) = A(f_1(x)) + A(f_2(x))$ für zwei beliebige in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.

II. Es existiert eine von $f(x)$ unabhängige Konstante M, so daß

$$|A(f(x))| \leqslant M \cdot F$$

ist, wo F das Maximum des Betrages von $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ bedeutet.

F. Riesz hat bewiesen[1]), daß es dann immer eine Funktion $\alpha(x)$ gibt, die in $\langle a, b \rangle$ definiert und daselbst von beschränkter Schwankung ist, so daß der Funktionalwert für jede in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion $f(x)$ gleich dem Stieltjès'schen Integral

$$A(f(x)) = \int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] \tag{1}$$

ist. Umgekehrt ist es klar, daß jede Funktion $\alpha(x)$, die in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung ist, im Gebiete aller in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen ein lineares Funktional gemäß (1) definiert. Denn daß Eigenschaft I erfüllt ist, ist offensichtlich, und die totale Variation von $\alpha(x)$ in $\langle a, b \rangle$ hat die von der Konstanten M verlangte Eigenschaft.

In dieser Arbeit stellen wir die Frage nach den Bedingungen dafür, daß zwei Funktionen $\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$, die beide in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung sind, im Gebiet aller in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen dasselbe Funktional erzeugen.

1. $\alpha(x)$ sei in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung. Wir stellen zuerst fest, daß der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert

$$\alpha(x \pm 0)$$

[1]) Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionelles linéaires. Ann. de l'Ecole Norm. 31. (1914) p. 9.

für alle Werte von x aus dem offenen Intervall (a, b) existiert[2]). Im folgenden verstehen wir unter $\tilde{\alpha}(x \pm 0)$ die im abgeschlossenen Intervall $\langle a, b \rangle$ definierte Funktion:

$$\tilde{\alpha}(x \pm 0) = \begin{cases} \alpha(a) \text{ für } x = a \\ \alpha(x \pm 0) \text{ für } x \subset (a, b) \\ \alpha(b) \text{ für } x = b\,. \end{cases} \tag{2}$$

$\tilde{\alpha}(x \pm 0)$ ist in $\langle a, b \rangle$ wieder von beschränkter Schwankung[3]).

Lemma 1. *$\alpha(x)$ sei in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] = \int_a^b f(x)\, d[\tilde{\alpha}(x + 0)] = \int_a^b f(x)\, d[\tilde{\alpha}(x - 0)]$$

für jede in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion $f(x)$.

Beweis: Wir betrachten die Differenz:

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] - \int_a^b f(x)\, d[\tilde{\alpha}(x \pm 0)] = \int_a^b f(x)\, d[\alpha(x) - \tilde{\alpha}(x \pm 0)]\,,$$

von der wir beweisen müssen, daß sie gleich null ist. Da $\alpha(x)$ als Funktion von beschränkter Schwankung höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat[4]), sind $\alpha(x)$ und $\tilde{\alpha}(x \pm 0)$ höchstens in einer abzählbaren Menge von x-Werten voneinander verschieden. Es ist also:

$$\alpha(x) - \tilde{\alpha}(x \pm 0) = 0 \tag{3}$$

für alle x in (a, b) mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge. Für die Werte $x = a$ und $x = b$ ist (3) erfüllt nach der Definition (2) der Funktion $\tilde{\alpha}(x \pm 0)$. Daraus folgt die Behauptung ohne weiteres, wenn wir an die Definition des Stieltjès'schen Integrals denken[5]), da wir die für die Bildung desselben notwendigen Unterteilungen des Intervalls $\langle a, b \rangle$ stets so wählen können, daß die Unterteilungspunkte der nach dem Vorhergehenden in $\langle a, b \rangle$ überall dichten Menge der Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ angehören.

---

[2]) *Carathéodory*, S. 186 (1).
[3]) *Carathéodory*, S. 187, Satz 8.
[4]) *Carathéodory*, S. 188, Satz 10.
[5]) *Lebesgue*, S. 253.

Satz 2. *$\alpha(x)$ sei in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung und es sei*

$$\tilde{\alpha}(x \pm 0) \equiv \alpha(a) = \alpha(b) = \text{const.}$$

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] = 0$$

für alle in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen $f(x)$.

Beweis: Nach Lemma 1 ist

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] = \int_a^b f(x)\, d[\tilde{\alpha}(x \pm 0)]\,.$$

Aus der Voraussetzung folgt aber unmittelbar, daß das letztere Integral gleich null ist.

Satz 3. *Es sei*

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)] = 0$$

für jede in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktion $f(x)$. Dann ist

$$\tilde{\alpha}(x \pm 0) \equiv \text{const. } \textit{in } \langle a, b \rangle\,.$$

Beweis: Wir beweisen den Satz für die Funktion $\tilde{\alpha}(x + 0)$. Der Beweis für $\tilde{\alpha}(x - 0)$ geht analog. Es sei $a \leqslant x < b$. Wir bilden folgende Schar von in $\langle a, b \rangle$ *stetigen* Funktionen:

$$s_\varepsilon(\xi, x) = \begin{cases} 1 \text{ für } a \leqslant \xi \leqslant x \\ \text{linear für } x \leqslant \xi \leqslant x + \varepsilon \\ 0 \text{ für } x + \varepsilon \leqslant \xi \leqslant b\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, daß

$$\tilde{\alpha}(x + 0) - \alpha(a) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^b s_\varepsilon(\xi, x)\, d[\alpha(\xi)] \tag{4}$$

ist. Es ist nämlich:

$$\tilde{\alpha}(x + 0) - \alpha(a) = \lim_{\varepsilon \to +0} \alpha(x + \varepsilon) - \alpha(a) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{x+\varepsilon} d[\alpha(\xi)]\,.$$

Nun folgt aus der Definition von $s_\varepsilon(\xi, x)$:

$$\int_a^x d[\alpha(\xi)] = \int_a^x s_\varepsilon(\xi, x)\, d[\alpha(\xi)] \quad \text{und} \quad \int_{x+\varepsilon}^b s_\varepsilon(\xi, x)\, d[\alpha(\xi)] = 0\,.$$

Wir haben also, um (4) zu beweisen, nur zu zeigen, daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} d[\alpha(\xi)] = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} s_\varepsilon(\xi, x)\, d[\alpha(\xi)],$$

oder daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x))\, d[\alpha(\xi)] = 0 \tag{5}$$

ist. Nun definieren wir in $\langle x, x + \varepsilon \rangle$ eine Funktion $u(\xi)$:

$$u(\xi) = \begin{cases} \tilde{a}(x + 0) - \alpha(x) & \text{für} \quad \xi = x\,, \\ 0 & \text{für} \quad \xi > x\,. \end{cases} \tag{6}$$

Wegen

$$\alpha(\xi) = (\alpha(\xi) + u(\xi)) - u(\xi)$$

ist dann:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x))\, d[\alpha(\xi)] &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x))\, d[\alpha(\xi) + u(\xi)] \\ &- \lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x))\, d[u(\xi)]\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir betrachten das erste der beiden letzten Integrale. Aus der Definition von $u(\xi)$ folgt, daß die Funktion $\alpha(\xi) + u(\xi)$ für $\xi = x$ gleich ihrem rechtsseitigen Grenzwert ist:

$$\alpha(x) + u(x) = \alpha(x + 0) + u(x + 0)\,. \tag{8}$$

Nun bedeute $t(x, x + \varepsilon)$ die totale Variation der Funktion $\alpha(\xi) + u(\xi)$ in $\langle x, x + \varepsilon \rangle$. Wir behaupten, daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} t(x, x + \varepsilon) = 0 \tag{9}$$

ist. Dazu genügt es wegen (8) zu zeigen, daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} t(x, x + \varepsilon) = \alpha(x + 0) + u(x + 0) - \alpha(x) - u(x) \tag{10}$$

ist. Da $\alpha(\xi) + u(\xi)$ mit $\alpha(\xi)$ von beschränkter Schwankung ist, gibt es zwei monoton wachsende Funktionen $p(\xi)$ und $n(\xi)$, so daß in $\langle x, x + \varepsilon \rangle$:

$$\alpha(\xi) + u(\xi) = p(\xi) - n(\xi)$$

ist [6].

[6]) *Carathéodory*, S. 184, Satz 1.

Nun bedeute $p(v, w)$ bzw. $n(v, w)$ die totale Variation von $p(\xi)$ bzw. $n(\xi)$ in $\langle v, w \rangle$. Da $p(\xi)$ und $n(\xi)$ monoton wachsende Funktionen sind, ist:

$$p(x, x+\varepsilon) = p(x+\varepsilon) - p(x)$$
$$n(x, x+\varepsilon) = n(x+\varepsilon) - n(x),$$

also auch:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to +0} p(x, x+\varepsilon) &= p(x+0) - p(x) \\ \lim_{\varepsilon \to +} n(x, x+\varepsilon) &= n(x+0) - n(x) . \end{aligned} \tag{11}$$

Von den beiden rechts stehenden Werten ist stets mindestens einer gleich null [7]). Wir nehmen an, es sei etwa

$$n(x+0) - n(x) = 0 .$$

(Im Falle $p(x+0) - p(x) = 0$ geht man genau gleich vor.)

Da

$$t(x, x+\varepsilon) = p(x, x+\varepsilon) + n(x, x+\varepsilon)$$

ist [8]), so wird wegen (11):

$$\lim_{\varepsilon \to +0} t(x, x+\varepsilon) = p(x+0) - p(x) =$$
$$= p(x+0) - n(x+0) - p(x) + n(x) .$$

Damit ist (10) und infolgedessen (9) bewiesen.

Nun ist das erste der beiden Integrale auf der rechten Seite von (7)

$$\left| \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi)) \, d[\alpha(\xi) + u(\xi)] \right| \leqslant t(x, x+\varepsilon),$$

da

$$| 1 - s_\varepsilon(\xi, x) | \leqslant 1$$

ist [9]). Also ist:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x)) \, d[\alpha(\xi) + u(\xi)] = 0 .$$

Für das zweite Integral folgt aus der Definition (6) der Funktion $u(\xi)$:

$$\int_x^{x+\varepsilon} (1 - s_\varepsilon(\xi, x)) \, d[u(\xi)] = (1 - s_\varepsilon(x, x)) \cdot [\alpha(x) - \alpha(x+0)] .$$

---

[7]) *Carathéodory*, S. 187 (2).

[8]) *Carathéodory*, S. 183 (2).

[9]) *Lebesgue*, S. 254.

Wegen $s_s(x,x) = 1$ ist dieser letzte Ausdruck gleich 0. Damit ist (5) mittels (7) und infolgedessen auch (4) bewiesen. Da aber $s_s(\xi,x)$ in $\langle a,b\rangle$ stetig ist, folgt aus (4) und der Voraussetzung des Satzes:

$$\tilde{a}(x+0) - \alpha(a) = 0 ,$$

womit der Satz für $a \leqslant x < b$ bewiesen ist. Wäre nun $\alpha(b) \neq \alpha(a)$, so wäre

$$\int_a^b 1 \cdot d[\alpha(x)] = \alpha(b) - \alpha(a) \neq 0 ,$$

was gegen die Voraussetzung des Satzes ist.

Hauptsatz 4. *$\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ seien in $\langle a, b\rangle$ von beschränkter Schwankung. Dann und nur dann ist*

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha_1(x)] = \int_a^b f(x)\, d[\alpha_2(x)]$$

für jede in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion $f(x)$, wenn

$$\tilde{a}_1(x \pm 0) - \tilde{a}_2(x \pm 0) = \text{const.} \tag{12}$$

ist, wo

$$\tilde{a}_\nu(x \pm 0) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_\nu(a) & \text{für } x = a \\ \alpha_\nu(x \pm 0) & \text{für } a < x < b \\ \alpha_\nu(b) & \text{für } x = b \end{array} \right\} \nu = 1, 2 \text{ ist.}$$

Dabei erhalten wir zwei richtige Sätze, je nachdem wir beidemal das obere Vorzeichen oder beidemal das untere nehmen.

Beweis: a) (12) sei erfüllt. Dann ist nach **Satz 2:**

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha_1(x)] - \int_a^b f(x)\, d[\alpha_2(x)] = \int_a^b f(x)\, d[\alpha_1(x) - \alpha_2(x)] = 0 .$$

b) Es sei

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha_1(x)] = \int_a^b f(x)\, d[\alpha_2(x)]$$

für jede in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion $f(x)$. Dann ist:

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha_1(x) - \alpha_2(x)] = 0 ,$$

also nach **Satz 3:**

$$\tilde{a}_1(x \pm 0) - \tilde{a}_2(x \pm 0) = \text{const.}$$

Korollar 5. *$\alpha_1(x)$ und $\alpha_2(x)$ seien in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung, und es sei*

$$\tilde{\alpha}_1(x+0) - \tilde{\alpha}_2(x+0) = \text{const.}$$

Dann ist auch

$$\tilde{\alpha}_1(x-0) - \tilde{\alpha}_2(x-0) = \text{const.}$$

und umgekehrt.

2. Man kann offenbar die Gesamtheit aller Funktionen, die in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung sind, in Klassen einteilen durch die Forderung, daß zwei Funktionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ dann und nur dann zur selben Klasse gehören, wenn ihre rechts- (links-) seitigen Limesfunktionen $\tilde{\alpha}(x+0)$ und $\tilde{\beta}(x+0)$($\tilde{\alpha}(x-0)$ und $\tilde{\beta}(x-0)$) sich höchstens um eine additive Konstante unterscheiden (betreffend der Definition von $\tilde{\alpha}(x \pm 0)$, $\tilde{\beta}(x \pm 0)$ vergleiche (2)). **Hauptsatz 4** sagt dann aus, daß die Menge der linearen Funktionale im Gebiet der in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen $f(x)$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller Klassen abgebildet ist, wenn wir als Bild einer Klasse das durch ihre Funktionen $\alpha(x)$ vermöge des Stieltjès'schen Integrals

$$A(f(x)) = \int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)]$$

dargestellte eindeutig bestimmte lineare Funktional auffassen. Statt der Klasse nehmen wir jetzt eine der rechts-(links-)seitigen Limesfunktionen $\tilde{\alpha}(x+0)$ ($\tilde{\alpha}(x-0)$) ihrer Elemente (die sich alle nur um eine additive Konstante unterscheiden), und bezeichnen diese mit $\alpha^*(x)$. Dann erhalten wir nach Lemma 1 wieder jedes lineare Funktional genau einmal in der Form

$$A(f(x)) = \int_a^b f(x)\, d[\alpha^*(x)].$$

Hauptsatz 6. *Das Stieltjès'sche Integral*

$$\int_a^b f(x)\, d[\alpha(x)]$$

erzeugt jedes lineare Funktional im Gebiete der in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen $f(x)$ genau einmal, wenn $\alpha(x)$ alle Funktionen durchläuft, die in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung und im Innern (a, b) rechts-(links-)seitig stetig sind. Dabei sind solche Funktionen $\alpha(x)$, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, als nicht verschieden zu betrachten.

Dieser Satz ist nach dem Vorhergehenden bewiesen, wenn wir die Richtigkeit der folgenden beiden Hilfssätze gezeigt haben:

Hilfssatz 7. *$\alpha(x)$ sei in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung. Dann ist $\alpha(x \pm 0)$ in (a, b) rechts- bzw. linksseitig stetig.*

Hilfssatz 8. *$\alpha(x)$ sei in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Schwankung und in (a, b) rechts- bzw. linksseitig stetig. Dann existiert in $\langle a, b \rangle$ eine Funktion $\beta(x)$, die daselbst von beschränkter Schwankung ist, und so, daß*

$$\alpha(x) = \tilde{\beta}(x + 0) \quad \text{bzw.} \quad \alpha(x) = \tilde{\beta}(x - 0) \text{ ist.}$$

Beweis von Hilfssatz 7: Man hat zu beweisen, daß

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\lim_{\eta \to +0} \alpha(x \pm \varepsilon \pm \eta)\right) = \lim_{\eta \to +0} \alpha(x \pm \eta)$$

ist. Das ist aber richtig, sobald $\tilde{\alpha}(x \pm 0)$ existiert[10]), was in unserem Fall erfüllt ist.

Beweis von Hilfssatz 8: Es ist nämlich:

$$\alpha(x) = \tilde{\alpha}(x + 0) \quad \text{bzw.} \quad \alpha(x) = \tilde{\alpha}(x - 0)\,.$$

(Eingegangen den 3. März 1943.)

LITERATUR:

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1927 (zitiert als „*Carathéodory*").

H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1928 (zitiert als „*Lebesgue*").

[10]) Enzyklopädie der math. Wiss. Leipzig, Teubner, 1899—1916, Bd. III, 1. Hälfte, S. 50, Alinea 1.