Sur une proposition de Mlle S. Piccard.

Autor(en): **Sierpinski, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **18 (1945-1946)**

PDF erstellt am: **27.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16911

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sur une proposition de Mlle S. Piccard

Par W. Sierpinski, Varsovie

Dans son livre *Sur les ensembles de distances*, Mlle *Sophie Piccard* a démontré que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire E congruent à son complémentaire qui n'est pas mesurable L, ne jouit pas de la propriété de Baire et tel que l'ensemble M de tous les nombres positifs qui ne sont pas égaux à une distance entre deux points de E est dénombrable*[1]).

Le but de cette Note est de démontrer cette proposition de Mlle *Piccard sans faire appel à l'hypothèse du continu, en utilisant seulement l'axiome du choix.*

Soit X l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $0 < x < 2$. Il résulte du théorème de *Zermelo* qu'il existe une suite transfinie $S = \{x_\xi\}_{\xi < \varphi}$ formée de tous les nombres distincts de X et nous pouvons supposer que φ est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et que $x_1 = 1$. Or, la famille de tous les ensembles parfaits (non vides) $\subset X$ étant de puissance du continu, il existe aussi une suite transfinie $\{P_\xi\}_{\xi < \varphi}$ de type φ, formée de tous ces ensembles.

E étant un ensemble linéaire et a un nombre réel, désignons par $E(a)$ la translation de E de longueur a (c.-à-d. l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $x - a \in E$). Nous définirons maintenant par l'induction transfinie trois suites transfinies $\{a_\xi\}_{\xi < \varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi < \varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi < \varphi}$ comme il suit.

Posons $a_1 = 0$, $b_1 = x_2$ et soit c_1 le premier terme de la suite S qui appartient à P_1 et est distinct des nombres 1, $x_2 + 1$ et $x_2 - 1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \varphi$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ pour $\xi < \alpha$, et soit E_α leur ensemble. L'ensemble E_α est évidemment de puissance $< 2^{\aleph_0}$, de même que l'ensemble

$$H_\alpha = X[E_\alpha(1) + E_\alpha(-1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} + 1) + E_\alpha(x_{1+\alpha} - 1)] \ . \quad (1)$$

L'intervalle $0 < x < 2 - x_{1+\alpha}$ contient donc des nombres qui n'appartiennent pas à H_α : soit a_α le premier de tels nombres de la suite S. Posons $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha}$: nous aurons $b_\alpha \in X$.

L'ensemble parfait P_α, en tant que de puissance $2^{\aleph_0}$, contient des nombres n'appartenant pas à H_α et autres que chacun des nombres

---

[1]) *Sophie Piccard:* Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un esp ace euclidien, Paris 1939, pp. 68—71 (Proposition 15).

$a_\alpha + 1$, $a_a - 1$, $b_\alpha + 1$, $b_\alpha - 1$: soit c_α le premier de tels nombres de la suite S.

Les suites $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$, $\{b_\xi\}_{\xi<\varphi}$ et $\{c_\xi\}_{\xi<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Soit Q l'ensemble de tous les nombres a_ξ, b_ξ et c_ξ, où $\xi<\varphi$ et, en désignant par J l'intervalle $0 \leqslant x<1$, posons

$$R = Q + [J - (Q + Q(-1))] \tag{2}$$

et

$$E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R(2k) \ . \tag{3}$$

Je dis que l'ensemble E satisfait à la proposition de Mlle *Piccard.*

D'abord je démontrerai que $CE = E(1)$, c.-à-d. que le complémentaire de E (par rapport à la droite), CE, coïncide avec la translation de E de longueur 1, autrement dit que les formules

$$x \in E \tag{4}$$

et

$$x + 1 \bar{\in} E \tag{5}$$

sont équivalentes.

Soit donc $x \in E$ et admettons que $x + 1 \in E$. D'après (3) il existe des nombres y et z de R et des entiers k et l, tels que

$$x = y + 2k \quad \text{et} \quad x + 1 = z + 2l \ ,$$

d'où $z - y = 1 + 2(l - k)$. Or, d'après (2), et vu que $Q \subset X$, on trouve $0 \leqslant y<2$ et $0 \leqslant z<2$, d'où $|z - y|<2$, ce qui donne, $|z - y|$ étant un nombre impair, $z - y = \pm 1$.

D'après $y \in R$ et (2) on a soit $y \in Q$, soit $y \in J - [Q + Q(-1)]$ et pareillement pour z. Distinguons 4 cas.

1) $y \in Q$, $z \in Q$. D'après la définition de l'ensemble Q il existe des nombres ordinaux $<\varphi$, α et β, tels que y est un des nombres a_α, b_α, c_α et z est un des nombres a_β, b_β, c_β. Or, comme $0<x_{1+\alpha} \neq 1$, on a $b_\alpha = a_\alpha + x_{1+\alpha} \neq a_\alpha \pm 1$ et, comme $c_\alpha \neq a_\alpha \pm 1$ et $c_\alpha \neq b_\alpha \pm 1$, et vu que $z - y = \pm 1$, on conclut sans peine qu'il ne peut pas être $\alpha = \beta$. On a donc $\alpha \neq \beta$, soit $\alpha > \beta$. Alors, vu la définition de a_α, b_α et c_α, on a $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \bar{\in} E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$, donc $y \bar{\in} E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$. Or, on a a_β, b_β, $c_\beta \in E_\alpha$, d'où $a_\beta \pm 1$, $b_\beta \pm 1$, $c_\beta \pm 1 \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$: comme $y =$

$z \pm 1$ et z est un des nombres a_β, b_β, c_β, on aurait donc $y \in E_\alpha(1) + E_\alpha(-1)$, ce qui est impossible. Le cas 1) est donc impossible.

2) $y \in Q$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a donc $z = y \pm 1 \in Q(1) + Q(-1)$, ce qui est impossible, puisque $z \in J$, $z \bar{\in} Q(-1)$ et $J \cdot Q(1) = 0$.

3) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in Q$. Ce cas se traite comme le cas 2).

4) $y \in J - [Q + Q(-1)]$, $z \in J - [Q + Q(-1)]$. On a dans ce cas y, $z \in J$, donc $0 \leqslant y < 1$, $0 \leqslant z < 1$ et $|y - z| < 1$, contrairement à $y - z = \pm 1$.

Nous avons donc démontré que la formule (4) entraîne la formule (5).

Soit maintenant $x \bar{\in} E$ et distinguons deux cas:

1) $\mathrm{E}x = 2k$ (où $\mathrm{E}x$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant x$). On a donc $2k \leqslant x < 2k + 1$, d'où $x \in J(2k)$. Vu que $x \bar{\in} E$, on a, d'après (3), $x \bar{\in} R(2k)$, donc, d'après (2), $x \bar{\in} Q(2k)$ et $x \bar{\in} J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$, ce qui donne tout de suite $x \in Q(2k - 1)$ et $x + 1 \in Q(2k) \subset R(2k) \subset E$, donc $x + 1 \in E$.

2) $\mathrm{E}x = 2k - 1$. On a donc $2k - 1 \leqslant x < 2k$ et $x + 1 \in J(2k)$. S'il était $x + 1 \bar{\in} E$, on aurait $x + 1 \bar{\in} R(2k)$, donc $x + 1 \bar{\in} Q(2k)$ et $x + 1 \in J(2k) - [Q(2k) + Q(2k - 1)]$, ce qui donne $x + 1 \in Q(2k - 1)$ et $x \in Q(2k - 2) \subset R(2k - 2) \subset E$, contrairement à l'hypothèse que $x \bar{\in} E$. On a donc $x + 1 \in E$.

Nous avons ainsi démontré que la formule (5) entraîne la formule (4).

L'équivalence des formules (4) et (5) est ainsi établie et on a $CE = E(1)$.

Il résulte de la définition de l'ensemble E que E a au moins un point commun avec tout ensemble parfait contenu dans l'intervalle $(0, 2)$. Il en résulte, comme on sait, que E est dans $(0, 2)$ de mesure extérieure $= 2$ et de deuxième catégorie dans toute portion de l'intervalle $(0, 2)$. Or, comme $CE = E(1)$, l'ensemble CE est dans l'intervalle $(1, 2)$ de mesure extérieure $= 1$ et de deuxième catégorie dans toute portion de $(1, 2)$. Il s'en suit tout de suite que E n'est pas mesurable L et ne jouit pas de la propriété de Baire.

Or, soit M l'ensemble de tous les nombres impairs. Je dis que pour qu'un nombre réel positif d soit une distance entre deux points de E, il faut et il suffit qu'on ait $d \bar{\in} M$.

En effet, si $x \in E$ et $d = 2k + 1$, où k est un entier, on a $x + d \in E(2k + 1)$. Or, d'après (3) on a $E(2k) = E$, donc $E(2k + 1) = E(1) = CE$. On a donc $x + d \bar{\in} E$. Cela prouve qu'il n'existe aucun couple de points de E entre lesquels la distance serait $= d$.

D'autre part, si $d \bar{\epsilon} M$, $d > 0$, on a $\delta = d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \neq 1$ et, comme $0 \leqslant d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2} < 2$, on a $0 \leqslant \delta < 2$. Si $\delta = 0$, on a $d = 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, si $x_0 \epsilon E$, on a $x_0 + d \epsilon E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, c.-à-d. $x_0 + d \epsilon E$. Si $\delta \neq 0$, on a $0 < \delta < 2$, $\delta \neq 1$, et il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, tel que $\delta = x_{1+\alpha}$, d'où $b_\alpha = a_\alpha + \delta = a_\alpha + d - 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ et, comme $a_\alpha \epsilon E$, $b_\alpha \epsilon E$, $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2} \epsilon E\left(2\mathrm{E}\frac{d}{2}\right) = E$, a_α et $b_\alpha + 2\mathrm{E}\frac{d}{2}$ sont deux points de E entre lesquels la distance est $= d$.

L'ensemble E satisfait donc à la proposition de Mlle Piccard, qui se trouve ainsi démontrée.

(Reçu le 1er mars 1946.)