Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 18 (1945-1946)

Artikel: Sul comportamente degli elementi periodici in un gruppo di DEDEKIND infinito.

Autor: Zappa, Guido

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16892

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sul comportamente degli elementi periodici in un gruppo di DEDEKIND infinito[1]

Di GUIDO ZAPPA, Roma

Ad Andreas Speiser nel suo 60° compleanno.

Negli ultimi anni, in un complesso di lavori, *O. Ore* ha sviluppato lo studio dei gruppi concepiti come strutture.

Tra le strutture, hanno particolare importanza le cosiddette strutture di *Dedekind*, quelle cioè per cui è soddisfatta la relazione (di *Dedekind*): se $A \supset B$, è

$$A \frown (B \smile C) = B \smile (A \frown C)$$

(ove, com'è d'uso, $A \frown B$ indica l'intersezione, $A \smile B$ l'unione di A e B, mentre $A \supset B$ significa che A contiene B).

La totalità dei sottogruppi normali di un gruppo costituisce una struttura di *Dedekind*; da ciò discende la validità, pei sottogruppi normali, di teoremi di decomposizione, quali quello di *Jordan-Hölder*, quello di *Schreier-Zassenhaus*, etc. Onde l'interesse di determinare altre strutture di *Dedekind* costituite da sottogruppi di un gruppo.

A tal fine *Ore*[2]) ha posto il problema di determinare i gruppi in cui la totalità di tutti i sottogruppi costituisce una struttura di *Dedekind* (gruppi che io chiamo gruppi di *Dedekind*). In un mio recente lavoro[3]), ho affrontato e risoluto il problema della determinazione di tutti i gruppi di *Dedekind* finiti.

Quale studio preliminare per la determinazione dei gruppi di *Dedekind* infiniti, nella presente Nota io esamino il comportamento degli elementi periodici in un gruppo di *Dedekind* possedente anche elementi aperiodici. E precisamente, dimostro che, se un gruppo G di *Dedekind* possiede qualche elemento aperiodico, ogni sottogruppo di G costituito solo da elementi periodici è normale in G, e di conseguenza ogni elemento periodico di G è trasformato da ciascun elemento di G in una sua potenza. Tutti gli elementi periodici di G costituiscono un sottogruppo caratteristico F, abeliano o hamiltoniano.

---

[1]) *Anmerkung der Redaktion.* Die vorliegende Arbeit war für die Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli, 1945, berechnet. Wegen verspätetem Eintreffen konnte sie leider nicht mehr in dieselbe aufgenommen werden.

[2]) *O. Ore*, Some Studies on Group Theory. Congrès des Mathématiques à Helsingfors, (1938), pag. 7.

[3]) Caratterizzazione dei gruppi di *Dedekind* finiti. Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes, 8, (1944), pp. 443—460.

Se H e K son due sottogruppi di un gruppo di Dedekind, e $H \cap K$ è massimo in K, si ha che H è massimo in $H \cup K$. Infatti, detto L un sottogruppo di $H \cup K$ contenente H, si ha, in base alla relazione di *Dedekind*, $L = H \cup (L \cap K)$. Ma L contiene H, e perciò anche $H \cap K$; onde, essendo $H \cap K$ massimo in K, si ha che, o $L \cap K = H \cap K$ e allora $L = H$, o $L \cap K = K$ e allora $L = H \cup K$. Onde H è massimo in $H \cup K$.

Sia G un gruppo di Dedekind, H e K due suoi sottogruppi, il primo dei quali abbia solo elementi d'ordine finito. Se $H \cap K$ è massimo in K, $H \cup K$ contiene solo elementi d'ordine finito.

Procediamo per assurdo, e supponiamo pertanto che $H \cup K$ contenga un elemento aperiodico a. Detto p un intero > 1, indichiamo con A e con A_p i sottogruppi ciclici generati rispettivamente da a e da a^p. Poiché $H \cap K$ è massimo in K, in base all'osservazione precedente, H è massimo in $H \cup K$; onde $A_p \cup H$ coincide o con H, o con $H \cup K$. Ma non può $A_p \cup H$ coincidere con H, perché H non può contenere l'elemento aperiodico a^p; quindi $A_p \cup H$ coincide con $H \cup K$ e pertanto contiene A. Per la relazione di *Dedekind* è allora $A = A_p \cup (A \cap H)$; e poiché A non ha elementi periodici oltre l'identità, si ha $A \cap H = 1$, $A = A_p$, il che è assurdo. Pertanto $H \cup K$ non ha elementi aperiodici.

Se G è un gruppo di Dedekind, tutti i suoi elementi d'ordine finito costituiscono un sottogruppo caratteristico.

Siano a e b due elementi periodici di G; basterà dimostrare che il gruppo generato da a e b contiene solo elementi periodici. Siano A e B, rispettivamente, i sottogruppi ciclici generati da a e da b, e sia b^m la più piccola potenza di b contenuta in A. Posto $m = p_1 p_2 \dots p_s$ con $p_1, p_2, \dots, p_s$ numeri primi, distinti o no, indichiamo con B_1 il gruppo generato da b^{p_1}, con B_2 il gruppo generato da $b^{p_1 p_2}, \dots$, con B_{s-1} il gruppo generato da $b^{p_1 \cdots p_{s-1}}$, con B_s il gruppo generato da $b^{p_1 \cdots p_s}$. Evidentemente $A \cap B = B_s$. L'indice di B_s in B_{s-1} è il numero primo p_s, quindi B_s è massimo in B_{s-1}; inoltre A ha solo elementi periodici, e $A \cap B_{s-1} = B_s$; quindi, in base al teorema precedente, $A \cup B_{s-1} = A_{s-1}$ ha solo elementi periodici. In modo analogo si dimostra che $A_{s-1} \cup B_{s-2} = A \cup B_{s-2}$ ha solo elementi periodici, ... e così seguitando si giunge a dimostrare che $A \cup B$ ha solo elementi periodici, e il teorema è provato.

Se G è un gruppo di Dedekind, H un suo sottogruppo formato da elementi periodici, d un elemento aperiodico di G, H è mutato in sè da d.

Sia D il sottogruppo generato da d. In base al teorema precedente, gli elementi periodici di $H \cup D$ formano un sottogruppo L, il quale contiene H. Per la relazione di *Dedekind*, deve essere $L = H \cup (L \cap D)$. Ma $L \cap D = 1$, perché D non ha, oltre l'identità, elementi periodici, quindi $L = H$, e pertanto $d^{-1}Hd$, che deve stare in L, coincide con H.

In particolare *ogni elemento periodico di G è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento aperiodico.*

Ma di più, *se G contiene qualche elemento aperiodico, ogni elemento periodico di G è trasformato in una sua potenza da ciascun elemento periodico di G.*

Siano infatti a e b due elementi periodici, e d un elemento aperiodico di G. Indichiamo con A, B, D, i gruppi generati, rispettivamente, da a, b, d. Tutti gli elementi periodici di $B \cup D$ sono in B (cfr. dimostrazione teorema precedente) quindi $b \cdot d$ è un elemento aperiodico, e come tale trasforma, in base al teorema precedente, A in sè. Ma anche d, essendo aperiodico, trasforma A in sè, quindi altrettanto deve fare $b = (bd)d^{-1}$. Pertanto b trasforma a in una sua potenza, c. d. d.

In conclusione *gli elementi periodici di un gruppo di Dedekind G contenente qualche elemento aperiodico costituiscono un sottogruppo caratteristico F; ogni sottogruppo di F è normale in G.* Pertanto *F è abeliano o hamiltoniano.*

Il sottogruppo F, essendo abeliano o hamiltoniano, è il prodotto diretto di p-gruppi di *Sylow* (eventualmente in numero infinito) relativi a valori distinti del numero primo p. Ciascuno di questi p-gruppi è abeliano se p è dispari, mentre può essere hamiltoniano se $p = 2$. Se d è un elemento aperiodico di G, e P un sottogruppo di *Sylow* abeliano di F, d trasforma ciascun elemento a di P in una sua potenza a^x, *con x non dipendente da a* (come risulta dalle proprietà degli automorfismi dei gruppi abeliani). Se poi P è un sottogruppo di *Sylow* hamiltoniano di F, esso è necessariamente il prodotto diretto di un gruppo di quaternioni, Q, per un gruppo abeliano R ad elementi tutti del secondo ordine. Un elemento aperiodico d di G deve trasformare ogni elemento di R in sè, mentre, detti a e b due generatori di Q ($a^4 = b^4 = 1$, $a^2 = b^2$, $a^{-1}\, b\, a = b^3$), d può comportarsi con a e b in uno dei tre modi seguenti:

1°) $d^{-1}ad = a$, $d^{-1}bd = b$; 2°) $d^{-1}ad = a^3$, $d^{-1}bd = b$;

3°) $d^{-1}ad = a^3$, $d^{-1}bd = b^3$.

Il terzo caso si riduce, in realtà, al secondo, cambiando il sistema di elementi generatori di Q (ponendo, precisamente, ab al posto di b).

(Reçu le 24 mai 1945.)