Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 19 (1946-1947)

Artikel: Integralsätze der Flächentheorie.
Autor: Scherrer, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17338

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Integralsätze der Flächentheorie

Von W. SCHERRER, Bern

In der Theorie der konvexen Körper spielen neben Volumen und Oberfläche noch folgende Integrale eine ausgezeichnete Rolle: Das Integral der Gaußschen Krümmung, das Integral der mittleren Krümmung und das Integral über das Produkt aus der mittleren Krümmung und der Stützfunktion.

Für das Integral der Gaußschen Krümmung besteht die klassische Gleichung von Bonnet

$$\int K\,do = 2\pi - \oint \varkappa_g\,ds\ , \tag{1}$$

die auf beliebigen berandeten Elementarflächenstücken gültig ist.

Der Zweck dieser Abhandlung ist nun, zu zeigen, daß für die übrigen Integrale entsprechende Gleichungen bestehen, die ebenfalls für beliebige Flächen gelten und die bekannten Relationen über konvexe Flächen als Spezialfälle enthalten. Charakteristisch für diese Gleichungen ist das Auftreten von Linienintegralen, wodurch eine äußerliche Analogie zu (1) zustandekommt. Das Hilfsmittel zur Gewinnung dieser Gleichungen ist die elementare Vektorrechnung. Es ist daher notwendig, die Vektordarstellung der Grundgrößen der Flächentheorie voranzustellen.

§ 1. Die Grundgrößen der Flächentheorie

Wir gehen aus von der mindestens dreimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,(u, v) \tag{2}$$

des Ortsvektors einer Fläche und definieren durch

$$\mathfrak{x}\,[u(t), v(t)] \equiv \mathfrak{x}\,(t) \tag{3}$$

die auf der Fläche verlaufenden Kurven. Die Ableitungen des Kurvenvektors nach dem Parameter t charakterisieren wir durch Punkte.

Die Flächennormale definieren wir durch

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|\,[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\,|} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{\sqrt{\Delta}} \tag{4}$$

und das Oberflächenelement durch

$$do = |[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|\, du\, dv = \sqrt{\Delta}\, du\, dv \;, \tag{5}$$

wobei wir also von der Abkürzung

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]^2 = \Delta \tag{6}$$

Gebrauch machen.

Nun definieren wir in der üblichen Weise die Hauptformen der Flächentheorie durch

$$\mathrm{I} = \dot{\mathfrak{x}}^2 \qquad \equiv E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \;, \tag{7}$$

$$\mathrm{II} = \mathfrak{N}\ddot{\mathfrak{x}} = -\dot{\mathfrak{N}}\dot{\mathfrak{x}} \equiv L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + \mathfrak{N}\dot{v}^2 \;. \tag{8}$$

Die Vektordarstellung der Formenkoeffizienten ist also zu entnehmen aus der Tafel

$$\boxed{\begin{array}{lll} E = \mathfrak{x}_u^2 \;; & L = -\mathfrak{N}_u\mathfrak{x}_u & \\ F = \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v \;; & M = -\mathfrak{N}_u\mathfrak{x}_v = & -\mathfrak{N}_v\mathfrak{x}_u \\ G = \mathfrak{x}_v^2 \;; & N = & -\mathfrak{N}_v\mathfrak{x}_v \end{array}} \tag{9}$$

Jetzt ergeben sich in bekannter Weise die Gaußsche Krümmung K, die mittlere Krümmung H, die Stützfunktion P und als neue Größe der „*Stützvektor*" $\mathfrak{P}$ durch die Definitionen

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \;, \tag{10}$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \;, \tag{11}$$

$$P = -\mathfrak{N}\mathfrak{x} \;, \tag{12}$$

$$\mathfrak{P} = -[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}] \;. \tag{13}$$

Für die späteren Umformungen besonders wichtig werden die Vektorformeln

$$[[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}] = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a} \tag{14}$$

und

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}][\mathfrak{c}, \mathfrak{d}] = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}\mathfrak{d} - \mathfrak{a}\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{b}\mathfrak{c} \tag{15}$$

sein.

Insbesondere erhält man mit Hilfe (15) und unter Beachtung von (9) resp. (10) die wichtige Vektorformel

$$[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v] = K\sqrt{\Delta}\,\mathfrak{N} \ . \tag{16}$$

Speziell folgt aus (6) und (9)

$$\Delta = EG - F^2 \ . \tag{17}$$

Schließlich sei noch der mehrmals heranzuziehende Gaußsche Integralsatz notiert

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\right) du\, dv = \oint (-Y\dot{u} + X\dot{v})\, dt \ . \tag{18}$$

Zum Schluß möchte ich daran erinnern, daß die konventionelle Vorzeichenwahl in (8) und (12) durch die Forderung bedingt ist, bei konvexen Flächen die innere Normale zu verwenden. Dann werden nach (8) die Hauptkrümmungen und nach (12) die Stützfunktionen für innere Punkte positiv.

§ 2. Das Integral der mittleren Krümmung

Für die mittlere Krümmung H erhalten wir gestützt auf (11), (9) und (17)

$$\begin{aligned} 2\Delta H = &- \mathfrak{x}_u^2 \cdot \mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_u \\ &+ \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_v - \mathfrak{x}_v^2 \cdot \mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_u \ . \end{aligned}$$

Wegen (15) und (4) folgt daraus

$$\begin{aligned} 2\Delta H &= [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v][\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}_u] + [\mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_u][\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}_v] \\ &= \sqrt{\Delta}\{\mathfrak{N}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}_u] - \mathfrak{N}[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}_v]\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\Delta} H &= \mathfrak{N}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}_u] - \mathfrak{N}[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}_v] \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\mathfrak{N}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}]\Big\} - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\mathfrak{N}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}]\Big\} - \mathfrak{N}_u[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}] + \mathfrak{N}_v[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}] \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\mathfrak{N}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}]\Big\} - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\mathfrak{N}[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}]\Big\} - 2[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]\,\mathfrak{x} \ . \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (12), (13) und (16) erhalten wir also folgende Differentialformel für die mittlere Krümmung:

$$H = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left\{\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}_v\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}_u\right\}}{2\sqrt{\Delta}} + PK\,. \tag{19}$$

Die Integration über ein Elementarflächenstück ergibt daher nach (5) und (18)

$$\boxed{\int_{\mathfrak{G}} H\,do = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{N}}\,dt + \int_{\mathfrak{G}} PK\,do}\,. \tag{20}$$

Von dieser allgemein gültigen Integralformel seien folgende Spezialfälle erwähnt:

1) Für *geschlossene Flächen* folgt

$$\int H\,do = \int PK\,do\,. \tag{20a}$$

2) Für *Minimalflächen* $H = 0$ folgt

$$\int_{\mathfrak{G}} PK\,do = -\frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{N}}\,dt\,. \tag{20b}$$

3) Für *Torsen* $K = 0$ erhält man schließlich

$$\int_{\mathfrak{G}} H\,d\sigma = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}\,\dot{\mathfrak{N}}\,dt\,. \tag{20c}$$

§ 3. Das Integral über das Produkt aus der Stützfunktion und der mittleren Krümmung

Wir multiplizieren (19) mit P und erhalten vorerst

$$2\sqrt{\Delta}\,PH = P\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}_v) - P\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{P}\,\mathfrak{N}_u) + 2\sqrt{\Delta}\,P^2K\,. \tag{21}$$

Gestützt auf (12) und (13) und die speziell aus (12) folgenden Beziehungen

$$P_u = -\mathfrak{N}_u\,\mathfrak{x}\,; \qquad P_v = -\mathfrak{N}_v\,\mathfrak{x} \tag{22}$$

berechnen wir nun

$$P\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v) - P\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u) = \frac{\partial}{\partial u}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u)$$
$$+ \mathfrak{P}\mathfrak{N}_v \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_u - \mathfrak{P}\mathfrak{N}_u \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_v$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_u - \mathfrak{P}\mathfrak{N}_u \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_v &= [\mathfrak{x}, \mathfrak{N}]\,\mathfrak{N}_v \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_u - [\mathfrak{x}, \mathfrak{N}]\,\mathfrak{N}_u \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{N}_v \\ &= -\,[[\mathfrak{x}, \mathfrak{N}], \mathfrak{x}]\,[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v] \\ &= -\,[\mathfrak{P}, \mathfrak{x}] \cdot K\sqrt{\Delta} \cdot \mathfrak{N} \\ &= -\,[\mathfrak{x}, \mathfrak{N}]\,\mathfrak{P} \cdot K\sqrt{\Delta} \\ &= -\,\mathfrak{P}^2 K\sqrt{\Delta}\,,\end{aligned}$$

wobei wir von den Formeln (15) und (16) Gebrauch gemacht haben.

Faßt man die Ergebnisse der beiden Teilrechnungen zusammen, so erhält man vorerst

$$P\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v) - P\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u) = \frac{\partial}{\partial u}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u) - \mathfrak{P}^2 K\sqrt{\Delta}\,.$$

Führt man diesen Ausdruck in (21) ein, so erhält man schließlich die Differentialformel

$$PH = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P\mathfrak{P}\mathfrak{N}_u)}{2\sqrt{\Delta}} + (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)\,K\,. \tag{23}$$

Die Integration über ein Elementarflächenstück führt daher nach (5) und (18) auf die Integralformel

$$\boxed{\int_{\mathfrak{G}} PH\,do = \tfrac{1}{2}\oint P\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{N}}\,dt + \int_{\mathfrak{G}} (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)\,K\,do}\,. \tag{24}$$

Analog wie oben erhält man folgende Spezialfälle:

1. Für *geschlossene Flächen* folgt

$$\int PH\,do = \int (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)\,K\,do \tag{24a}$$

2. Für *Minimalflächen* $H = 0$ ergibt sich

$$\int_{\mathfrak{G}} (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)\,K\,do = -\tfrac{1}{2}\oint P\mathfrak{P}\dot{\mathfrak{N}}\,dt\,. \tag{24b}$$

3) Für *Torsen* $K = 0$ erhält man schließlich

$$\int_{\mathfrak{G}} PH\, do = \tfrac{1}{2} \oint P \mathfrak{P} \dot{\mathfrak{N}}\, dt \ . \tag{24c}$$

Die linke Seite von (24a) führt bei konvexen Körpern bekanntlich auf die Oberfläche. Wir wollen daher im nächsten Paragraphen noch eine entsprechende Formel für den Flächeninhalt eines Elementarflächenstücks aufstellen.

§ 4. Das Integral der Oberfläche.

Wir betrachten ein den Ursprung nicht treffendes Elementarflächenstück F und konstruieren denjenigen Kegel Φ, dessen Spitze im Ursprung liegt und dessen Leitlinie die Randlinie C des Flächenstücks F ist. Das Volumen V des durch F und Φ eingeschlossenen Sektorkörpers berechnet sich bekanntlich gemäß der Formel

$$V = \tfrac{1}{3} \int_F P\, do \ . \tag{25}$$

Eine Formel für die Oberfläche des Elementarflächenstücks erhalten wir nun durch eine sinngemäße Erweiterung der Steinerschen Parallelflächenkonstruktion: Wir gehen über zu den durch

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varrho \cdot \mathfrak{N} \tag{26}$$

gegebenen Parallelflächenstück $\overline{F}$ von F, sowie zu den entsprechenden Sektorvolumen $\overline{V}$ und bilden auf zwei Arten den Grenzwert

$$\left.\frac{d\overline{V}}{d\varrho}\right|_{\varrho=0} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\overline{V} - V}{\varrho} \ . \tag{27}$$

Gestützt auf die Formel (26) stellen wir das Volumen $\overline{V}$ das eine Mal in der Gestalt

$$\overline{V} = -\tfrac{1}{3} \int \bar{\mathfrak{x}} [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]\, du\, dv \ , \tag{28}$$

das andere Mal in der Gestalt

$$\overline{V} = \tfrac{1}{3} \int \overline{P} \bar{\varrho}_1 \bar{\varrho}_2\, d\omega \ , \tag{29}$$

wo $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{\varrho}_2$ die Hauptkrümmungsradien im Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ darstellen und $d\omega$ das Flächenelement des Normalen-Bildes ist:

$$d\omega = \overline{K}\, d\bar{\sigma} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\varrho}_1 \bar{\varrho}_2} . \tag{30}$$

Offenbar genügt es, zur Bestimmung von (27), wenn man die Integrale (28) und (29) gemäß (26) nach ϱ entwickelt und hierauf die in ϱ linearen Terme feststellt.

Für den Integranden von (28) erhält man durch elementare Rechnung die Entwicklung

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}[\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = {} & \mathfrak{x}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \\ & + \{\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{N}_v] + \mathfrak{x}[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}_v] + \mathfrak{N}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\}\, \varrho \\ & + \text{höhere Glieder in } \varrho . \end{aligned}$$

Den Koeffizienten des linearen Terms formen wir nun um gemäß

$$\begin{aligned} & \mathfrak{x}[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{x}_v] - \mathfrak{x}[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{x}_u] + \mathfrak{N}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \\ = {} & \frac{\partial}{\partial u}\Big\{\mathfrak{x}[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_v]\Big\} - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\mathfrak{x}[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_v]\Big\} + \mathfrak{N}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] - \mathfrak{x}_u[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_v] + \mathfrak{x}_v[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_u] \\ = {} & \frac{\partial}{\partial u}\Big(\mathfrak{P}\mathfrak{x}_v\Big) - \frac{\partial}{\partial v}\Big(\mathfrak{P}\mathfrak{x}_u\Big) + 3\sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt von (13), (4) und (6) Gebrauch gemacht haben. Wir erhalten daher bei Verwendung von (18) als erstes Ergebnis

$$\left.\frac{d\overline{V}}{d\varrho}\right|_{\varrho=0} = -\tfrac{1}{3}\oint \mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}\, dt - \int_F do . \tag{31}$$

Bei der Entwicklung des Integranden von (29) wollen wir unsere Vorzeichenkonvention beachten: Innere Normale für konvexe Flächen. Für die Variation der Stützfunktion und der Hauptkrümmungsradien unter dem Einfluß von (26) erhalten wir dann die Formeln

$$\overline{P} = P - \varrho ; \quad \bar{\varrho}_1 = \varrho_1 - \varrho ; \quad \bar{\varrho}_2 = \varrho_2 - \varrho . \tag{32}$$

Für den Integranden selbst ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{P}\bar{\varrho}_1 \bar{\varrho}_2 = {} & P\varrho_1\varrho_2 \\ & - \{P(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1\varrho_2\}\varrho \\ & + \text{höhere Glieder in } \varrho . \end{aligned}$$

Gemäß (29) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\overline{V}}{d\varrho}\right|_{\varrho=0} &= -\tfrac{1}{3}\int_F \{P(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1\varrho_2\}\, d\omega \\ &= -\tfrac{1}{3}\int_F \left(\frac{2PH}{K} + \frac{1}{K}\right) d\omega , \end{aligned}$$

also

$$\left.\frac{d\overline{V}}{d\varrho}\right|_{\varrho=0} = -\frac{2}{3}\int_F PH\,do - \frac{1}{3}\int_F do\,. \tag{33}$$

Der Vergleich von (31) und (33) ergibt schließlich die gewünschte Integralformel:

$$\boxed{\int_F PH\,do = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}\,dt + \int_F do\,.} \tag{34}$$

Als Spezialfälle erhalten wir:

1) Für *geschlossene Flächen* gilt

$$\int PH\,do = \int do\,. \tag{34a}$$

2) Für *Minimalflächen* $H = 0$ ergibt sich die Schwarzsche Darstellung der Oberfläche durch ein Linienintegral

$$\int_F do = -\frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}\dot{\mathfrak{x}}\,dt\,. \tag{34b}$$

Schließlich gibt uns noch der Vergleich von (34) mit (25) eine zweite Darstellung der Oberfläche:

$$\boxed{\int_F do = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}(P\dot{\mathfrak{N}} - \dot{\mathfrak{x}})\,dt + \int_F (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)K\,do\,.} \tag{35}$$

Zu dieser Formel notieren wir die Spezialfälle der *geschlossenen Flächen*

$$\int do = \int (P^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^2)\,K\,do\,, \tag{35a}$$

und der *Torsen*

$$\int_F do = \frac{1}{2}\oint \mathfrak{P}(P\dot{\mathfrak{N}} - \dot{\mathfrak{x}})\,dt\,. \tag{35b}$$

Alle bis jetzt entwickelten Hauptformeln gelten für beliebige Flächen unter der ausdrücklichen Voraussetzung, daß die Parameter des Flächenpunktes die unabhängigen Variablen bilden, denn nur dann sind die Stützfunktion P und der Stützvektor $\mathfrak{P}$ unter allen Umständen eindeutige Funktionen.

§ 5. Umrechnung auf die Stützfunktion

Wir wollen zum Schluß unsere Integrale umrechnen auf die Darstellung einer Fläche durch ihre Stützfunktion. Um einzusehen, daß man die bekannten Integrale aus der Theorie der konvexen Flächen erhält, genügt es, geschlossene Flächen zu betrachten.

Als rechnerisches Hilfsmittel neben (14) und (15) empfiehlt sich die vektorielle Darstellung des Schnittpunktes von drei Ebenen

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\,\mathfrak{x} &= a \\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{x} &= b \\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{x} &= c \end{aligned} \tag{36}$$

gemäß der Formel

$$\mathfrak{x} = \frac{a[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] + b[\mathfrak{c}, \mathfrak{a}] + c[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}} \quad . \tag{37}$$

Außerdem benötigen wir neben den beiden ersten Hauptformen (7) und (8) jetzt noch die sog. dritte Hauptform.

$$\mathrm{III} = \dot{\mathfrak{N}}^2 \equiv e\,\dot{u}^2 + 2f\,\dot{u}\dot{v} + g\,\dot{v}^2 \ , \tag{38}$$

deren Koeffizienten durch

$$e = \mathfrak{N}_u^2 \quad ; \quad f = \mathfrak{N}_u\,\mathfrak{N}_v \quad ; \quad g = \mathfrak{N}_v^2 \tag{39}$$

gegeben sind. Sie stellt das Quadrat des Linienelementes des sphärischen Abbildes

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|}$$

der Fläche dar und hängt bekanntlich mit der ersten und zweiten Hauptform durch die Identität

$$\mathrm{III} \equiv 2H\,\mathrm{II} - K \cdot \mathrm{I} \tag{40}$$

zusammen.

Die Darstellung der Fläche durch ihre Stützfunktion erhält man nun bekanntlich dadurch, daß man sie als Enveloppe ihrer Tangentialebenen auffaßt, also auf Grund der Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}\,\mathfrak{x} &= -P \\ \mathfrak{N}_u\,\mathfrak{x} &= -P_u \\ \mathfrak{N}_v\,\mathfrak{x} &= -P_v \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach dem Muster von (36) und (37) liefert die gesuchte Darstellung des Ortsvektors der Fläche durch Normale und Stützfunktion in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = -\frac{P[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v] + P_u[\mathfrak{N}_v, \mathfrak{N}] + P_v[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_u]}{[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]\,\mathfrak{N}} \,. \tag{42}$$

Gestützt auf (13) bis (16) ergibt sich daraus für den Stützvektor die Darstellung

$$\mathfrak{P} = \frac{-P_v \mathfrak{N}_u + P_u \mathfrak{N}_v|}{|[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]|} \tag{43}$$

und für sein Quadrat der Wert

$$\mathfrak{P}^2 = \frac{P_v^2 \mathfrak{N}_u^2 - 2P_v P_u \mathfrak{N}_u \mathfrak{N}_v + P_u^2 \mathfrak{N}_v^2}{[\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v]^2} \,,$$

oder, wegen (39),

$$\mathfrak{P}^2 = \frac{e\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial P}{\partial u} + g\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2}{eg - f^2} \equiv \Delta_\omega P \,, \tag{44}$$

d. h. der sog. erste Beltramische Differentialparameter der Stützfunktion in bezug auf das sphärische Abbild der Fläche.

Führen wir also noch das Flächenelement $d\omega = K\,do$ der Sphäre ein, so verwandeln sich die Integrale (24a) und (35a) in

$$\int PH\,do = \int (P^2 - \tfrac{1}{2}\nabla_\omega P)\,d\omega \tag{45}$$

und

$$\int do = \int (P^2 - \tfrac{1}{2}\nabla_\omega P)\,d\omega \,, \tag{46}$$

womit die erwähnten Darstellungen aus der Theorie der konvexen Fläche gewonnen sind.

(Eingegangen den 15. März 1946.)